

4. ТЕОРІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

4.1. Булеві вектори

4.1.1. Основні означення

Нехай $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. Елементи множини $\mathbb{Z}_2$ називаються булевими константами.

Розглядають наступні логічні операції над булевими змінними множини $\mathbb{Z}_2$: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність та додавання за модулем 2 ($\oplus$).

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0.$$

Вектор (упорядкований набір) вигляду $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{Z}_2$ називається *n-вимірним булевим вектором*. Множина усіх *n*-вимірних булевих векторів позначається $\mathbb{Z}_2^n$. Тобто, $\mathbb{Z}_2^n = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2}_n$.

Кожному булевому вектору $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ставиться у відповідність його номер $N(\tilde{x})$, який визначається наступним чином

$$N(\tilde{x}) = x_1 \cdot 2^{n-1} + x_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + x_{n-1} \cdot 2 + x_n.$$

Легко бачити, що для номера *n*-вимірного булевого вектора виконуються нерівності

$$0 \leq N(\tilde{x}) < 2^n.$$

Приклад 4.1. Нехай $\tilde{x} = (0,1,0,1,1,0,1) \in \mathbb{Z}_2^7$. Тоді

$$N(\tilde{x}) = 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 32 + 8 + 4 + 1 = 45.$$

Приклад 4.2. Вказати вектор $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_2^9$, номер якого рівний 117.

$$117 = 64 + 53 = 64 + 32 + 21 = 64 + 32 + 16 + 5 = 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0.$$

Тому $\tilde{x} = (0,0,1,1,1,0,1,0,1)$.

Теорема 4.1. Кількість *n*-вимірних булевих векторів рівна 2^n .

Доведення. Скористаємося комбінаторним правилом множення, згідно до якого $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, де $|A|$ — потужність множини *A*. Отримаємо

$$|\mathbb{Z}_2^n| = |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2| = |\mathbb{Z}_2| \cdot |\mathbb{Z}_2| \cdot \dots \cdot |\mathbb{Z}_2| = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n.$$

Мірою "близькості" між n -вимірними булевими векторами $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ та $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n) \in$ відстань Хеммінга $d(\tilde{x}, \tilde{y})$, яка визначається наступним чином:

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Приклад 4.3. Обчислити відстань Хеммінга між векторами

$\tilde{x} = (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$ та $\tilde{y} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$.

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 = 3.$$

Відстань Хеммінга між двома векторами чисельно рівна кількості координат, у яких відрізняються ці вектори. Якщо $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1$, то вектори $\tilde{x}$ та $\tilde{y}$ називаються *сусідніми*.

Властивості відстані Хеммінга:

1. $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq 0$, $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} = \tilde{y}$;
2. $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{y}, \tilde{x})$;
3. для довільних $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{Z}_2^n$ $d(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq d(\tilde{x}, \tilde{z}) + d(\tilde{z}, \tilde{y})$ (нерівність трикутника).

Величина $\|\tilde{x}\| = \sum_{i=1}^n x_i$ називається *нормою Хеммінга* булевого вектора $\tilde{x}$.

Норма Хеммінга булевого вектора рівна кількості одиничних компонент вектора.

1.1.2. Операції над булевими векторами

Над булевими векторами можна виконувати *логічні операції*, застосовуючи їх до відповідних компонент цих векторів. Тобто, якщо $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n)$, то

1. $\bar{\tilde{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$;
2. $\tilde{x} \wedge \tilde{y} = (x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n)$;
3. $\tilde{x} \vee \tilde{y} = (x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n)$;
4. $\tilde{x} \oplus \tilde{y} = (x_1 \oplus y_1, \dots, x_n \oplus y_n)$.

Приклад 4.4. Нехай $\tilde{x} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ та $\tilde{y} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$. Тоді

$$\bar{\tilde{x}} = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0), \quad \tilde{x} \wedge \tilde{y} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1),$$

$$\tilde{x} \vee \tilde{y} = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1), \quad \tilde{x} \oplus \tilde{y} = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0).$$

Також до булевих векторів можна застосовувати *операції зсуву*. Виокремлюють *логічний* та *циклічний* зсув.

Результатом застосування операції логічного зсуву на k позицій вліво вектора $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ є вектор $\tilde{x} \ll k = (x_{k+1}, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$.

Результатом застосування операції логічного зсуву на k позицій вправо вектора $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$ є вектор $\tilde{x} \gg k = (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_{n-k})$.

Результатом застосування операції циклічного зсуву на k позицій вліво вектора $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ є вектор $\tilde{x} \lll k = (x_{k+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_k)$.

Результатом застосування операції циклічного зсуву на k позицій вправо вектора $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$ є вектор $\tilde{x} \ggg k = (x_{n-k+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{n-k})$.

Приклад 4.5. Нехай $\tilde{x} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$. Тоді

$$\tilde{x} \ll 2 = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0), \quad \tilde{x} \gg 2 = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0),$$

$$\tilde{x} \lll 2 = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0), \quad \tilde{x} \ggg 2 = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0).$$

Приклад 4.6. Вказати вектор $(\tilde{x} \lll 5) \oplus (\tilde{y} \gg \|\tilde{x}\|)$, якщо $\tilde{y} \in \mathbb{Z}_2^8$, $N(\tilde{y}) = 111$, $\tilde{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$.

4.2. Булеві функції

4.2.1. Булеві функції. Основні означення

Функції вигляду $f: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ називаються n -місними *булевими функціями* (функціями двозначної логіки). Тобто, аргументами булевих функцій є n -вимірні булеві вектори, а значеннями — 0 або 1. Позначимо через P_2 множину усіх булевих функцій.

Оскільки область значень булевої функції (БФ) скінченна, то її можна задавати за допомогою таблиць значень. Для того, щоб задати n -місну БФ, достатньо вказати її на значення на кожному з 2^n булевих наборів (векторів). Якщо домовитися, що набори впорядковані у порядку зростання їх номерів, то кожна n -місна БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ однозначно задається вектором $\tilde{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1})$, де f_k — значення функції f на наборі, номер якого рівний k .

Теорема 4.2. Кількість різних n -місних булевих функцій рівна 2^{2^n} .

Доведення. Кількість n -місних БФ співпадає із кількістю усіх можливих n -вимірних булевих векторів вигляду $\tilde{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1})$. За теоремою попереднього параграфу ця кількість рівна 2^{2^n} .

Номером булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$ називається номер $N(\tilde{f})$, де $\tilde{f}$ — вектор значень функції f .

Приклад 4.7. Вказати таблицю значень БФ $f(x_1, x_2, x_3)$, якщо $N(\tilde{f}) = 43$.

$$43 = 32 + 11 = 32 + 8 + 3 = 32 + 8 + 2 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0$$

Тому $\tilde{f} = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$. Тоді таблиця значень БФ має наступний вигляд.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Змінна x_k називається *суттєвою змінною* функції $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо існує такий набір $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, що $f(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_k, \dots, \alpha_n)$. У протилежному випадку змінна x_k називається *фіктивною*.

Якщо

$$g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \text{ і } x_k \text{ —}$$

фіктивна змінна функції $f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$, то кажуть, що функцію $g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ отримано із функції $f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ шляхом видалення фіктивної змінної x_k (функцію f отримано із g шляхом введення фіктивної змінної).

БФ функції f_1 та f_2 будемо вважати рівними, якщо одну із них можна отримати із іншої за допомогою видалення чи введення фіктивних змінних.

Приклад 4.8. Вказати суттєві змінні БФ $f(x_1, x_2, x_3)$, якщо $\tilde{f} = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$. Видалити фіктивні змінні.

Запишемо таблицю значень БФ f .

Змінна x_1 є суттєвою, оскільки $f(0, 0, 0) = 1$, а $f(1, 0, 0) = 0$.

Змінна x_2 є фіктивною, оскільки $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 0) = 1$,
 $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1) = 1$, $f(1, 0, 0) = f(1, 1, 0) = 0$ та
 $f(1, 0, 1) =$

$f(1, 1, 1) = 1$. Змінна x_3 є суттєвою, оскільки $f(1, 0, 0) = 0$,
а $f(1, 0, 1) = 1$.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

x_1	x_3	g
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Перейдемо до видалення фіктивної змінної x_2 . Для цього у таблиці значень функції f закреслимо стовпчик, який відповідає змінній x_2 та ті рядки, які відповідають наборам, у яких $x_2 = 1$. У результаті отримаємо $g(x_1, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$.

4.2.2. Елементарні булеві функції

Розглянемо n -місні БФ у випадку $n \in \{0, 1, 2\}$.

Якщо $n = 0$, то отримуємо 0-місні БФ, які не залежать від жодної змінної, тобто є булевими константами 0 або 1.

Якщо $n = 1$, то за теоремою 2 маємо $2^{2^1} = 4$ різних одномісних БФ, які наведені у наступній таблиці

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Індекс функції у таблиці співпадає із номером вектора її значень. Легко переконатися, що $f_0 = 0$, $f_3 = 1$ (у цих функціях змінна x є фіктивною), $f_1 = x$, $f_2 = \bar{x}$.

Якщо $n = 2$, то за теоремою 2 маємо $2^{2^2} = 16$ різних двомісних БФ, які наведені у наступній таблиці

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Проведемо аналіз отриманих двомісних БФ.

Розглянемо функції 0, 1 та 2 змінних (операції).

$$f_0 = 0, f_{15} = 1.$$

$$f_3 = x, f_{12} = \bar{x}, f_5 = y, f_{10} = \bar{y}.$$

$$f_1(x, y) = x \wedge y, f_7(x, y) = x \vee y,$$

$$f_{13}(x, y) = x \Rightarrow y, f_{11}(x, y) = y \Rightarrow x,$$

$$f_9(x, y) = x \Leftrightarrow y, f_6(x, y) = x \oplus y.$$

Функція $f_{14}(x, y) = \overline{x \wedge y}$ називається *функцією Шеффера* (штрих Шеффера) і позначається $x | y$.

Функція $f_8(x, y) = \overline{x \vee y}$ називається *функцією Пірса* (стрілка Пірса) і позначається $x \downarrow y$.

Розглянуті двомісні БФ (усі функції із попередньої таблиці крім f_2 та f_4) називаються *елементарними булевими функціями* (операціями двозначної логіки).

4.2.3. Реалізація булевих функцій формулами

Суперпозиція булевих функцій — підстановка замість аргументів однієї БФ інших БФ. За допомогою суперпозиції можна отримати нові функції, використовуючи елементарні функції.

Нехай F — деяка підмножина функцій із P_2 . Тоді

- 1) кожна функція $f \in F$ є *формулою над множиною F* ;
- 2) якщо $f(x_1, \dots, x_n) \in F$, $A_1, \dots, A_n$ — вирази, які є або формулами над F , або символами змінних, тоді вираз $f(A_1, \dots, A_n)$ — є *формулою над множиною F* .

Приклад 4.9. Нехай F — множина елементарних функцій. Тоді наступні вирази будуть формулами над F :

$$(x_1 \wedge x_2) \oplus (x_3 \Rightarrow \bar{x}_1);$$

$$\overline{(x_1 \downarrow x_3)} \Leftrightarrow x_2 | x_1.$$

Кожній формулі φ , побудованій за допомогою застосування скінченної кількості правил вигляду 1) – 2), можна поставити у відповідність булеву функцію f_φ , яку задає ця формула.

Приклад 4.10. Вказати номер булевої функції $f(x_1, x_2, x_3)$, яка задається формулою $(\bar{x}_3 | x_1) \oplus \overline{x_3 \Rightarrow (x_1 \downarrow x_2)}$.

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_3 x_1$	$x_1 \downarrow x_2$	$x_3 \Rightarrow (x_1 \downarrow x_2)$	$\overline{x_3 \Rightarrow (x_1 \downarrow x_2)}$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1	0

Тоді $N(\tilde{f}) = 2^7 + 2^6 + 2^5 = 224$.

При записі формул застосовують той самий пріоритет логічних операцій, що й у логіці висловлювань. Для спрощення запису будемо записувати кон'юнкцію $x \wedge y$ у вигляді xy . Крім того будемо вважати, що пріоритет операції додавання за модулем 2 нижчий за пріоритет кон'юнкції.

Дві формули φ та ψ назовемо *рівносильними (еквівалентними)*, якщо відповідні їм булеві функції f_φ та f_ψ рівні. Для формул зберігаються усі рівносильності логіки висловлювань. Крім того, операція додавання за модулем 2 має наступні властивості:

1. $x \oplus y = y \oplus x$;
2. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;
3. $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$;
4. $x \oplus 0 = x$;
5. $x \oplus 1 = \bar{x}$;
6. $x \oplus x = 0$;
7. $x \oplus y = \overline{x \Leftrightarrow y}$;
8. $x \oplus y = x\bar{y} \vee \bar{x}y$.

4.2.4. Двоїсті булеві функції

Функція $f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$ називається *двоїстою функцією* до булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$.

Очевидно, що таблиця для двоїстої функції (при фіксованому порядку наборів) отримується із таблиці функції $f(x_1, \dots, x_n)$ інвертуванням (тобто заміною 0 на 1 і навпаки) стовпця значень функції та його "перевертанням".

Приклад 4.11. Вказати двоїсті функції до функції $0, 1, x, \bar{x}, x \wedge y, x \vee y, x \Leftrightarrow y$.

Будемо розглядати усі функції прикладу як функції двох змінних. Тоді

x	y	0	0^*	1	1^*	x^*	$\bar{x}$	$\bar{x}^*$	xy	$(xy)^*$	$x \vee y$	$(x \vee y)^*$	$x \Leftrightarrow y$	$(x \Leftrightarrow y)^*$
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0

Як видно з попередньої таблиці

а) $0^* = 1$;

- б) $1^* = 0$;
- в) $x^* = x$;
- г) $\bar{x}^* = \bar{x}$;
- д) $(xy)^* = x \vee y$;
- е) $(x \vee y)^* = xy$;
- ж) $(x \Leftrightarrow y)^* = x \oplus y$.

Співвідношення а) – ж) також можна отримати безпосередньо на основі означення операції двоїстості. Наприклад, якщо $f(x, y) = xy$, то $f^*(x, y) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y})} = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = x \vee y$.

Теорема 4.3. Операція двоїстості має наступні властивості на множині P_2 :

- 1) якщо $g = f^*$, то $f = g^*$, тобто $(f^*)^* = f$ (властивість взаємності);
- 2) якщо $g(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$, то $g^* = f^*(f_1^*, \dots, f_m^*)$, (функція, двоїста до суперпозиції функцій, є суперпозицією двоїстих функцій).

Доведення.

- 1) Нехай $g(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$. Тоді

$$g^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} = \overline{\overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}} = f(x_1, \dots, x_n).$$

- 2) $g^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} = \overline{f(f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \dots, f_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n))} =$
 $= \overline{f(\overline{f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}, \dots, \overline{f_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)})} = f^*(\overline{f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}, \dots, \overline{f_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}) =$
 $= f^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^*(x_1, \dots, x_n)).$

Наслідком теореми 4.3 є *принцип двоїстості*: для того, щоб отримати двоїсту формулу до формули φ над множиною $\{0, 1, \bar{x}, x \wedge y, x \vee y\}$, треба у формулі φ всюди замінити 0 на 1, 1 на 0, $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$.

Приклад 4.12. Вказати формулу, яка є двоїстою до формули $(\bar{x} \vee 0 \vee x \wedge y) \wedge (y \wedge 1 \vee x \vee \bar{z})$.

$$((\bar{x} \vee 0 \vee x \wedge y) \wedge (y \wedge 1 \vee x \vee \bar{z}))^* = (\bar{x} \wedge 1 \wedge \bar{x} \vee y) \vee (y \vee 0 \wedge x \wedge \bar{z})$$

Приклад 4.13. Вказати двоїсту до функції $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee z) \oplus \bar{y}x$.

$$f^*(x, y, z) = ((\bar{x} \vee z) \oplus \bar{y}x)^* = (\bar{x} \vee z)^* \Leftrightarrow (\bar{y}x)^* = (\bar{x})^* z^* \Leftrightarrow (\bar{y})^* \vee x^* = \bar{x}z \Leftrightarrow \bar{y} \vee x$$

Якщо для БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ виконується умова $f^*(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$, то функція $f(x_1, \dots, x_n)$ називається *самодвоїстою*.

Приклад 4.14. Довести, що БФ $x \oplus y \oplus z$ є самодвоїстою.

$$(x \oplus y \oplus z)^* = (x \oplus y)^* \Leftrightarrow z^* = (x^* \Leftrightarrow y^*) \Leftrightarrow z = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = \overline{x \Leftrightarrow y} \oplus z = x \oplus y \oplus z.$$

4.3. Спеціальні форми подання булевих функцій

Постає питання, чи можна записати довільну булеву функцію у вигляді формули над множиною елементарних функцій?

4.3.1. Розклад булевих функцій за змінними

Нехай $\sigma \in \mathbb{Z}_2$. Уведемо позначення

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{якщо } \sigma = 0. \end{cases}$$

Легко переконатися, що

- 1) $x^\sigma = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma}$;
- 2) $x^\sigma = 1$ тоді і тільки тоді, коли $x = \sigma$.

Теорема 4.4 (про розклад булевої функції за однією змінною). Для довільної булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$ справджується співвідношення

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \bar{x}_n \wedge f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \vee x_n \wedge f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1). \quad (4.1)$$

Доведення. Розглянемо довільний булевий вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ і покажемо, що для нього ліва та права частини (4.1) приймають однакові значення.

Якщо $\alpha_n = 0$, то ліва частина (1) рівна $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$, а права —

$$\bar{0} \wedge f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) \vee 0 \wedge f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0).$$

Якщо $\alpha_n = 1$, то ліва частина (4.1) рівна $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$, а права —

$$\bar{1} \wedge f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0) \vee 1 \wedge f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1).$$

В обох випадках (4.1) справджується. Теорему доведено.

Шляхом багаторазового застосування теореми 4 можна отримати *теорему про розклад БФ за змінними*.

Теорема 4.5. Для довільної булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$ і довільного k ($1 \leq k \leq n$) справджується співвідношення

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathbb{Z}_2^k} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_k^{\sigma_k} \wedge f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \quad (4.2)$$

де диз'юнкція береться по усім двійковим наборам довжини k .

Приклад 4.15. Розкласти БФ $f(x, y, z) = x \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow x) \oplus z)$ за змінними

а) y ;

б) x та z .

а) Запишемо розклад за змінною y :

$$f(x, y, z) = \bar{y} f(x, 0, z) \vee y f(x, 1, z).$$

$$\begin{aligned} f(x, 0, z) &= x \downarrow ((\bar{0} \Rightarrow x) \oplus z) = x \downarrow ((1 \Rightarrow x) \oplus z) = x \downarrow ((\bar{1} \vee x) \oplus z) = \overline{x \vee (x \oplus z)} = \\ &= \bar{x} \wedge \overline{x \oplus z} = \bar{x} (x \Leftrightarrow z) = \bar{x} (\bar{x} \bar{z} \vee xz) = \bar{x} \bar{x} \bar{z} \vee \bar{x} xz = \bar{x} \bar{z} \vee 0 = \bar{x} \bar{z}. \end{aligned}$$

$$f(x, 1, z) = x \downarrow ((\bar{1} \Rightarrow x) \oplus z) = x \downarrow ((0 \Rightarrow x) \oplus z) = x \downarrow (1 \oplus z) = x \downarrow \bar{z} = \overline{x \vee \bar{z}} = \bar{x} z.$$

$$\text{Тому } f(x, y, z) = \bar{y} \bar{x} \bar{z} \vee y \bar{x} z = \bar{x} (\bar{y} \bar{z} \vee y z).$$

б) Проведемо розклад за змінними x та z :

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{z} f(0, y, 0) \vee \bar{x} z f(0, y, 1) \vee x \bar{z} f(1, y, 0) \vee x z f(1, y, 1).$$

$$f(0, y, 0) = 0 \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow 0) \oplus 0) = 0 \downarrow (y \oplus 0) = 0 \downarrow y = \overline{0 \vee y} = \bar{y}.$$

$$f(0, y, 1) = 0 \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow 0) \oplus 1) = 0 \downarrow (y \oplus 1) = 0 \downarrow \bar{y} = \overline{0 \vee \bar{y}} = y.$$

$$f(1, y, 0) = 1 \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow 1) \oplus 0) = 1 \downarrow (1 \oplus 0) = 1 \downarrow 1 = 0.$$

$$f(1, y, 1) = 1 \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow 1) \oplus 1) = 1 \downarrow (y \oplus 1) = 1 \downarrow \bar{y} = \overline{1 \vee \bar{y}} = \bar{1} = 0.$$

Тому

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{z} \bar{y} \vee \bar{x} z y \vee x \bar{z} 0 \vee x z 0 = \bar{x} \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} y z.$$

Нехай $T(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = 1\}$. Застосовуючи (2) у випадку $k = n$, отримуємо *теорему про розклад БФ за усіма змінними*.

Теорема 4.6. Для довільної булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$, такої, що $f \neq 0$, справджується співвідношення

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in T(f)} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Теорема 4.4–4.6 є теоремами про "диз'юнктивний розклад". Має місце теорема про «кон'юнктивний розклад».

Теорема 4.7. Для довільної булевої функції $f(x_1, \dots, x_n)$ і довільного k ($1 \leq k \leq n$) справджується співвідношення

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathbb{Z}_2^k} (x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_k^{\sigma_k} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)), \quad (6.3)$$

де кон'юнкція береться по усім двійковим наборам довжини k .

Доведення випливає із теореми 4.5 та принципу двоїстості.

Приклад 4.16. Провести "кон'юнктивний розклад" булевої функції $f(x, y, z) = x \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow x) \oplus z)$ за змінними x та z .

За формулою (3) маємо

$$f(x, y, z) = (x \vee z \vee f(0, y, 0))(x \vee \bar{z} \vee f(0, y, 1))(\bar{x} \vee z \vee f(1, y, 0))(\bar{x} \vee \bar{z} \vee f(1, y, 1))$$

.

$$\begin{aligned} \text{Тому } f(x, y, z) &= (x \vee z \vee \bar{y})(x \vee \bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee z \vee 0)(\bar{x} \vee \bar{z} \vee 0) = \\ &= (x \vee z \vee \bar{y})(x \vee \bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z}). \end{aligned}$$

4.3.2. Нормальні форми булевих функцій

Нехай $\{x_1, \dots, x_n\}$ — фіксований набір (алфавіт) змінних.

Формула $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r}^{\sigma_r}$, де $r \geq 1$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$, $\sigma_j \in \mathbb{Z}_2$, $j = \overline{1, r}$, називається *елементарною кон'юнкцією*, побудованою із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$. Кількість змінних, які входять в елементарну кон'юнкцію, називається її *рангом*.

Формула $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$, де $r \geq 1$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$, $\sigma_j \in \mathbb{Z}_2$, $j = \overline{1, r}$, називається *елементарною диз'юнкцією рангу r* , побудованою із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Приклад 4.17. Формула $x_1 \bar{x}_4 x_5$ — елементарна кон'юнкція рангу 3. Формула $\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_6$ — елементарна диз'юнкція рангу 4. Формули $x_1 x_2 \bar{x}_1 x_3$ та $x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$ не є ні елементарними кон'юнкціями, ні елементарними диз'юнкціями.

Теорема 4.8. Із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$ можна побудувати $2^n - 1$ різних елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій).

Доведення. Для кожної із змінних x_i ($i = \overline{1, n}$) можливим є один із трьох випадків щодо її входження у елементарну кон'юнкцію K :

а) змінна взагалі не входить у кон'юнкцію;

- b) змінна входить у кон'юнкцію із запереченням;
- c) змінна входить у кон'юнкцію без заперечення.

Тому за комбінаторним правилом множення існує 3^n способів вибору змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$ у елементарні кон'юнкції. Відкинувши той спосіб, при якому жодна із змінних не входить у кон'юнкцію, отримаємо твердження теореми про число елементарних кон'юнкцій. Твердження про кількість елементарних диз'юнкцій можна отримати із використанням принципу двоїстості.

Задача 4.7. Підрахувати кількість різних ДНФ, які можна побудувати із елементарних диз'юнкцій рангу r , які можна побудувати із n змінних.

Вираз $K_1 \vee \dots \vee K_s$, де K_i — елементарна кон'юнкція, $K_i \neq K_j$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, s}$, називається *диз'юнктивною нормальною формою* (ДНФ), побудованою із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Вираз $D_1 \wedge \dots \wedge D_s$, де D_i — елементарна диз'юнкція, $D_i \neq D_j$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, s}$, називається *кон'юнктивною нормальною формою* (КНФ), побудованою із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Приклад 4.18. Формула $\bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$ — ДНФ, побудована із змінних x_1, x_2, x_3, x_4 , формула $(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ — КНФ, побудована із тих самих змінних. Формула $x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 x_2$ не є ДНФ (у неї входять дві однакові елементарні кон'юнкції).

Теорема 4.9. Із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$ можна побудувати $2^{3^n-1} - 1$ різних ДНФ (КНФ).

Доведення. Кожна з $3^n - 1$ елементарних кон'юнкцій може входити або не входити у ДНФ. Тому існує 2^{3^n-1} різних способів вибору кон'юнкцій. Відкинувши той спосіб, при якому жодна кон'юнкція не вибрана, отримаємо твердження теореми.

Теорема 4.10. Для кожної відмінної від 0 (1) n -місної БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ існує рівносильна їй ДНФ (КНФ).

Алгоритм побудови ДНФ (КНФ) формули над множиною елементарних функцій

1. За допомогою рівносильних перетворень позбавитися від операцій $\oplus, \Leftrightarrow, \Rightarrow$.
2. За допомогою рівносильностей де Моргана віднести заперечення до окремих змінних.

3. Відкрити (увести) дужки то звести подібні доданки з використанням законів ідемпотентності, несуперечності, виключення третього та властивостей булевих констант.

Приклад 4.19. Побудувати ДНФ та КНФ БФ $\overline{(xy \oplus \bar{z})} | (\bar{z} \vee zx) \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x})$ методом рівносильних перетворень.

а) Будуємо ДНФ:

$$\begin{aligned} \overline{(xy \oplus \bar{z})} | (\bar{z} \vee zx) \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x}) &= ((xy \oplus \bar{z}) | (\bar{z} \vee zx)) \vee (\bar{z} \vee \bar{x}) = ((xyz \vee \bar{x}y\bar{z}) | (\bar{z} \vee x)) \vee zx = \\ &= ((xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}) | (\bar{z} \vee x)) \vee zx = \overline{(xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z})} \wedge (\bar{z} \vee x) \vee zx = \overline{xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}} \vee \overline{\bar{z} \vee x} \vee \\ &\vee zx = \overline{xyz} \wedge \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}} \vee \overline{\bar{z} \vee x} \vee zx = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (xy \vee z) \vee z(\bar{x} \vee x) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})xy \vee \\ &\vee (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})z \vee z = \bar{x}xy \vee \bar{y}xy \vee \bar{z}xy \vee z = \bar{z}xy \vee z = xy \vee z. \end{aligned}$$

б) Будуємо КНФ:

$$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$$

Приклад 4.20. Побудувати КНФ функції $x\bar{z} \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}z$.

$$x\bar{z} \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}z = x(\bar{z} \vee \bar{y}z) \vee \bar{x}z = x(\bar{z} \vee \bar{y}) \vee \bar{x}z = (x \vee \bar{x}z)(\bar{z} \vee \bar{y}) = (x \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

4.3.3. Досконалі нормальні форми

Елементарна кон'юнкція (диз'юнкція), побудована із змінних $x_1, \dots, x_n$, називається *повною*, якщо її ранг рівний n .

Повна елементарна кон'юнкція $x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$ ($\sigma_i \in \mathbb{Z}_2, i = \overline{1, n}$) приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли $x_1 = \sigma_1, \dots, x_n = \sigma_n$.

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ), побудованою із змінних $x_1, \dots, x_n$, називається диз'юнкція деякого числа різних між собою повних елементарних кон'юнкцій, побудованих із цих змінних.

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ), побудованою із змінних $x_1, \dots, x_n$, називається кон'юнкція деякого числа різних між собою повних елементарних диз'юнкцій, побудованих із цих змінних.

Приклад 4.21. $xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$ — ДДНФ, побудована із змінних $\{x, y, z\}$,
 $(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)$ — ДКНФ, побудована із тих самих змінних.

Теорема 4.11. Із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$ можна побудувати $2^{2^n} - 1$ різних ДДНФ (ДКНФ).

Доведення самостійно.

Теорема 4.12. Для кожної відмінної від 0 (1) n -місної БФ $f(x_1, \dots, x_n)$ існує єдина рівносильна їй ДДНФ (ДКНФ).

Доведення. Нехай $f \neq 0$. Скористаємося теоремою 4.6 про розклад БФ за усіма змінними:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in T(f)} x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Права частина рівності містить диз'юнкцію повних елементарних кон'юнкцій, тобто ДДНФ. Тому для кожної БФ, відмінної від 0, існує принаймні одна ДДНФ. Єдиність ДДНФ для кожної БФ випливає з того, що згідно з теоремою 2 та теоремою 4.11 кількість n -місних БФ рівна кількості різних ДДНФ, які можна побудувати із n змінних.

Наслідок. Довільну БФ можна записати у вигляді формули над системою функцій $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Розглянемо два методи побудови ДДНФ (ДКНФ).

1) Метод рівносильних перетворень:

а) За допомогою рівносильних перетворень будується ДНФ (КНФ) БФ, заданої формулою.

б) Проводиться *поповнення* неповних елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій) за допомогою формул:

$$\text{I) } K = K \wedge 1 = K \wedge (x \vee \bar{x}) = Kx \vee K\bar{x}.$$

$$\text{II) } D = D \vee 0 = D \vee x\bar{x} = (D \vee x)(D \vee \bar{x}).$$

в) Записується диз'юнкція *різних* елементарних кон'юнкцій, отриманих на попередньому етапі (кон'юнкція елементарних диз'юнкцій), яка і шуканою ДДНФ (ДКНФ).

2) Табличний метод:

а) Будується таблиця значень БФ.

б) Відмічаються набори $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, на яких функція приймає значення 1 (0).

в) Кожному такому набору ставиться у відповідність *повна* елементарна кон'юнкція $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ (елементарна диз'юнкція $x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$).

г) Записується диз'юнкція елементарних кон'юнкцій, отриманих на попередньому етапі (кон'юнкція елементарних диз'юнкцій), яка і є шуканою ДДНФ (ДКНФ).

Приклад 4.22. Побудувати ДДНФ та ДКНФ булевої функції $f(x, y, z) = \overline{(xy \oplus \bar{z})} | (\bar{z} \vee zx) \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x})$ (функції прикладу 4.19) з використанням табличного методу та методу рівносильних перетворень.

1) Використаємо табличний метод.

Побудуємо таблицю значень функції $f(x, y, z)$.

x	y	z	xy	$\bar{z}$	$xy \oplus \bar{z}$	zx	$\bar{z} \vee zx$	$(xy \oplus \bar{z}) (\bar{z} \vee zx)$	$\overline{(xy \oplus \bar{z}) (\bar{z} \vee zx)}$	$\bar{x}$	$\bar{z} \downarrow \bar{x}$	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1

Для побудови ДДНФ відмічаємо 2-й, 4-й, 6-й, 7-й та 8-ий набори.

Записуємо відповідні повні елементарні кон'юнкції:

$$x^0 y^0 z^1 = \bar{x} \bar{y} z, \quad x^0 y^1 z^1 = \bar{x} y z, \quad x^1 y^0 z^1 = x \bar{y} z, \quad x^1 y^1 z^0 = xy \bar{z}, \\ x^1 y^1 z^1 = xyz.$$

Записуємо ДДНФ:

$$\bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} z \vee xy \bar{z} \vee xyz.$$

Для побудови ДКНФ відмічаємо 1-й, 3-й та 5-й набори та записуємо відповідні елементарні диз'юнкції:

$$x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}} = x^1 \vee y^1 \vee z^1 = x \vee y \vee z, \quad x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}} = x^1 \vee y^0 \vee z^1 = x \vee \bar{y} \vee z, \\ x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}} = \bar{x} \vee y \vee z.$$

Записуємо ДКНФ:

$$(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z).$$

2) Після спрощень отримаємо запис функції за допомогою ДНФ $f(x, y, z) = xy \vee z$ (див. приклад 4.19).

Проведемо поповнення елементарних кон'юнкцій:

$$xy = xy \wedge 1 = xy(z \vee \bar{z}) = xyz \vee xy \bar{z}.$$

$$z = (x \vee \bar{x})z = xz \vee \bar{x}z = x(y \vee \bar{y})z \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})z = xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z$$

Записуємо ДДНФ:

$$xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z.$$

Для знаходження ДКНФ використаємо КНФ $(x \vee z)(y \vee z)$ функції $f(x, y, z)$.

Проведемо поповнення елементарних диз'юнкцій:

$$x \vee z = x \vee z \vee 0 = x \vee z \vee y\bar{y} = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z).$$

$$y \vee z = y \vee z \vee x\bar{x} = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z).$$

Записуємо ДКНФ:

$$(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z).$$

4.3.4. Поліноми Жегалкіна

Поліномом (многочленом) Жегалкіна називається вираз вигляду

$$\tilde{K}_0 \oplus \tilde{K}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{K}_m,$$

де $\tilde{K}_0 \in \mathbb{Z}_2$, $\tilde{K}_i$ — різні елементарні кон'юнкції, які не містять заперечення змінних, $i = \overline{1, m}$.

Степенем полінома Жегалкіна називається максимальний із рангів елементарних кон'юнкцій, які входять у поліном.

Приклад 4.23. $1 \oplus y \oplus xz \oplus xyz$ — поліном Жегалкіна 3-го степеня.

Алгоритм побудови полінома Жегалкіна БФ $f(x_1, \dots, x_n)$.

1. Побудувати ДДНФ $K_1 \vee \dots \vee K_s$ функції $f(x_1, \dots, x_n)$, де K_i — повні елементарні кон'юнкції, побудовані із змінних $\{x_1, \dots, x_n\}$.
2. Замінити формулу $K_1 \vee \dots \vee K_s$ рівносильною їй формулою $K_1 \oplus \dots \oplus K_s$.
3. Для кожної змінної x_i виконати заміну $\bar{x}_i$ на $x_i \oplus 1$, $i = \overline{1, n}$.
4. Розкрити дужки та звести подібні доданки з використанням рівносильності $x \oplus x = 0$.

Обґрунтування алгоритму. Пояснення потребує лише другий крок алгоритму, оскільки для довільних БФ $f, g \in P_2$ $f \vee g \neq f \oplus g$. Покажемо, що

для довільних різних повних елементарних кон'юнкцій K_1, K_2 та довільного $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ $K_1(\tilde{\alpha}) \vee K_2(\tilde{\alpha}) = K_1(\tilde{\alpha}) \oplus K_2(\tilde{\alpha})$.

Оскільки кожна повна елементарна кон'юнкція приймає значення 1 лише на одному наборі, то неможливим є одночасне виконання рівностей $K_1(\tilde{\alpha}) = 1$, $K_2(\tilde{\alpha}) = 1$.

Якщо $K_1(\tilde{\alpha}) = K_2(\tilde{\alpha}) = 0$, то $K_1(\tilde{\alpha}) \vee K_2(\tilde{\alpha}) = 0 \vee 0 = 0 \oplus 0 = K_1(\tilde{\alpha}) \oplus K_2(\tilde{\alpha})$.

Якщо $K_1(\tilde{\alpha}) = 1$ та $K_2(\tilde{\alpha}) = 0$, то $K_1(\tilde{\alpha}) \vee K_2(\tilde{\alpha}) = 1 \vee 0 = 1 \oplus 0 = K_1(\tilde{\alpha}) \oplus K_2(\tilde{\alpha})$.

Випадок $K_1(\tilde{\alpha}) = 0$, $K_2(\tilde{\alpha}) = 1$ аналізується аналогічно.

Теорема 4.13. Для кожної БФ $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ існує єдиний рівносильний їй поліном Жегалкіна.

Доведення. Існування полінома Жегалкіна для довільної БФ впливає з можливості застосування вищенаведеного алгоритму до довільної БФ, відмінної від нуля (якщо $f \equiv 0$, то 0 — поліном Жегалкіна функції f). Єдиність впливає із того, що кількість різних поліномів Жегалкіна, які можна побудувати із n змінних, рівна 2^{2^n} , і це число співпадає із кількістю різних n -місних БФ.

Приклад 4.24. Побудувати поліном Жегалкіна наступної булевої функції $f(x, y, z) = (\overline{xy \oplus \bar{z}}) | (\bar{z} \vee zx) \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x})$.

Запишемо ДДНФ $f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} z \vee x y \bar{z} \vee x y z$

Замінімо " $\oplus$ " на " $\vee$ ": $f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} z \oplus \bar{x} y z \oplus x \bar{y} z \oplus x y \bar{z} \oplus x y z$.

Замінімо $\bar{x}$ на $x \oplus 1$:

$f(x, y, z) = (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy(z \oplus 1) \oplus xyz$.

Виконуємо спрощення

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x \oplus 1)((y \oplus 1)z \oplus yz) \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy(z \oplus 1 \oplus z) = \\ &= (x \oplus 1)(yz \oplus z \oplus yz) \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy = (x \oplus 1)z \oplus xyz \oplus xz \oplus xy = \\ &= xz \oplus z \oplus xyz \oplus xz \oplus xy = xyz \oplus xy \oplus z. \end{aligned}$$

Задача 4.8. Знайти поліном Жегалкіна функції $f(x_1, \dots, x_n)$, для якої виконується умова $T(f) = \mathbb{Z}_2^n \setminus \{(0, 1, \dots, 1), (1, 1, \dots, 1)\}$.

4.4. Застосування булевих функцій в теорії контактних та логічних схем

4.4.1. Контактні схеми

Під *мережею* будемо розуміти деякий скінченний набір *вершин*, між деякими парами з яких встановлені *зв'язки*.

Будемо вважати, що у множині вершин мережі виділено спеціальні вершини, які називаються *полюсами*.

Під *контактною схемою* будемо розуміти мережу із двома полюсами (джерелом та стоком), ребра (зв'язки) якої називаються *контактами* і помічені змінними $x_1, \dots, x_n$ або їх запереченнями.

Якщо контакт помічений змінною без заперечення, то він називається *замикальним*, у протилежному випадку — *відмикальним*. Приклади контактних схем наведено на рис. 4.1.

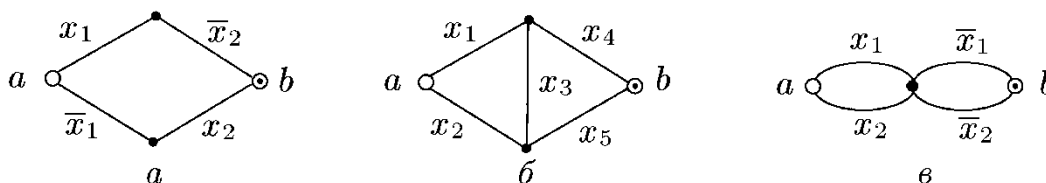


Рис. 4.1. Контактні схеми

Функція $f(\tilde{x}) = \bigvee_{[a,b]} K_{[a,b]}$, де диз'юнкція береться по усім простим шляхам

(які не містять кратні вершини) від входу a до виходу b , називається *функцією провідності контактної схеми*.

Приклад 4.25. Вказати функції провідності схем, наведених на рис. 4.1.

а) $f(\tilde{x}) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$;

б) $f(\tilde{x}) = x_1 x_4 \vee x_1 x_3 x_5 \vee x_2 x_5 \vee x_2 x_3 x_4$;

в) $f(\tilde{x}) = x_1 \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_1 \vee x_2 \bar{x}_2 = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$.

Часто при зображенні контактних схем використовуються провідники та ключі-перемикачі, які ставляться у відповідність кожній змінній. При цьому послідовне з'єднання провідників відповідає кон'юнкції (рис. 4.2), а паралельне з'єднання — диз'юнкції (рис. 4.3).

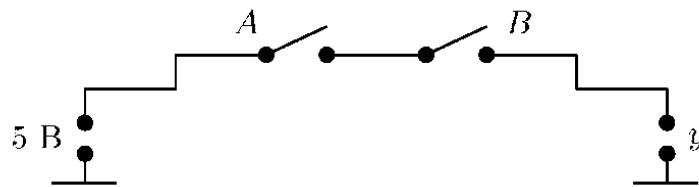


Рис. 4.2. Послідовні ключі

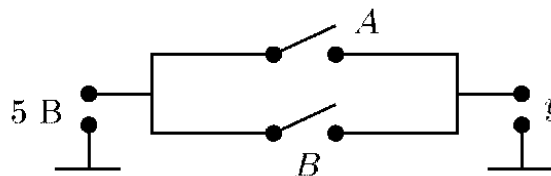


Рис. 4.3. Паралельні ключі

Для фізичної реалізації заперечення використовується реле з розмикальним контактом, схема якого наведена на рис. 4.4.

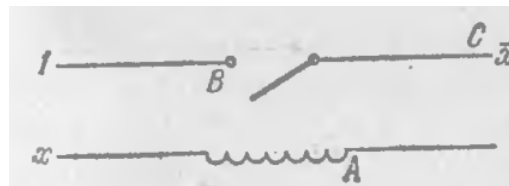


Рис. 4.4. Реле з розмикальним контактом

Якщо по обвитці A струм не проходить ($x = 0$), то пружина відтягує контакт B уверх і ланцюг замикається. Якщо ($x = 1$), то контакт B притягується і на виході C струму нема.

Складністю контактної схеми називається кількість контактів схеми. Так, наприклад, контактні схеми, зображені на рис. 4.1 а та рис. 4.1 в, мають складність 4, а контактна схема з рис. 4.1 б має складність 5.

Приклад 4.26. Для функції $x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ побудувати контактну схему, яка реалізує цю функцію та має мінімальну складність (3).

Спростимо функцію провідності схеми.

$$\begin{aligned} x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 &= (x_1 \vee \bar{x}_1x_2)\bar{x}_3 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)\bar{x}_3 \vee x_2x_3 = x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3 = \\ &= x_1\bar{x}_3 \vee x_2(\bar{x}_3 \vee x_3) = x_1\bar{x}_3 \vee x_2. \end{aligned}$$

Отримана формула суттєво залежить від трьох змінних. Тому складність відповідної цій функції контактної схеми не може бути меншою за 3. Контактна схема складності 3 зображена на рис. 4.5.

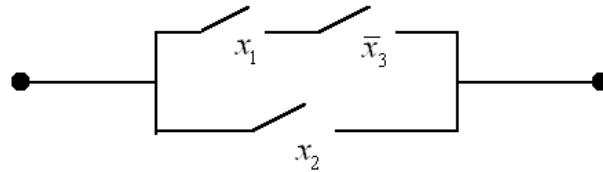


Рис. 4.5. Контактна схема

Приклад 4.27. Побудувати якомога простішу контактну схему, функція провідності якої залежить від трьох змінних і має номер 220.

$$220 = 128 + 64 + 28 = 128 + 64 + 16 + 12 = 128 + 64 + 16 + 8 + 4 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2.$$

Звідси отримуємо вектор значень функції $\tilde{f} = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$, на основі якого будуємо таблицю значень функції $f(x_1, x_2, x_3)$.

Запишемо ДКНФ функції $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Проведемо спрощення:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) = \bar{x}_2 \vee (x_1 \vee x_3)\bar{x}_1 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3.$$

Зобразимо відповідну контактну схему:

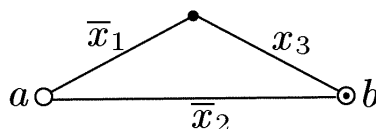


Рис. 4.6. Контактна схема до прикладу 4.27

Приклад 4.28. Комітет складається із чотирьох учасників. Рішення виноситься більшістю голосів. У випадку рівності голосів рішення приймається, якщо голова комітету "голосує за". Побудувати контактну схему так, щоб при голосуванні кожний натискав би на кнопку і у випадку прийняття рішення загоралася би сигнальна лампа.

Поставимо у відповідність кожному члену комісії булеву змінну x_i таким чином, щоб $x_i = 1$ тоді і тільки тоді, якщо i -й член комітету "голосує за", $i = 1, 2, 3, 4$ (голові комітету відповідає змінна x_1). Розглянемо БФ $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, яка приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли комітет приймає рішення. Легко бачити, що $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2x_3x_4$. Схема наведена на рис. 4.7.

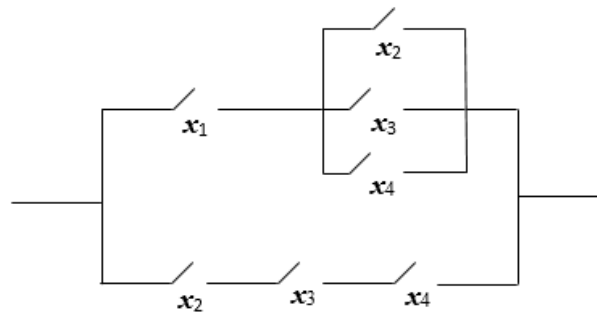


Рис. 4.7.

4.4.2. Схеми із логічних елементів

Логічні схеми у комп'ютерах та інших електронних пристроях оперують з наборами вхідних та вихідних даних, що складаються з нулів та одиниць. Булеві функції використовуються для *аналізу* та *синтезу* логічних схем.

Логічний елемент — пристрій, який реалізовує деяку булеву функцію. Його входи відповідають булевим змінним, а виходи — значенню функції. Найбільш вживані логічні елементи наведені на рис. 4.8.

Логічна схема будується з логічних елементів і зображає суперпозицію цих елементів. *Складністю логічної схеми* називається кількість логічних елементів, які входять у схему.

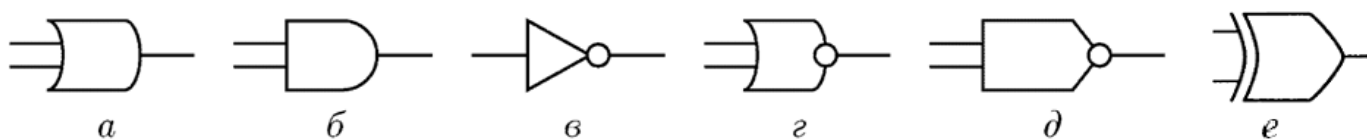


Рис. 4.8. Зображення логічних елементів в стандарті ISO

а) диз'юнктор; б) кон'юнктор; в) інвертор; г) стрілка Пірса; д) штрих Шеффера; е) суматор за mod 2

За наслідком до теореми 4.12 будь-яку булеву функцію можна записати у вигляді формули над системою $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Тому довільну булеву функцію можна реалізувати схемою з інверторів, кон'юнкторів та диз'юнкторів.

Оскільки

$$\bar{x} = x \downarrow x, \quad xy = \bar{x} \downarrow \bar{y} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y), \quad x \vee y = \overline{\bar{x} \downarrow \bar{y}} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y),$$

то будь-яку БФ можна реалізувати за допомогою схеми, яка містить лише елементи, які реалізують стрілку Пірса.

Приклад 4.29. Побудувати схему, яка реалізує функцію $f(x, y, z) = (x \vee y)z$.

Відповідна схема складності 2 зображена на рис. 4.9.

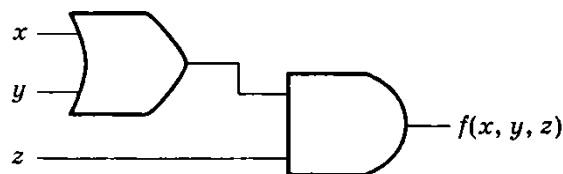


Рис. 4.9. Логічна схема для функції $f(x, y, z) = (x \vee y)z$

Приклад 4.30. Реалізувати функцію $f(x, y, z) = \overline{(xy \oplus \bar{z})} | (\bar{z} \vee zx) \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x})$ (функція прикладу 4.24) за допомогою логічної схеми із кон'юнкторів та суматорів за модулем 2.

Задача 4.9. Підрахувати кількість n -місних БФ, які можна реалізувати схемами, побудованими із кон'юнкторів та суматорів за модулем 2.

У теорії логічних схем розглядаються дві основні задачі: аналіз та синтез.

Аналіз логічної схеми полягає у побудові булевої функції, яку реалізує даний логічний пристрій (схема). За даною логічною схемою можна побудувати формулу, що відповідає шуканій функції або вказати значення функції для всіх наборів вхідних даних.

Приклад 4.31. Проаналізувати логічну схему, наведену на рис. 4.10.

x_1	x_2	$x_1 + x_2$	f_1	f_2
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	2	1	0

$$f_1 = x_1 x_2, \quad f_2 = x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \vee x_1 x_2$$

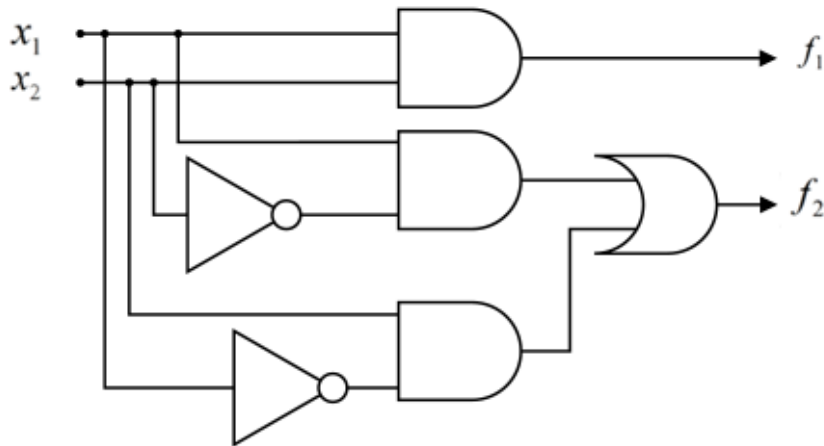


Рис. 4.12. Схема до прикладу 4.33

4.5. Задачі до четвертого розділу

Булеві вектори

- Вказати номер та норму Хеммінга булевого вектора
 - $\mathbf{x} = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$.
 - $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$.
- Знайти $d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, якщо
 - $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^7$, $N(\mathbf{x}) = 49$, $\mathbf{y} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{z} = \bar{\mathbf{x}} \vee \mathbf{y}$.
 - $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^7$, $N(\mathbf{y}) = 101$, $\mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus \bar{\mathbf{y}}$.
- Обчислити
 - $(\bar{\mathbf{y}} \lll 4) \oplus (\mathbf{x} \gg \|\mathbf{y}\|)$, де $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^8$, $N(\mathbf{y}) = 112$, $\mathbf{x} = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$.
 - $(\mathbf{y} \ggg 5) \wedge (\bar{\mathbf{x}} \ll \|\mathbf{y}\|)$, де $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^8$, $N(\mathbf{x}) = 59$, $\mathbf{y} = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$.

Булеві функції

- Побудувати таблицю значень булевих функцій $f(x, y, z)$ і $f^*(x, y, z)$ та вказати їх номери, якщо
 - $f(x, y, z) = x | (\bar{y} \downarrow z) \oplus (z \Rightarrow \bar{x})$.

- б) $f(x, y, z) = (\bar{x} \downarrow (z \vee \bar{y})) \Leftrightarrow (z \mid \bar{y})$.
2. Вказати суттєві та видалити фіктивні змінні функції $f(x_1, x_2, x_3)$, якщо
- а) $N(\tilde{f}) = 250$.
- б) $N(\tilde{f}) = 153$.
3. Перевірити, чи є самодійсною булева функція $f(x, y, z)$, якщо
- а) $f(x, y, z) = (x \oplus \bar{y}) \Leftrightarrow z$.
- б) $f(x, y, z) = (\bar{x} \mid (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x\bar{z}) \downarrow y)$.
4. Знайти номер функції $f^*(x, y, z)$, якщо
- а) $f(x, y, z) = (\bar{x} \downarrow z) \oplus y$.
- б) $f(x, y, z) = (\bar{y} \Leftrightarrow z) \mid \overline{x \downarrow \bar{z}}$.
5. Задати функцію $f(x, y, z)$ формулою над множиною функцій $\{\neg, \vee, \wedge\}$, якщо
- а) $f(x, y, z) = \overline{z \Rightarrow (\bar{x} \downarrow y)} \Rightarrow (\bar{z} \oplus (\bar{z} \mid x))$.
- б) $f(x, y, z) = (xy \Leftrightarrow \bar{z}) \downarrow (\bar{x} \mid (\bar{y} \oplus z))$.
6. Задати функцію $f^*(x, y, z, t)$ формулою над множиною функцій $\{\neg, \vee, \wedge\}$, якщо
- а) $f(x, y, z, t) = \overline{xy \vee \bar{z}} (yt \Rightarrow \bar{z}) \vee (\bar{z} \oplus t)$.
- б) $f(x, y, z, t) = (x \oplus \bar{y}t)(zt \Rightarrow \bar{x}) \vee (x\bar{y} \downarrow \bar{z})$.

Спеціальні форми подання БФ

1. Розкласти булеву функцію $f(x, y, z)$ за змінними x та y :
- а) $f(x, y, z) = \overline{z \Rightarrow (\bar{x} \downarrow y)} \Rightarrow (\bar{z} \oplus (\bar{z} \mid x))$;
- б) $f(x, y, z) = (xy \Leftrightarrow \bar{z}) \downarrow (\bar{x} \mid (\bar{y} \oplus z))$.
2. Побудувати ДНФ булевої функції $f(x, y, z)$ методом рівносильних перетворень:
- а) $f(x, y, z) = (yz \Rightarrow (\bar{x} \downarrow z)) \mid (x \oplus \bar{z})$;
- б) $f(x, y, z) = (y \vee \bar{x} \Leftrightarrow z) \mid (\bar{x} \downarrow (\bar{y} \oplus z))$.
3. Побудувати КНФ булевої функції $f(x, y, z)$ методом рівносильних перетворень:
- а) $f(x, y, z) = (y \vee \bar{x} \Leftrightarrow z) \mid (\bar{x} \downarrow (\bar{y} \oplus z))$;
- б) $f(x, y, z) = (yz \Rightarrow (\bar{x} \downarrow z)) \mid (x \oplus \bar{z})$.

4. За таблицею значень булевої функції $f(x, y, z)$ побудувати її ДДНФ та ДКНФ.

а) $f(x, y, z) = \overline{z} \oplus (\overline{x} \downarrow z) \Rightarrow ((x \Leftrightarrow \overline{y}) | z);$

б) $f(x, y, z) = (z \downarrow (\overline{x} \oplus y)) \overline{z} \Leftrightarrow (z | \overline{x}).$

5. Побудувати ДДНФ та ДКНФ булевої функції $f(x, y, z)$ методом рівносильних перетворень:

а) $f(x, y, z) = \overline{z} \oplus (\overline{x} \downarrow z) \Rightarrow ((x \Leftrightarrow \overline{y}) | z);$

б) $f(x, y, z) = (z \downarrow (\overline{x} \oplus y)) \overline{z} \Leftrightarrow (z | \overline{x}).$

6. Побудувати поліном Жегалкіна булевої функції $f(x, y, z)$, якщо

а) $f(x, y, z) = \overline{z} \oplus (\overline{x} \downarrow z) \Rightarrow ((x \Leftrightarrow \overline{y}) | z);$

б) $f(x, y, z) = (z \downarrow (\overline{x} \oplus y)) \overline{z} \Leftrightarrow (z | \overline{x}).$

Основні поняття теорії логічних та контактних схем

1. Вказати функції провідності контактних схем, наведених на рис. 4.13, 4.14:

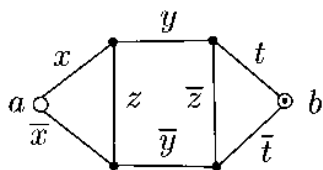


Рис. 4.13

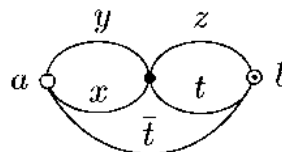


Рис. 4.14

2. Вказати функції провідності логічних схем, наведених на рис. 4.15, 4.16.

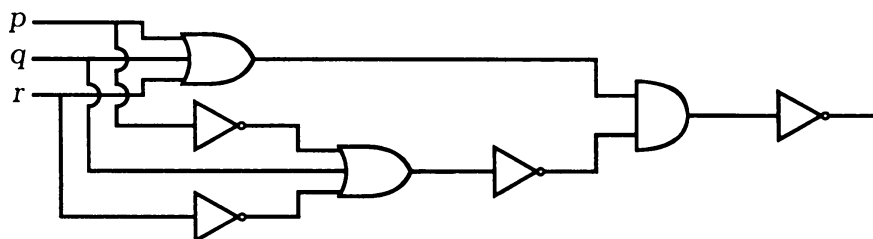


Рис. 4.15

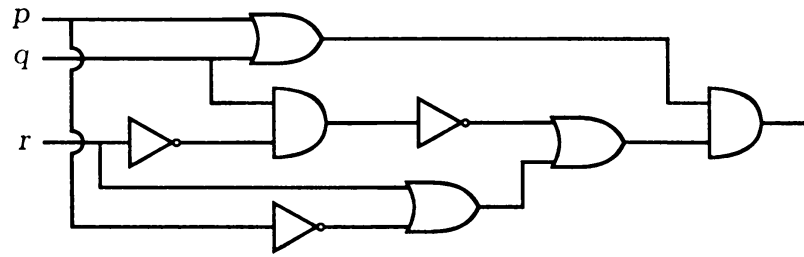


Рис. 4.16

3. Спростити логічні схеми, наведені на рис. 4.17–6.19

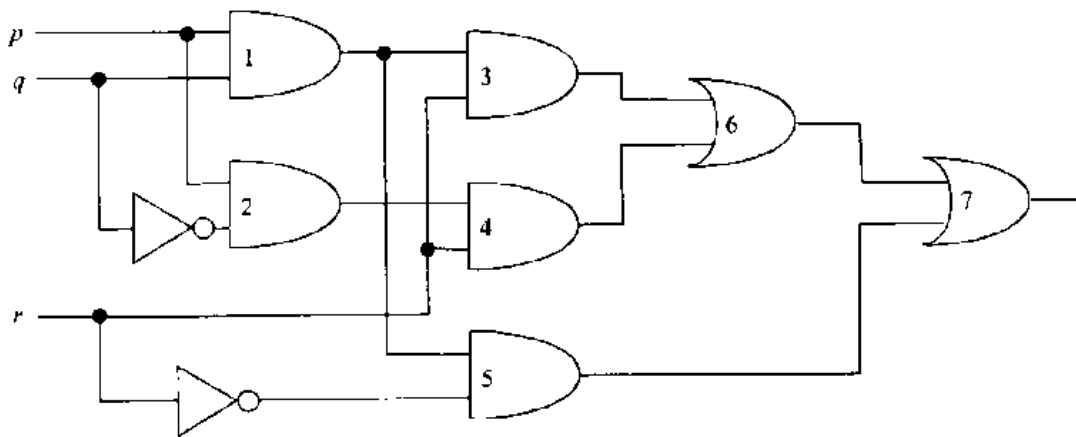


Рис. 4.17

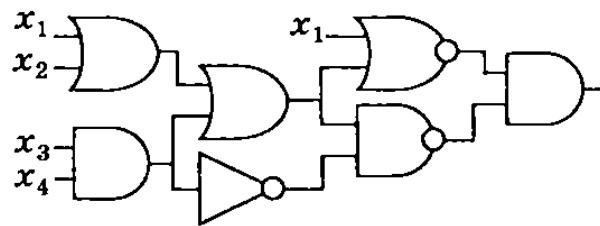


Рис. 4.18

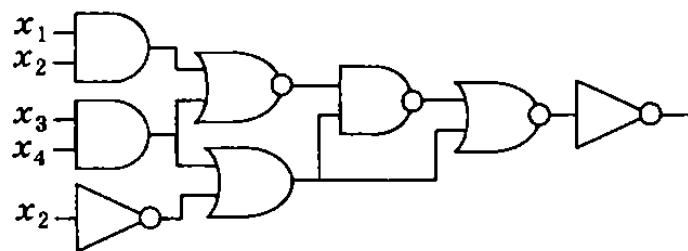


Рис. 4.19

4. Спростити контактні схеми, зображені на рис. 4.20–6.23.

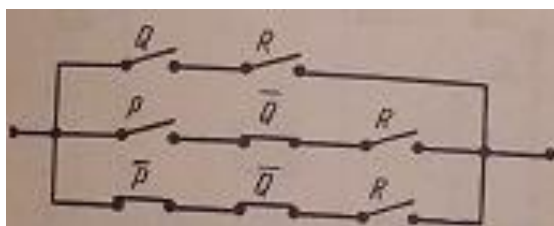


Рис. 4.20

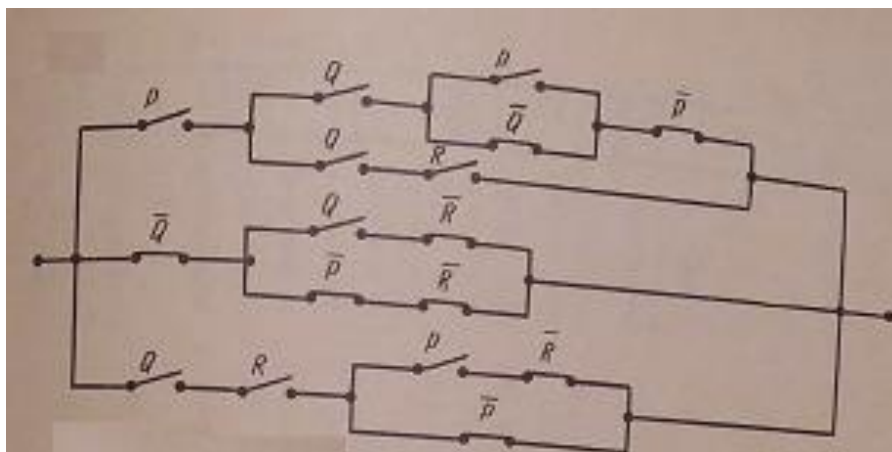


Рис. 4.21

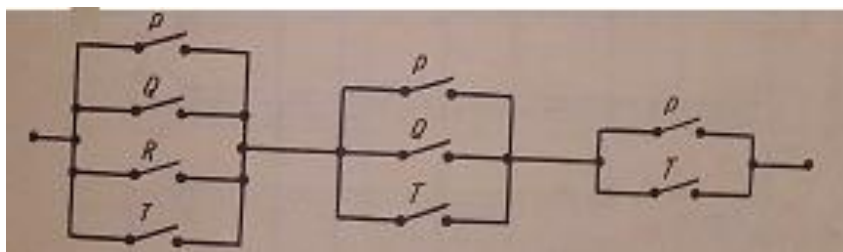


Рис. 4.22

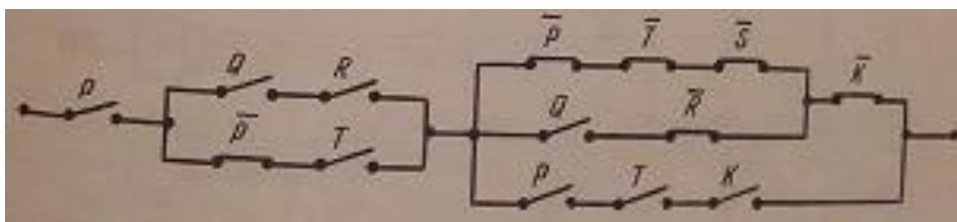


Рис. 4.23

5. Побудувати логічну схему для
а) обчислення норми Хеммінга 3-вимірного вектора;

б) реалізації функції, двоїстої до функції $f(x, y, z) = (\bar{x} | \bar{y}) \oplus (\bar{z} \Rightarrow y \downarrow x)$.

6. Побудувати логічну схему для
 - а) обчислення скалярного добутку двовимірних булевих векторів;
 - б) обчислення максимуму із двох чисел, кожне з яких лежить у межах від 0 до 3.
7. Побудувати логічну схему для
 - а) обчислення добутку двобітових чисел;
 - б) обчислення суми трьох бітових змінних.
8. У великій кімнаті світло має включатися або виключатися за допомогою одного з трьох вимикачів. Побудувати відповідну контактну схему.
9. Комітет складається із п'яти учасників. Рішення виноситься більшістю голосів. Якщо голова комітету голосує проти, то рішення не приймається. Побудувати логічну схему так, щоб при голосуванні кожний натискав би на кнопку і у випадку прийняття рішення загоралася би сигнальна лампа.
10. Комітет складається із чотирьох членів. Рішення приймається більшістю голосів. У випадку рівності голосів рішення не приймається. Побудувати контактну схему для забезпечення процесу голосування.
11. Кандидат відповідає на три питання. Побудувати логічну схему із двома виходами для виводу кількості неправильних відповідей.