3. КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика — розділ дискретної математики, у межах якого вивчають об'єкти, побудовані із елементів скінченної множини, а також обчислюють кількості конфігурацій об'єктів, які задовольняють певні властивості.

3.1. Основні правила комбінаторики

Правило суми. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а інший об'єкт y — n_2 способами, то або x, або y можна вибрати $n_1 + n_2$ способами.

Теоретико-множинне формулювання. Якщо система k множин $\{A_1, \ldots, A_k\}$ є розбиттям множини A, то $|A| = |A_1| + \ldots + |A_k|$.

Приклад 3.1. З міста Львів у місто Ужгород вирушає 7 маршруток, 5 поїздів та 3 автобуси. Скількома способами можна дістатися зі Львова до Ужгорода?

Розв'язок. За правилом суми всього існує $7+5+3=15$ способів.

Правило добутку. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а об'єкт y — n_2 способами, то пару (x, y) можна вибрати $n_1 \cdot n_2$ способами.

Теоретико-множинне формулювання. Якщо $A = A_1 \times \ldots \times A_k$, то

$$|A| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Приклад 3.2. Обчислити кількість ідентифікаторів мови C++, довжина яких не перевищує 3.

Розв'язок. Для запису ідентифікаторів використовують 26 латинських літер, 10 цифр та символ підкреслювання, причому ідентифікатори не можуть починатися з цифри. Оскільки регістр літер є важливим, то існує 53 ідентифікатори довжини 1. За правилом добутку є $53 \cdot 63 = 3339$ ідентифікаторів довжини 2 та $53 \cdot 63 \cdot 63 = 210357$ ідентифікаторів довжини 3. Тому за правилом суми загальна кількість ідентифікаторів рівна $53 + 3339 + 210357 = 213749$.

3.2. Розміщення, сполучення та перестановки

Нехай задано скінченну непорожню множину $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ і виконано r таких кроків.

Крок 1. Із множини A вибирають якийсь елемент a_{i_1}.

Крок 2. Із множини $A \setminus \{a_{i_1}\}$ вибирають якийсь елемент a_{i_2}.

……

Крок r. Із множини $A \setminus \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{r-1}}\}$ вибирають якийсь елемент a_{i_r}.

Тоді вибрані елементи $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ утворюють *вибірку* без повторень обсягу r (r-вибірку) із множини A.

Вибірку називають *упорядкованою*, якщо задано порядок її елементів. Зрозуміло, що впорядкована *r*-вибірка — це кортеж (вектор) з *r* компонентами, і тому її позначають $\left(a_{i_1},\ldots,a_{i_r}\right)$. Упорядковані *r*-вибірки з *n*-елементної множини називаються *розміщеннями* з *n* елементів по *r*. Згідно до комбінаторного правила множення для кількості A_n^r усіх розміщеннями без повторень з *n* елементів по *r* маємо

$$A_n^r = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \tag{3.1}$$

де $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

Невпорядковану *r*-вибірку позначатимемо $\left\{a_{i_1},\ldots,a_{i_r}\right\}$. Невпорядкована *r*-вибірка — *r*-елементна підмножина множини *A*. Неупорядковані *r*-вибірки з *n*-елементної множини називаються *сполученнями* (комбінаціями) з *n* елементів по *r*. Кількість усіх *сполучень* з *n* елементів по *r* позначається C_n^r. Легко переконатися, що $A_n^r = C_n^r\cdot r!$. Тому

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

У *вибірках із повтореннями* на *k*-му кроці елемент a_{i_k} вибирається не з множини $A\setminus\left\{a_{i_1},\ldots,a_{i_{k-1}}\right\}$, а з початкової множини *A*.

Сполучення з повтореннями — це, узагалі кажучи, не множина у звичайному розумінні: її елементи можуть повторюватись, тобто зустрічатися більше одного разу. Таке узагальнення множини називається *мультимножиною*. Для позначення мультимножин будемо використовувати квадратні дужки.

Для чисел $\bar{A}_n^r$ розміщень з повтореннями та $\bar{C}_n^r$ комбінацій з повтореннями з *n* елементів по *r* справедливими є наступні формули:

$$\bar{A}_n^r = n^r,\ \ \bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^r.$$

Приклад 3.3. Вказати 2-вибірки з множини $\{a,b,c\}$.

Розв'язок. Наведемо розміщення без повторень із трьох елементів по два:

(*a*, *b*), (*a*, *c*), (*b*, *a*), (*b*, *c*), (*c*, *a*), (*c*, *b*);

розміщення з повтореннями з трьох елементів по два:

(*a*, *a*), (*a*, *b*), (*a*, *c*), (*b*, *a*), (*b*, *b*), (*b*, *c*), (*c*, *a*), (*c*, *b*), (*c*, *c*);

сполучення без повторень із трьох елементів по два:

{*a*, *b*}, {*a*, *c*}, {*b*, *c*};

сполучення з повтореннями із трьох елементів по два:

[*a*, *a*], [*a*, *b*], [*a*, *c*], [*b*, *b*], [*b*, *c*], [*c*, *c*].

Приклад 3.4. У магазині є тістечка чотирьох видів: безе, наполеони, пісочні та еклери. Скільки існує

а) способів придбати 7 тістечок;

б) способів придбати 8 тістечок так, щоб серед них було рівно 2 наполеони;

в) способів придбати 9 тістечок так, щоб серед них було не менше 3 еклерів;

г) способів придбати 10 тістечок так, щоб серед них було не більше 3 безе та пісочних?

Розв'язок. а) Шукана кількість рівна числу сполучень з повтореннями з 4 по 7: $\bar{C}_4^7 = C_{10}^7 = \dfrac{10!}{7!(10-3)!} = \dfrac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!\,3!} = 120$;

б) вважаємо, що два наполеони вже вибрані. Тоді ми обираємо 6 тістечок трьох можливих видів. Шукана кількість рівна числу сполучень з повтореннями з 3 по 6: $\bar{C}_3^6 = C_8^6 = 28$;

в) нехай N — загальна кількість способів вибору 9 тістечок, N_i — кількість способів вибору тістечок так, щоб серед них було рівно i еклерів. Тоді шукана кількість рівна

$$N - N_0 - N_1 - N_2 = \bar{C}_4^9 - \bar{C}_3^9 - \bar{C}_3^8 - \bar{C}_3^7 = C_{12}^9 - C_{11}^9 - C_{10}^8 - C_9^7 = 220 - 55 - 45 - 36 = 84;$$

г) нехай M_i — кількість способів вибору тістечок таким чином, щоб серед них було рівно i безе та пісочних (разом). Тоді решта $10-i$ тістечок мають бути або еклерами, або наполеонами. За комбінаторним правилом множення

$$M_i = \bar{C}_2^i \cdot \bar{C}_2^{10-i} = C_{11-i}^{10-i} C_{i+1}^i = \frac{(11-i)!}{(10-i)!\,1!}\,\frac{(i+1)!}{i!\,1!} = (11-i)(i+1).$$

Тоді шукана кількість рівна $M_0 + M_1 + M_2 + M_3 = 11 + 10\cdot 2 + 9\cdot 3 + 8\cdot 4 = 90$.

Перестановка з n елементів — це особливий випадок розміщення без повторень з n елементів, коли в розміщення входять усі елементи. Перестановки з n елементів називають також n-перестановками. Окремі n-перестановки різняться лише порядком елементів. Кількість таких перестановок позначають як P_n. Формулу для P_n одержують із формули (3.1) у випадку $r = n$. Тому $P_n = A_n^n = n!$.

Розглянемо тепер задачу про перестановки n елементів за умови, що не всі елементи різні (*перестановки з повтореннями*). Точніше, нехай є елементи k різних типів, а число n_i $(i = 1,\ldots,k)$ — кількість елементів k-го типу. Очевидно, що $n = n_1 + \ldots + n_k$. Перестановки з n елементів за такої умови називають *перестановками з повтореннями*. Кількість таких перестановок позначають як $P_n(n_1,\ldots,n_k)$. Щоб знайти явний вираз для $P_n(n_1,\ldots,n_k)$, візьмемо фіксовану перестановку з повтореннями та замінимо в ній усі однакові елементи різними.

У такий спосіб ми можемо отримати $n_1!\cdot\ldots\cdot n_k!$ перестановок з n різних елементів. Якщо зробити це для кожної перестановки з повтореннями, то одержимо усі $n!$ перестановок. Отже $P_n = P_n\left(n_1,\ldots,n_k\right)\cdot n_1!\cdot\ldots\cdot n_k!$. Тому

$$P_n\left(n_1,\ldots,n_k\right) = \frac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_k!}. \tag{3.2}$$

Приклад 3.5. Підрахувати кількість різних 6-цифрових чисел, які

а) складаються із різних цифр;

б) містять лише парні цифри;

в) містять лише непарні цифри;

г) містять дві цифри 3, три цифри 7 та одну цифру 6;

д) містять рівно одну цифру 5, хоча би дві цифри 2 та жодної цифри 0.

Розв'язок. а) Використаємо правило множення. Існує 9 способів вибору 1-ї цифри (усі цифри крім 0). Оскільки допускаються повтори цифр, то є $\overline{A}_{10}^5 = 10^5$ способів вибору інших п'яти цифр. Тому усього є $9\cdot 10^5 = 90000$ 6-цифрових чисел;

б) шукані числа не можуть починатися на цифру 0. Усі інші цифри можуть приймати одне з п'яти можливих значень (0, 2, 4, 6 або 8). Тому є $4\cdot 5^5 = 12500$ чисел складених із парних цифр;

в) на першу цифру нема додаткових обмежень. Тому шукана кількість рівна $5^6 = 15625$;

г) у цьому пункті ми не можемо довільним чином вибирати цифри числа, а лише переставляємо вже вибрані цифри з урахуванням їх повторів. Шукана кількість рівна $P_6\left(2,3,1\right) = 6!/\left(2!\,3!\,1!\right) = 4\cdot 5\cdot 6/2 = 60$;

д) Нехай N — кількість 6-цифрових чисел, які містять одну цифру 5 та не містять жодної цифри 0, N_i — кількість 6-цифрових чисел, які містять одну цифру 5, не містять жодної цифри 0 та місять i цифр 2. При підрахунку числа N ми маємо 6 способів вибору позиції цифри 5 та 8 способів вибору для кожної з інших цифр, при підрахунку N_i — C_5^i способів вибору позицій для двійок та 7 способів вибору для кожної з інших цифр. Тому $N_i = 6C_5^i 7^{5-i},\ 0\le i\le 5$. Тоді шукана кількість способів рівна $N - N_0 - N_1 = 6\cdot\left(8^5 - 7^5 - C_5^1\cdot 7^4\right) = 23736$.

Приклад 3.6. На рис. 3.1. зображено план міста. Мандрівник хоче потрапити із пункту A в пункт B найкоротшим шляхом, тобто рухаючись весь час або «зліва направо» або «знизу вверх». Скількома способами він може потрапити із A у B?

Розв'язок. Кожний шлях можна однозначно зобразити у вигляді слова, утвореного з k символів U (вверх) та n символів R (вправо). Тому кількість різних шляхів рівна кількості різних перестановок, тобто $P_{k+n}\left(k,n\right) = \left(n+k\right)!/\left(n!\,k!\right)$.

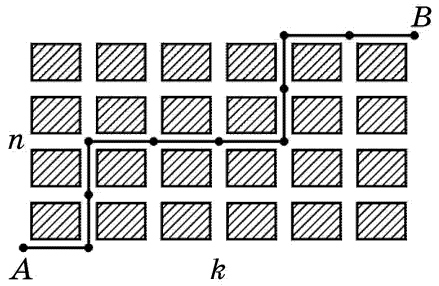

Рис. 3.1. План міста

3.3. Властивості біноміальних коефіцієнтів. Біном Ньютона та поліноміальна формула

Біноміальними коефіцієнтами називають числа $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ — кількість сполучень з n елементів по r $(0 \le r \le n)$. При цьому за домовленістю вважаємо, що $0! = 1$. Часто біноміальні коефіцієнти C_n^r позначають як $\binom{n}{r}$. Властивості:

1. Нехай n і r — невід'ємні цілі числа, $r \le n$. Тоді $C_n^r = C_n^{n-r}$.

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r.$$

2. Рівність Паскаля: $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

Для доведення розіб'ємо множину усіх C_n^r сполучень з n елементів $\{a_1, \ldots, a_n\}$ по r на дві підмножини. До першої множини віднесемо усі сполучення, які не містять елемент a_n. Таких сполучень є C_{n-1}^r. До другої множини віднесемо усі сполучення, які містять елемент a_n. Відкинувши цей елемент, отримаємо сполучення з $n-1$ елемента по $r-1$. Таких сполучень є C_{n-1}^{r-1}. Тому $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.

Рівність Паскаля дає змогу таблицю для чисел C_n^r, яку називають *трикутником Паскаля*, який заповнюють зверху внизу. По краям трикутника записують числа $C_n^0 = C_n^n = 1$, а всі інші значення у рядку одержують як суми двох чисел попереднього рядка, що розміщені ліворуч та праворуч від шуканого значення (див рис. 3.2). Тому у $(n+1)$-й рядок трикутника містить числа C_n^i $(i = 0, \ldots, n)$.

3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}
$$

Рис. 3.2. Трикутник Паскаля

Для доведення 3-ї рівності досить зауважити, що оскільки кожне число $(n-1)$-го рядка трикутника Паскаля бере участь у формуванні двох чисел n-го рядка, то сума чисел кожного рядка удвічі більша за суму чисел попереднього рядка. Оскільки сума чисел 1-го рядка рівна 1, то сума чисел $(n+1)$-го рядка рівна 2^n.

4. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}$.

Доведення за допомогою трикутника Паскаля схоже на доведення попередньої властивості.

5. $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+k-1}^n = C_{n+k}^{n+1}$;

Доведення випливає шляхом багаторазового застосування формули Паскаля:

$$C_{n+k}^{n+1} = C_{n+k-1}^n + C_{n+k-1}^{n+1} = C_{n+k-1}^n + C_{n+k-2}^n + C_{n+k-2}^{n+1} = \ldots = C_{n+k-1}^n + \ldots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} =$$
$$= C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+k-1}^n.$$

6. Якщо $r \le \min\{m,n\}$, то $\sum_{k=0}^{r} C_m^k C_n^{r-k} = C_{m+n}^r$ (рівність Вандермонда-Коші).

7. Послідовність біноміальних коефіцієнтів є *унімодальною*, тобто задовольняє умову

$$C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^m;\ C_n^m \ge C_n^{m+1} > C_n^{m+1} \ldots > C_n^n,$$

де $m = \lfloor n/2 \rfloor$ — ціла частина числа $n/2$. У разі парного n максимум C_n^r досягається в точці $r = m$, а разі непарного — у двох точках $r = m$ та $r = m+1$.

Доведення випливає з того, що відношення $\dfrac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}$ зростає у випадку $r \le m$ та спадає у випадку $r > m+1$.

Теорема 3.1 (біном Ньютона). Нехай x та y — змінні, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}.$$

Доведення. Дамо комбінаторне доведення цієї теореми [4]. Оскільки доданок $x^i y^{n-j}$ отримується внаслідок *i*-кратного вибору *x* та $(n-i)$-кратного вибору *y* з *n* співмножників у виразі $(x+y)^n$, то коефіцієнт при $x^i y^{n-j}$ дорівнює кількості способів *i*-кратного вибору *x* з *n* співмножників, тобто C_n^i.

За допомогою бінома Ньютона можна довести властивості 3–6. Наприклад,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot 1^i \cdot 1^{n-i} = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n;$$

$(x+y)^{m+n} = (x+y)^m \cdot (x+y)^n$. Прирівнюючи коефіцієнти при $x^r y^{m+n-r}$ отримаємо рівність Вандермонда-Коші.

Приклад 3.7. Обчислити коефіцієнт при x^2 у розкладі $(x+2/x)^8$.

Розв'язок. У біномі Ньютона *i*-й доданок рівний $C_8^i x^i 2^{8-i} x^{-(8-i)} = C_8^i 2^{8-i} x^{2i-8}$, $i = 0,\ldots,8$. Якщо $2i-8=2$, то $i=5$. Тому коефіцієнт при x^2 рівний $C_8^5 2^{8-5} = 448$.

Розглянемо узагальнення бінома Ньютона, яке стосується піднесення до *n*-го степеня суми *k* доданків.

Теорема 3.2 (поліноміальна). Вираз $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$ дорівнює сумі всіх можливих доданків $P_n(n_1, n_2 \ldots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$, де $n = n_1 + \ldots + n_k$, тобто

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1 \ge 0,\ldots,n_k \ge 0 \\ n_1+\ldots+n_k=n}} P_n(n_1,\ldots,n_k) x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}.$$

Поліноміальна теорема дає змогу встановити властивості чисел $P_n(n_1,\ldots,n_k)$. Нехай $x_1 = 1,\ldots,x_k = 1$. Тоді

$$\sum_{\substack{n_1 \ge 0,\ldots,n_k \ge 0 \\ n_1+\ldots+n_k=n}} P_n(n_1,\ldots,n_k) = k^n.$$

3.4. Деякі комбінаторні задачі

3.4.1. Задача про цілочислові розв'язки

Цю задачу формулюють так: знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + \ldots + x_r = n$ в цілих невід'ємних числах, де *n* — натуральне число.

Узявши такі невід'ємні цілі числа $x_1,..., x_r$, що $x_1+\ldots+x_r=n$, можна одержати сполучення з повтореннями з r елементів по n, а саме: елементів першого типу — x_1 одиниць, другого типу — x_2 одиниць, ..., r-го — x_r. Навпаки, якщо є сполучення з повтореннями з r елементів по n, то кількості елементів кожного типу задовольняють рівняння $x_1+\ldots+x_r=n$ у цілих невід'ємних числах. Отже, кількість цілих невід'ємних розв'язків цього рівняння дорівнює $\bar{C}_r^n=C_{n+r-1}^n=$ $=\dfrac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}$.

Приклад 3.8. Знайти

а) кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3=10$;

б) кількість додатних цілих розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3=10$;

в) кількість невід'ємних цілих розв'язків нерівності $x_1+x_2+x_3<10$.

Розв'язок. а) $\bar{C}_3^{10}=C_{12}^{10}=C_{12}^2=11\cdot 12/2=66$;

б) нехай $x_i=y_i+1,\ y_i\geq 0,\ i=1,2,3.$ Після підстановки отримаємо рівняння $y_1+y_2+y_3=7$, яке має $\bar{C}_3^7=C_9^7=36$ цілих невід'ємних розв'язків;

в) строга нерівність $x_1+x_2+x_3<10$ рівносильна нестрогій нерівності x_1+ $+x_2+x_3\leq 9$ (для цілих значень невідомих). Остання нерівність має таку саму кількість розв'язків, що й рівняння $x_1+x_2+x_3+x_4=9$. Отже, шукана кількість розв'язків становить $\bar{C}_4^9=C_{12}^9=C_{12}^3=660$.

3.4.2. Принцип Діріхле

Якщо в k коробках є $k+1$ або більше предметів, то існує принаймні одна коробка, яка містить щонайменше два предмети.

Якщо в k коробках є N предметів, то існує принаймні одна коробка, яка містить щонайменше $\lceil N/k\rceil$ предметів (узагальнений принцип Діріхле).

Приклад 3.9. У залі театру є 433 глядачі. Довести, що

3.4.1. принаймні двоє з них мають однакову кількість знайомих серед присутніх.

3.4.2. принаймні 37 з них народилися в одному місяці.

Розв'язок. а) нехай k-та коробка містить усіх глядачів, які мають рівно k знайомих серед присутніх. Легко переконатися, що хоча б одна з коробок з індексами 0 та k порожня. Виключимо цю коробку з розгляду. Тоді 433 глядачі містяться в одній з 432 коробок. Згідно принципу Діріхле одна з цих коробок містить хоча би двох глядачів. Отже, принаймні двоє з них мають однакову кількість знайомих;

б) нехай k-та коробка містить усіх глядачів, які народилися у k-му місяці. Тоді згідно до узагальненого принципу Діріхле знайдеться місяць, в якому народилося $\lceil 433/12 \rceil = 37$ глядачів.

3.4.3. Принцип включення-виключення

Цей принцип дає відповідь на запитання, як визначити кількість елементів у об'єднанні множин. Нехай $A_1,\ldots,A_n$ — скінченні множини. Тоді

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i\le j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i\le j\le k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

.

Формула включення-виключення містить $2^n - 1$ доданків, по одному для кожної непорожньої підмножини з $\{A_1,\ldots,A_n\}$.

Розглянемо альтернативну форму для принципу включення-виключення. Нехай A — скінченна множина, $|A| = N$ і потрібно знайти кількість її елементів, які не мають жодної з властивостей $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Нехай $N(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_k})$ — кількість елементів, які одночасно мають властивості $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_k}$, $N(\bar{\alpha}_{i_1},\ldots,\bar{\alpha}_{i_k})$ — кількість елементів, які не мають жодної з властивостей $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_k}$. Тоді

$$N(\bar{\alpha}_{i_1},\ldots,\bar{\alpha}_{i_n}) = N - \sum_{1\le i\le n} N(\alpha_i) + \sum_{1\le i\le j\le n} N(\alpha_i,\alpha_j) + \ldots + (-1)^n N(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_n}). \qquad (3.3)$$

Розглянемо частковий випадок формули (3.3). Припустимо, що величини $N(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_k})$ не залежать від самих властивостей, а залежать лише від їх кількості. Уважатимемо за означенням $N(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_k}) = N^{(k)}$ для будь-якого набору k властивостей. Тоді формула (3.3) набуває вигляду

$$N^{(0)} = N - C_n^1 N^{(1)} + C_n^2 N^{(2)} + \ldots + (-1)^n N^{(n)}. \qquad (3.4)$$

Приклад 3.10. Обчислити кількість простих чисел серед перших 100 натуральних чисел.

3.5. Задачі про розподіл предметів за ящиками та розбиття множини

Розв'язуючи задачі про розподіл (розкладання) предметів за ящиками, необхідно проаналізувати зміст задачі, властивості предметів, щоб з'ясувати питання про те, вважати предмети однаковими чи різними, враховувати чи ні порядок вибірки предметів, розрізняти чи ні ящики один від одного, брати до уваги чи ні місткість ящиків.

Розподіл різних предметів за різними ящиками заданої місткості

Дано n різних предметів і k різних ящиків. Потрібно покласти в перший ящик n_1 предметів, у другий — n_2 предметів, ..., у k-й — n_k предметів, де $n = n_1 + \ldots + n_k$. Скількома способами можна це зробити?

Розглянемо зв'язок між цією задачею та задачею про кількість перестановок з повтореннями. Для цього занумеруємо всі предмети номерами ящиків, у які вони будуть покладені, і запишемо отриману послідовність номерів. Отримаємо перестановку з повтореннями. І навпаки, кожній перестановці з повтореннями цілком однозначно відповідає розподіл предметів по ящиках. Отже, знайдено відповідність між перестановками з повторенням та розкладанням у ящики. Отже, шукана кількість дається формулою (3.2).

Розподіл *n* однакових предметів за *k* різними ящиками

Оскільки предмети не можна відрізнити, то важливими є лише їх кількості у кожному ящику. Нехай x_i — кількість предметів у i-му ящику, де $1 \le i \le k$. Тоді $x_1 + \ldots + x_k = n,\ \ x_i \ge 0$. Тобто, ми звели нашу задачу до підрахунку кількості цілочислових невід'ємних розв'язків рівняння $x_1 + \ldots + x_k = n$, яка розглядалася в параграфі 3.4.1. Тому шукана кількість рівна $\overline{C}_k^n = C_{n+k-1}^n = C_{n+k-1}^{k-1}$.

Якщо ставиться додаткова умова, що у кожному ящику має бути не менше ніж r предметів, то для вільного розподілу залишається $n - kr$ предметів. Отже, у цьому випадку шукана кількість способів рівна $\overline{C}_k^{n-kr} = C_{n-k(r-1)-1}^{k-1}$.

Розподіл різних предметів з урахуванням їх порядку в різних ящиках

Якщо не обмежувати кількість предметів в ящиках і якщо предмети не розрізняти між собою, то кількість таких розподілів дорівнює $\overline{C}_k^n = C_{n+k-1}^n$.

Кожному способу розподілу однакових предметів між урнами відповідає $n!$ способів розподілу різних предметів з урахуванням їх порядку, які одержуються за допомогою перестановок предметів між собою без зміни кількості предметів в урнах. За правилом добутку одержуємо шукану кількість розподілів:

$$C_{n+k-1}^n \cdot n! = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A_{n+k-1}^n.$$

Розподіл різних предметів без урахування їх порядку предметів в ящиках

Необхідно розподілити n різних предметів між k ящиками, місткість яких не обмежена. Перший предмет можна покласти у будь-який з k ящиків, другий (незалежно від першого) також у k ящиків і т. д. За правилом добутку предмети можна розподілити k^n способами.

Розподіл різних предметів за однаковими ящиками за умови, що ящики не порожні

Позначимо через $S(n,k)$ кількість способів розподілу n різних предметів між k однаковими не порожніми ящиками. Із кожного такого розподілу можна одержати $k!$ аналогічних розподілів за різними ящиками. Таким чином, число $M(n, k)$ — кількість розподілів n різних предметів між k різними не порожніми ящиками рівна $S_n^k \cdot k!$.

З формули (3.4) з використанням результату попереднього пункту легко отримати формулу для $M(n, k)$

$$S(n,k) = k^n - C_n^1(k-1)^n + C_n^2(k-2)^n + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} 1^n.$$

Тому

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\left(k^n - C_n^1(k-1)^n + C_n^2(k-2)^n + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} 1^n\right).$$

Числа $S(n,k)$ називаються *числами Стірлінга другого роду*. Часто в літературі для чисел Стірлінга другого роду використовують позначення $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

3.6. Задача про розбиття множини на непорожні частини

Розглянемо задачу визначення кількості розбиттів скінченної множини A на непорожні частини (означення розбиття множини наведено в підрозділі 2.5).

Приклад 3.11. Якщо $A = \{a,b,c\}$, то є такі розбиття цієї множини на k непорожніх частин:

$k = 1$: $\{\{a,b,c\}\}$;

$k = 2$: $\{\{a,b\},\{c\}\}$, $\{\{a,c\},\{b\}\}$, $\{\{a\},\{b,c\}\}$;

$k = 3$: $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$.

Очевидно, що кількість розбиттів n-елементної множини на k непорожніх частин рівна $S(n,k)$. Нехай B_n — кількість усіх розбиттів скінченної множини A на непорожні частини. Числа B_n називаються числами Белла. Очевидно, що

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Для попереднього прикладу $S(3,1) = 1$, $S(3,2) = 3$, $S(3,3) = 1$, $B_3 = 1 + 3 + 1 = 5$.

Довільне розбиття множини $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ на k непорожніх частин можна одержати так:

- із розбиття множини $A\setminus\{a_n\}$ на $(k-1)$ непорожню частину додаванням підмножини $\{a_n\}$;
- із розбиття множини $A\setminus\{a_n\}$ на k непорожніх частин додаванням до однієї з цих частин елемента a_n (це можна зробити k способами).

Звідси випливає тотожність

$$S(n,k)=S(n,k-1)+kS(n-1,k).$$

Для чисел Белла існує рекурентна залежність (вважаємо, що $B_0=1$)

$$B_{n+1}=\sum_{i=0}^{n}C_n^iB_i\ .$$

За допомогою останніх двох формул можна будувати таблиці значень чисел Стірлінга та Белла (табл. 3.1).

Таблиця 3.1.

n \ k	1	2	3	4	5	6	...	
1	1						...	1
2	1	1					...	2
3	1	3	1				...	5
4	1	7	6	1			...	15
5	1	15	25	10	1		...	52
6	1	31	90	65	15	1	...	203
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Приклад 3.12. Вказати формули для

а) $S(n,n-1)$;

б) $S(n,2)$;

в) $S(n,3)$.

3.7. Числа Каталана

Числа Каталана — елементи числової послідовності
1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, …
яка з'являється у процесі розв'язування задач підрахунку кількості різноманітних комбінаторних об'єктів.

Числа Каталана C_n визначаються наступним чином:

$$C_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\ (n\ge 0).$$

Можна показати, що числа Каталана — розв'язки рекурентного рівняння

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i},\ n \geq 0,\ C_0 = 1. \tag{3.5}$$

Числа $D_i = C_{i-1}$ є розв'язками рівняння

$$D_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} D_i D_{n-i+1},\ n \geq 1,\ D_1 = 1. \tag{3.6}$$

Числа Каталана виникають у таких задачах:

1. *Підрахунок кількості слів Діка* довжини $2n$. Слова Діка — це слова, які побудовані із n символів X то n символів Y, причому у будь-якому префіксі слова Діка кількість Y не перевищує кількість X. Нижче наведено слова Діка довжини 4.

   XXXYYY XYXXYY XYXYXY XXYYXY XXYXYY.

   Кількість слів Діка довжини $2n$ рівна C_n. Доведення випливає з того, довільне слово Діка ω довжини $2n$ може бути записане у вигляді $\omega = X\omega_1 Y\omega_2$, де ω_1, ω_2 — слова Діка довжини $2k$ та $2(n-k)-2$ відповідно (можливо порожні). Тому кількість слів Діка довжини $2n+2$ задовольняє рівняння (3.5).

2. Підрахунок кількості способів обчислення добутку $n+1$ множника (способів розстановки дужок у виразів). У випадку $n=3$ є наступні способи перемножити 4 множника:

   $$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd))$$

   Нехай D_{n+1} — шукана кількість способів. Тоді розбивши усі способи за порядковим номером операції множення, яка проводиться у останню чергу, можна легко переконатися, що $D_{n+1} = D_1 D_n + D_2 D_{n-2} + \ldots + D_{n-2} D_2 + \ + D_{n-1} D_1$. На основі (3.6) робимо висновок, що $D_{n+1} = C_n$.

3. C_n — кількість шляхів з лівої нижньої точки у праву верхню, які можна побудувати на сітці $n \times n$ таким чином, щоб вони жодного разу не «проходили» вище діагоналі. Випадок $n=4$ проілюстровано на рис. 3.2.

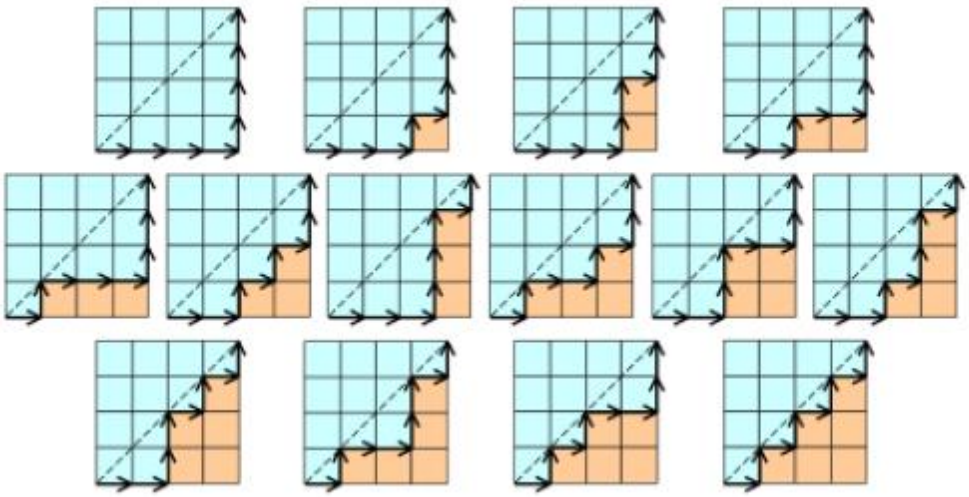

Рис. 3.2. Допустимі шляхи

Для доведення, що кількість шляхів рівна C_n досить встановити взаємно однозначну відповідність між допустимими шляхами та словами Діка довжини $2n$. Цього можна досягти, закодувавши горизонтальні пересування літерою X, а вертикальні — літерою Y.

4. C_n — кількість тріангуляцій випуклого $(n+2)$-кутника шляхом проведення його діагоналей, які не перетинаються між собою. Випадок $n=4$ проілюстровано на рис. 3.3.

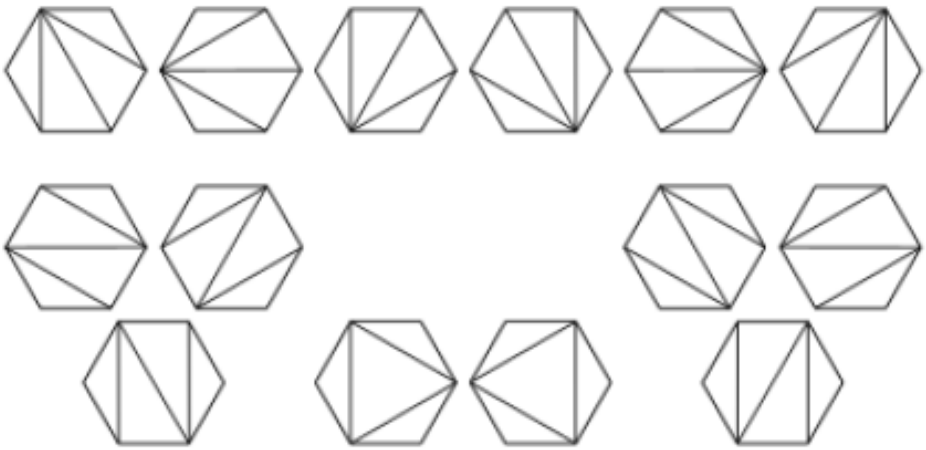

Рис. 3.3. Розбиття шестикутника на трикутники

Можна показати, що $C_n \sim \dfrac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$, тобто границя відношення n-го числа Каталана і дробу прямує до 1 при $n \to \infty$.

3.8. Задачі до третього розділу

1. У чемпіонаті світу з футболу беруть участь 32 команди, 14 з яких з Європи. Підрахувати:
   а) кількість способів розподілу нагород;
   б) кількість способів розподілу нагород за умови, що хоча би два призові місця посіли команди з Європи;
2. Будівельна фірма формує бригаду з 6 робочих. На фірмі працює 5 малярів, 2 теслі та 3 штукатури. Підрахувати
   а) кількість способів укомплектування бригади;
   б) кількість способів укомплектування бригади за умови, що до її складу мають входити представники усіх трьох спеціальностей.
3. Для премій на конкурсі виділено 2 ноутбуки, 3 — смартфони і 8 — колонок. Скількома способами можна розділити ці премії між 20 учасниками, якщо будь-якому з них вручають не більше однієї премії?
4. Для премій на олімпіаді з дискретної математики виділено 3 примірника першої книги, 4 — другої і 8 — третьої. Скількома способами можна розділити ці премії між 30 учасниками, якщо будь-якому вручають не більше однієї книги?
5. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «метаморфоза»?
6. Скільки слів можна одержати, переставляючи букви слова «перестановка» таким чином, щоб отримана перестановка починалася або закінчувалася на літеру «а»?
7. Скількома способами із 20 шахістів можна скласти
   а) три пари (порядок пар не відіграє ролі);
   б) чотири трійки?
8. У розкладі бінома $\left(\sqrt[3]{a}+a^{-1}\right)^{16}$ визначити член, який не залежить від a.
9. У розкладі $\left(a+b+c+d\right)^{5}$ вказати члени, числовий коефіцієнт в яких є найбільшим.
10. Підрахувати кількість невід'ємних розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ за умови, що
    а) x_i — цілі $\left(i=1,\ldots,4\right)$;
    б) x_1, x_2 — парні, x_3, x_4 — непарні;
11. Підрахувати кількість натуральних розв'язків нерівності $x_1+x_2+x_3<20$.
12. Скільки потрібно запросити людей, щоб
    а) щонайменше шість із них народилися під одним і тим самим знаком зодіаку?
    б) обов'язково принаймні двоє з них народилися в один і той самий день тижня та в один і той самий місяць (можливо, у різні роки)?
13. Нехай A — множина, яка містить 10 натуральних чисел, кожне з яких не більше 42. Довести, що знайдуться хоча би дві різні трьохелементні підмножини множини A, які мають однакові суми елементів.

14. Скільки елементів містить об'єднання п'яти множин, якщо кожна з них містить 10000 елементів, кожна пара — 1000 спільних елементів, кожна трійка — 100, кожна четвірка — 10 спільних елементів і один елемент належить усім п'яти множинам?
15. Скількома способами можна розмістити 10 білих і 6 чорних куль у 5 різних урн, якщо
    а) кулі одного кольору різні;
    б) кулі одного кольору однакові;
    в) кулі одного кольору різні і хоча би дві урни мають бути непорожні.
    г) кулі одного кольору однакові і всі урни мають бути непорожні.