МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра алгебри

БІЛЕЦЬКА ДІАНА ЮРІЇВНА

ПРО ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ ЦІЛОЧИСЛОВИХ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ СИМЕТРИЧНОЇ ГРУПИ СТЕПЕНЯ ТРИ

6.040201 – математика

Дипломна робота на здобуття освітнього ступеня бакалавра

Науковий керівник:
Шапочка Ігор Валерійович
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, завідувач кафедри алгебри

Ужгород – 2019

Реєстрація ______________________
(номер)

«____» ________________ 2019 р. ________________ Кожара Л. І.
(підпис)
лаборант кафедри алгебри

Дипломна робота допущена до захисту

Завідувач кафедри

________________ Шапочка І. В.
(підпис)
кандидат фізико-математичних наук, доцент

«____» ________________ 2019 р.

Рецензент ________________ Тилищак О. А.
(підпис)
кандидат фізико-математичних наук, доцент

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія тензорних добутків зображень скінченних груп в останній час швидко розвивається. В роботах Гріна, Суона, Райнера та інших отримано фундаментальні результати про кільця модулярних і цілочислових зображень скінченних груп. В монографію [1] ввійшли основні досягнення теорії тензорних добутків зображень скінченних груп над полем.

Впродовж ряду років колективом кафедри алгебри Ужгородського університету вивчалися тензорні добутки цілочислових матричних зображень скінченних груп. Частина цих результатів приведена в монографії [2]. Зокрема в [2] приведено формули для тензорних добутків нерозкладних матричних зображень циклічних p-груп порядку p і p^2 над повним дискретно нормованим кільцем з полем лишків характеристики p, яке не є полем.

Цілочислові зображення вивчались багатьма авторами, більшість із фундаментальних результатів яких увійшли у монографії [3, 4]. В роботах [5, 6] дано повне описання цілочислових зображень циклічних груп простого порядку, а в роботі [7] — повне описання цілочислових зображень циклічної групи порядку 4. Причому для цих груп існує скінченне число нееквівалентних нерозкладних зображень. З іншого боку відомо [8–10], що якщо група G містить нециклічну силовську підгрупу, то існує нескінченне число нееквівалентних нерозкладних зображень групи G.

У дипломній роботі за допомогою [11] вивчаються тензорні добутки цілочислових матричних зображень симетричної групи степеня три. Одержані в дипломній роботі результати опубліковані у [12].

1 ВИЗНАЧЕННЯ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ

Нехай R — кільце, n — деяке натуральне число, $\mathrm{GL}(n, R)$ — група всіх оборотних $n \times n$-матриць над кільцем R, G — деяка скінченна група порядку $|G|$.

Означення 1.1 ([3]). *Матричним зображенням степеня n групи G над кільцем R* називається гомоморфізм $\Gamma : g \to \Gamma(g)$ групи G в групу $\mathrm{GL}(n, R)$.

Означення 1.2 ([3]). Матричні зображення Γ і Δ групи G над кільцем R називаються *еквівалентними над кільцем R*, якщо вони мають однакові степені та існує оборотна матриця C із $\mathrm{GL}(n, R)$ така, що $C^{-1}\Gamma(g)C = \Delta(g)$ для довільного елемента g групи G.

Неважко переконатися, що множина всіх матричних зображень групи G над кільцем R розбивається на класи еквівалентності.

Означення 1.3 ([3]). Матричне зображення Γ степеня n групи G над кільцем R називається *звідним*, якщо воно еквівалентне матричному зображенню Δ групи G вигляду

$$\Delta : g \to \begin{pmatrix} \Delta_1(g) & \Theta(g) \\ 0 & \Delta_2(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G, \tag{1.1}$$

де $\Delta_j(g)$ — деяка матриця порядку $n_j \in \mathbb{N}$ над кільцем R, $j = 1, 2$; 0 — нульова $n_2 \times n_1$-матриця, $\Theta(g)$ — деяка $n_1 \times n_2$-матриця над кільцем R, $g \in G$. У протилежному випадку матричне зображення Γ називається *незвідним*.

Якщо Δ є звідним матричним зображенням вигляду (1.1), то із теореми Лапласа слідує, що $\Delta_j(g)$ є оборотною матрицею порядку n_j для довільного елемента g групи G і довільного $j \in \{1,\ 2\}$. Тому для кожного $j \in \{1,\ 2\}$ відповідність Δ_j, задана наступним чином:

$$g \to \Delta_j(g), \qquad g \in G,$$

є відображенням групи G в групу $\mathrm{GL}(n_j, R)$. Оскільки Δ є гомоморфізмом груп, то відображення Δ_1 і Δ_2 є також гомоморфізмами групи G відповідно в групи $\mathrm{GL}(n_1, R)$ і $\mathrm{GL}(n_2, R)$, а отже є матричними зображеннями групи

G відповідно степенів n_1 і n_2.

Домовимося надалі символом 0 всюди позначати нульову матрицю, тобто матрицю деяких розмірів, всі елементи якої дорівнюють нулю кільця R. Розміри цієї матриці будуть вказуватися лише у випадку, якщо із контексту вони є незрозумілими.

Означення 1.4 ([3])**.** Матричне зображення Γ степеня n групи G над кільцем R називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне матричному зображенню Δ групи G вигляду

$$\Delta : g \to \begin{pmatrix} \Delta_1(g) & 0 \\ 0 & \Delta_2(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G, \tag{1.2}$$

де $\Delta_j : g \to \Delta_j(g)$ — деяке матричне зображення степеня $n_j \in \mathbb{N}$ над кільцем R, $j = 1, 2$. У протилежному випадку матричне зображення Γ називається *нерозкладним*.

Очевидно будь-яке розкладне матричне зображення групи G є звідним. Відповідно будь-яке незвідне матричне зображення групи G є нерозкладним.

Означення 1.5 ([3])**.** Матричне зображення Γ степеня n групи G над кільцем R називається *цілком звідним*, якщо воно еквівалентне матричному зображенню Δ групи G вигляду

$$\Delta : g \to \begin{pmatrix} \Delta_1(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta_2(g) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta_k(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G, \tag{1.3}$$

де $\Delta_j : g \to \Delta_j(g)$ — деяке незвідне матричне зображення степеня $n_j \in \mathbb{N}$ над кільцем R, $j = 1, 2, \dots, k$.

За домовленістю, незвідне матричне зображення групи G також вважається цілком звідним зображенням.

2 ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ МОДУЛІВ

В цьому параграфі піде мова про одну із конструкцій модулів. Нехай R є кільцем з одиницею, M і N є відповідно правим та лівим R-модулями. Ми побудуємо певним чином абелеву групу $M \otimes_R N$, яку називатимемо тензорним добутком модулів.

Означення 2.1 ([3]). Нехай V — вільна адитивна абелева група породжена елементами декартового добутку $M \times N$, тобто група , елементами якої є формальні суми

$$\sum_{i=1}^{k} z_i(m_i, n_i), \quad k \in \mathbb{N},\ z_i \in \mathbb{Z},\ m_i \in M,\ n_i \in N$$

(зауважимо, що у цьому записі пари (m_i, n_i) та (m_j, n_j) є різними при різних i та j). Далі, нехай W — підгрупа групи V, породжена всеможливими формальними сумами вигляду:

$$(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), \tag{2.1}$$

$$(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2), \tag{2.2}$$

$$(mr, n) - (m, rn) \tag{2.3}$$

для всіх $r \in R$, m, m_1, $m_2 \in M$, n, n_1, $n_2 \in N$. Фактор-група V/W групи V за підгрупою W називається *тензорним добутком правого R-модуля M та лівого R-модуля N*. Вона позначається символом $M \otimes_R N$. Для пари $(m, n) \in (M, N)$ суміжний клас

$$(m, n) + W \in M \otimes_R N$$

будемо позначати символом $m \otimes n$.

Із ознаки рівності суміжних класів слідує, що для довільних елементів $r \in R$, m, m_1, $m_2 \in M$, n, n_1, $n_2 \in N$ є правильними рівності:

$$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n, \tag{2.4}$$

$$m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2, \tag{2.5}$$

$$mr \otimes n = m \otimes rn. \tag{2.6}$$

Таким чином, довільний елемент t тензорного добутку $M \otimes_R N$ представляється у вигляді

$$t = \sum_{i=1}^{k} z_i(m_i \otimes n_i),$$

де $k \in \mathbb{N}$, $z_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \in M$, $n_i \in N$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Причому, таке представлення елемента t не є однозначним.

Означення 2.2 ([3]). Нехай M і N — відповідно правий та лівий модулі над кільцем R з одиницею, а A — адитивна абелева група. Відображення f декартового добутку $M \times N$ у групу A, що ставить у відповідність кожній парі $(m, n) \in M \times N$ елемент $f(m, n) \in A$, називається *збалансованим відображенням*, якщо

$$f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n), \tag{2.7}$$

$$f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2), \tag{2.8}$$

$$f(mr, n) = f(m, rn) \tag{2.9}$$

для довільних $r \in R$, m, m_1, $m_2 \in M$, n, n_1, $n_2 \in N$.

Прикладом збалансованого відображення є відображення $\mathcal{T}$ із $M \times N$ у тензорний добуток $M \otimes_R N$ таке, що

$$\mathcal{T}(m, n) = m \otimes n, \qquad (m, n) \in M \times N.$$

Правильність рівностей (2.7–2.9) для $\mathcal{T}$ одразу випливає із рівностей (2.4–2.6).

Теорема 2.1 ([3]). *Нехай M і N — відповідно правий та лівий модулі над кільцем R з одиницею, а A — адитивна абелева група. Для довільного збалансованого відображення $f : M \times N \to A$ існує єдиний гомоморфізм φ групи $M \otimes_R N$ в групу A такий, що*

$$\varphi(m \otimes n) = f(m, n)$$

для довільних елементів $m \in M$, $n \in N$.

Доведення. Нехай виконується умови теореми і $f: M \times N \to A$ — деяке збалансоване відображення. Розглянемо відповідність $\bar{f}$ між елементами вільної абелевої групи V, породженої множиною $M \times N$, та елементами групи A, задану за правилом:

$$\bar{f}\Big(\sum_{i=1}^{k} z_i(m_i, n_i)\Big) = \sum_{i=1}^{k} z_i f(m_i, n_i),$$

де $k \in \mathbb{N}$, $z_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \in M$, $n_i \in N$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Позаяк V — вільна абелева група породжена множиною $M \times N$, то дві формальні суми $\sum_{i=1}^{k} z_i(m_i, n_i)$ і $\sum_{j=1}^{k'} z'_j(m'_j, n'_j)$ рівні тоді і тільки тоді, коли $k = k'$ і з точністю до нумерації $(m_i, n_i) = (m'_i, n'_i)$, $z_i = z'_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. А оскільки і група A є абелевою, то відповідність $\bar{f}$ є відображенням групи V в групу A. Очевидно, що $\bar{f}$ є гомоморфізмом групи V в групу A.

Підгрупа W групи V, породжена всіма формальними сумами вигляду (2.1–2.3) міститься в ядрі $\mathrm{Ker}\bar{f}$ гомоморфізму $\bar{f}$. Дійсно, для будь-яких $r \in R$, m, m_1, $m_2 \in M$, n, n_1, $n_2 \in N$ справедливі рівності:

$$\begin{aligned}
&\bar{f}\big((m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)\big) = \\
&\qquad = f(m_1 + m_2, n) - f(m_1, n) - f(m_2, n) = \\
&\qquad\qquad = f(m_1, n) + f(m_2, n) - f(m_1, n) - f(m_2, n) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{f}\big((m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)\big) = \\
&\qquad\qquad = f(m, n_1 + n_2) - f(m, n_1) - f(m, n_2) = 0,
\end{aligned}$$

$$\bar{f}\big((mr, n) - (m, rn)\big) = f(mr, n) - f(m, rn) = 0.$$

Це означає, що всі твірні елементи підгрупи W, а тому сама підгрупа W, містяться у ядрі $\mathrm{Ker}\bar{f}$. Останнє твердження дає нам можливість природним чином побудувати гомоморфізм φ фактор-групи $V/W = M \otimes_R N$ у групу A за правилом:

$$\varphi(v + W) = \bar{f}(v), \qquad v \in V. \tag{2.10}$$

Знову ж таки можна переконатися, що φ є гомоморфізмом груп. Зауважимо тільки те, що образ $\varphi(v + W)$ суміжного класу $v + W$ не залежить від вибору представника цього класу. Якщо $v + W = v' + W$ для деяких v, $v' \in V$, то $v - v' \in W \subset \mathrm{Ker}\bar{f}$, а тому

$$\varphi(v+W) = \bar{f}(v) = \bar{f}(v' + (v - v')) = \\ = \bar{f}(v') + \bar{f}(v - v') = \bar{f}(v') = \varphi(v' + W).$$

Оскільки за домовленістю елементи тензорного добутку $M \otimes_R N$ представляємо у вигляді $\sum_{i=1}^{k} z_i(m_i \otimes n_i)$, то рівність (2.10) можна переписати у вигляді

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{k} z_i(m_i \otimes n_i)\Big) = \bar{f}\Big(\sum_{i=1}^{k} z_i(m_i, n_i)\Big) = \sum_{i=1}^{k} z_i f(m_i, n_i),$$

де $k \in \mathbb{N}$, $z_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \in M$, $n_i \in N$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Очевидно,

$$\varphi(m \otimes n) = \bar{f}\big((m, n)\big) = f(m, n)$$

для довільних $m \in M$, $n \in N$.

Нарешті, якщо ψ — деякий інший гомоморфізм тензорного добутку $M \otimes_R N$ у групу A такий, що $\psi(m \otimes n) = f(m, n)$ для довільних елементів $m \in M$, $n \in N$, то

$$\psi\Big(\sum_{i=1}^{k} z_i(m_i \otimes n_i)\Big) = \sum_{i=1}^{k} z_i \psi(m_i \otimes n_i) = \sum_{i=1}^{k} z_i f(m_i, n_i) = \\ = \sum_{i=1}^{k} z_i \varphi(m_i \otimes n_i) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{k} z_i(m_i \otimes n_i)\Big).$$

А тому $\psi = \varphi$. Одержана суперечність завершує доведення теореми.

Нехай R і S — кільця з одиницями, M одночасно є лівим S-модулем і правим R модулем, а N є лівим R-модулем. Перетворимо тензорний добуток $M \otimes_R N$ у лівий S-модуль. Для початку для будь-якого елемента s кільця S розглянемо відображення $f_s : M \times N \to M \otimes_R N$ таке, що

$$f_s(m, n) = sm \otimes n, \qquad m \in M,\ n \in N.$$

Відображення f_s є збалансованим відображенням, бо для довільних $r \in R$,

m, m_1, $m_2 \in M$, n, n_1, $n_2 \in N$ справджуються рівності:

$$f_s(m_1 + m_2, n) = s(m_1 + m_2) \otimes n = (sm_1 + sm_2) \otimes n = \\ = sm_1 \otimes n + sm_2 \otimes n = f_s(m_1, n) + f_s(m_2, n),$$

$$f_s(m, n_1 + n_2) = sm \otimes (n_1 + n_2) = sm \otimes n_1 + sm \otimes n_2 = \\ = f_s(m, n_1) + f_s(m, n_2),$$

$$f_s(mr, n) = s(mr) \otimes n = (sm)r \otimes n = sm \otimes rn = f_s(m, rn).$$

За теоремою 2.1 існує єдиний гомоморфізм $\varphi_s : M \otimes_R N \to M \otimes_R N$ такий, що

$$\varphi_s(m \otimes n) = sm \otimes n$$

для довільних $m \in M$ і $n \in N$. Нарешті визначимо добуток $s \cdot t$ елемента s кільця S на елемент t із $M \otimes_R N$, як образ $\varphi_s(t)$. Якщо елемент t має вигляд $t = \sum_{i=1}^{k} z_i(m_i \otimes n_i)$, то

$$s \cdot t = \varphi_s(t) = \sum_{i=1}^{k} z_i \varphi_s(m_i \otimes n_i) = \sum_{i=1}^{k} z_i(sm_i \otimes n_i).$$

Для будь-яких елементів $s \in S$ і t_1, $t_2 \in M \otimes_R N$ мають місце рівності:

$$s_1 \cdot (t_1 + t_2) = \varphi_{s_1}(t_1 + t_2) = \varphi_{s_1}(t_1) + \varphi_{s_1}(t_2) = s_1 \cdot t_1 + s_1 \cdot t_2.$$

Далі, для довільних елементів s_1, s_2 з кільця S і для будь-яких $m \in M$ та $n \in N$ справджуються рівності:

$$(s_1 + s_2) \cdot m \otimes n = (s_1 + s_2)m \otimes n = (s_1 m + s_2 m) \otimes n = \\ = s_1 m \otimes n + s_2 m \otimes n = s_1 \cdot m \otimes n + s_2 \cdot m \otimes n,$$

$$s_1 \cdot (s_2 \cdot m \otimes n) = s_1 \cdot s_2 m \otimes n = s_1(s_2 m) \otimes n = \\ = (s_1 s_2)m \otimes n = s_1 s_2 \cdot m \otimes n.$$

Позаяк будь-який елемент t тензорного добутку $M \otimes_R N$ є лінійною комбінацією з цілими коефіцієнтами елементів вигляду $m \otimes n$, де $m \in M$, $n \in N$, то звідси слідує, що

$$(s_1 + s_2) \cdot t = s_1 \cdot t + s_2 \cdot t, \qquad s_1 \cdot (s_2 \cdot t) = (s_1 s_2) \cdot t.$$

Нарешті, якщо 1 — це одиниця кільця S, то очевидно, що $1 \cdot t = t$ для довільного $t \in M \otimes_R N$. А тому із вище сказаного слідує, що адитивна абелева група $M \otimes_R N$ є лівим S-модулем.

Нехай R — комутативне кільце з одиницею, M і N є вільні скінченнопороджені модулі над кільцем R . Тоді будь-який лівий R-модуль M можна вважати і правим R-модулем, визначивши добуток $m \cdot r$ (або просто писатимемо mr) елемента m із M на елемент r із кільця R так $m \cdot r = rm$.

Теорема 2.2 ([3]). *Нехай R — комутативне кільце з одиницею, а M і N — ліві R-модулі. Тоді R-модуль $M \otimes_R N$ ізоморфний R-модулю $N \otimes_R M$.*

Доведення. Для доведення теореми слід розглянути гомоморфізми $\varphi : M \otimes_R N \to N \otimes_R M$ і $\psi : N \otimes_R M \to M \otimes_R N$, відповідно породжені збалансованими відображеннями $f_\varphi(m, n) = n \otimes m$ і $f_\psi(n, m) = m \otimes n$, де $m \in M$, $n \in N$. А далі показати, що добутки $\varphi\psi$ і $\psi\varphi$ є тотожними відображеннями відповідно R-модулів $N \otimes_R M$ і $M \otimes_R N$.

Теорема 2.3 ([3]). *Нехай M — правий R-модуль, а N — лівий R-модуль. Якщо R-модуль N розкладається у пряму суму своїх підмодулів N_1 і N_2 ($N = N_1 \oplus N_2$), то*

$$M \otimes_R N \cong M \otimes_R N_1 \dotplus M \otimes_R N_2.$$

Теорема 2.4 ([3]). *Нехай M — правий R-модуль, а N — лівий R-модуль. Якщо R-модуль M розкладається у пряму суму своїх підмодулів M_1 і M_2 ($M = M_1 \oplus M_2$), то*

$$M \otimes_R N \cong M_1 \otimes_R N \dotplus M_2 \otimes_R N.$$

Нехай тепер M і N є вільними скінченнопородженими модулями над комутативним кільцем R відповідно розмірностей k і l. Тоді M розкладається у пряму суму k підмодулів, кожний з яких ізоморфний кільцю R:

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k, \qquad M_i \cong R,\ i = 1, 2, \ldots, k;$$

а N — у пряму суму l підмодулів, що ізоморфні R:

$$N = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_l, \qquad N_j \cong R,\ j = 1, 2, \ldots, l.$$

Із теорем 2.3 і 2.4 слідує, що

$$\begin{gathered} M \otimes_R N \cong M \otimes_R N_1 \dotplus M \otimes_R N_2 \dotplus \cdots \dotplus M \otimes_R N_l \cong \\ \cong M_1 \otimes_R N_1 \dotplus M_2 \otimes_R N_1 \dotplus \cdots \dotplus M_k \otimes_R N_1 \dotplus \\ \dotplus M_1 \otimes_R N_2 \dotplus M_2 \otimes_R N_2 \dotplus \cdots \dotplus M_k \otimes_R N_2 \dotplus \cdots \dotplus \\ \dotplus M_1 \otimes_R N_l \dotplus M_2 \otimes_R N_l \dotplus \cdots \dotplus M_k \otimes_R N_l. \end{gathered}$$

Оскільки для довільних $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ та $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$

$$M_i \otimes_R N_j \cong R \otimes_R R \cong R.$$

Отже,

$$M \otimes_R N \cong \underbrace{R \dotplus R \dotplus \cdots \dotplus R}_{kl \text{ екземплярів}} = R^{kl}.$$

Це означає, що тензорний добуток $M \otimes_R N$ вільних скінченнопороджених модулів M і N над кільцем R є вільним скінченнопородженим модулем, причому його розмірність $\dim_R M \otimes_R N$ дорівнює добутку розмірностей модулів M і N над R.

Далі, якщо u_1, u_2, …, u_k — базис модуля M над кільцем R, а v_1, v_2, …, v_l — базис модуля N над R, то нескладно довести, що система елементів

$$u_1 \otimes v_1,\ u_1 \otimes v_2,\ \ldots,\ u_1 \otimes v_l,\ u_2 \otimes v_1,\ u_2 \otimes v_2,\ \ldots,\ u_k \otimes v_l$$

є базисом тензорного добутку $M \otimes_R N$ над кільцем R.

3 ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Нехай G — скінченна група, R — комутативне кільце з одиницею,

$$\Gamma : G \to GL(k, R), \qquad \Delta : G \to GL(l, R)$$

— деякі матричні зображення групи G над кільцем R, де k, $l \in \mathbb{N}$. Припустимо, що M і N є RG-модулями зображення, в яких реалізуються відповідно матричні зображення Γ і Δ. Із результатів попереднього параграфу слідує, що тензорний добуток $M \otimes_R N$ є вільним модулем розмірності kl над кільцем R. Перетворимо $M \otimes_R N$ у RG-модуль. Спочатку для довільного елемента g групи G розглянемо відображення множини $M \times N$ в $M \otimes_R N$ вигляду

$$f_g(m, n) = gm \otimes gn, \qquad m \in M,\ n \in N.$$

Відображення f_g є збалансованим відображенням для довільного елемента $g \in G$. А тому існує єдиний гомоморфізм $\varphi_g : M \otimes_R N \to M \otimes_R N$ такий, що

$$\varphi_g(m \otimes n) = gm \otimes gn, \qquad m \in M,\ n \in N.$$

Визначимо добуток $a \cdot t$ елемента $a = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ групового кільця RG на елемент $t = \sum_i z_i(m_i \otimes n_i)$ тензорного добутку $M \otimes_R N$ наступним чином

$$a \cdot t = \sum_{g \in G} \sum_i z_i \alpha_g \varphi_g(m_i \otimes n_i) = \sum_{g \in G} \sum_i z_i \alpha_g (gm_i \otimes gn_i).$$

Підкреслимо, що через те, що елементи групи G утворюють базис групового кільця RG над кільцем R, а тензорний добуток $M \otimes_R N$ породжується елементами вигляду $m \otimes n$, де $m \in M$, $n \in N$, то достатньо було визначити лише добутки вигляду $g \cdot m \otimes n$.

Таким чином, тензорний добуток $M \otimes_R N$ є RG-модулем зображення.

Означення 3.1 ([2]). Тензорний добуток $M \otimes_R N$, перетворений в RG-модуль зображення, називають *тензорним добутком RG-модулів зображень M і N*. Матричне зображення групи G, що реалізується у тензорному добутку RG-модулів зображень M і N називається *тензорним добутком матричних зображень Γ і Δ і позначають символом $\Gamma \otimes \Delta$.*

Знайдемо матричне зображення $\Gamma \otimes \Delta$ групи G, яке реалізується у тензорному добутку RG-модулів зображень. Нехай Γ і Δ — матричні зображення групи G вигляду:

$$\Gamma : g \to \Gamma(g) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(g) & \alpha_{12}(g) & \dots & \alpha_{1k}(g) \\ \alpha_{21}(g) & \alpha_{22}(g) & \dots & \alpha_{2k}(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1}(g) & \alpha_{k2}(g) & \dots & \alpha_{kk}(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G,$$

$$\Delta : g \to \Delta(g) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(g) & \beta_{12}(g) & \dots & \beta_{1l}(g) \\ \beta_{21}(g) & \beta_{22}(g) & \dots & \beta_{2l}(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{l1}(g) & \beta_{l2}(g) & \dots & \beta_{ll}(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G,$$

де $\alpha_{ij}(g)$, $\beta_{ij}(g) \in R$. І нехай в RG-модулях зображень M і N вибрані відповідно базиси u_1, u_2, …, u_k та v_1, v_2, …, v_l такі, що

$$g \cdot u_i = \sum_{q=1}^{k} \alpha_{qi}(g) u_q, \qquad g \cdot v_j = \sum_{r=1}^{l} \beta_{rj}(g) v_r,$$

де $g \in G$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, l$. Розглянемо базис RG-модуля зображення $M \otimes_R N$ над кільцем R вигляду:

$$u_1 \otimes v_1,\ u_1 \otimes v_2,\ \dots,\ u_1 \otimes v_l,\ u_2 \otimes v_1,\ u_2 \otimes v_2,\ \dots,\ u_k \otimes v_l.$$

Для елемента $g \in G$, індексів $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ та $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ обчислимо добуток

$$g \cdot u_i \otimes v_j = gu_i \otimes gv_j = \Big(\sum_{q=1}^{k} \alpha_{qi}(g) u_q\Big) \otimes \Big(\sum_{r=1}^{l} \beta_{rj}(g) v_r\Big) =$$
$$= \sum_{q=1}^{k} \sum_{r=1}^{l} \alpha_{qi}(g) \beta_{rj}(g) (u_q \otimes v_r).$$

Тоді $\big[\Gamma \otimes \Delta\big](g)$ є матрицею, елементами якої є добутки $\alpha_{qi}(g)\beta_{rj}(g)$. Причому добуток $\alpha_{qi}(g)\beta_{rj}(g)$ стоїть на перетині рядка з номером $(q-1)k + r$ та стовпця з номером $(i-1)k + j$. У блочному вигляді матрицю $\big[\Gamma \otimes \Delta\big](g)$

можна записати так

$$\big[\Gamma\otimes\Delta\big](g)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}(g)\Delta(g) & \alpha_{12}(g)\Delta(g) & \dots & \alpha_{1k}(g)\Delta(g)\\ \alpha_{21}(g)\Delta(g) & \alpha_{22}(g)\Delta(g) & \dots & \alpha_{2k}(g)\Delta(g)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{k1}(g)\Delta(g) & \alpha_{k2}(g)\Delta(g) & \dots & \alpha_{kk}(g)\Delta(g)\end{pmatrix}.$$

Зауваження. Тензорний добуток матричних зображень можна визначити інакше, використовуючи поняття кронекерівського добутку матриць. Нехай $A=\|\alpha_{ij}\|$ та $B=\|\beta_{ij}\|$ — матриці відповідно порядків k і l над кільцем R. Матрицю порядку kl вигляду

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}B & \alpha_{12}B & \dots & \alpha_{1k}B\\ \alpha_{21}B & \alpha_{22}B & \dots & \alpha_{2k}B\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{k1}B & \alpha_{k2}B & \dots & \alpha_{kk}B\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{11}\beta_{12} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1l} & \alpha_{12}\beta_{11} & \dots & \alpha_{1k}\beta_{1l}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{11}\beta_{l1} & \alpha_{11}\beta_{l2} & \dots & \alpha_{11}\beta_{ll} & \alpha_{12}\beta_{l1} & \dots & \alpha_{1k}\beta_{1l}\\ \alpha_{21}\beta_{11} & \alpha_{21}\beta_{12} & \dots & \alpha_{21}\beta_{1l} & \alpha_{22}\beta_{11} & \dots & \alpha_{2k}\beta_{1l}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{k1}\beta_{l1} & \alpha_{k1}\beta_{l2} & \dots & \alpha_{k1}\beta_{ll} & \alpha_{k2}\beta_{l1} & \dots & \alpha_{kk}\beta_{ll}\end{pmatrix}$$

називають *кронекерівським добутком матриць A і B* і позначають символом $A\otimes B$. Можна показати, що для будь-яких матриць A, A' порядку k та будь-яких матриць B і B' порядку l справджується рівність

$$AA'\otimes BB'=(A\otimes B)(A'\otimes B').$$

Після цього тензорний добуток матричних зображень $\Gamma: g\to\Gamma(g)$ і $\Delta: g\to\Delta(g)$ скінченної групи G над кільцем K визначається, як матричне зображення вигляду

$$\Gamma\otimes\Delta: g\to\Gamma(g)\otimes\Delta(g),\qquad g\in G.$$

4 ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ НЕРОЗКЛАДНИХ ЦІЛОЧИСЛОВИХ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ СИМЕТРИЧНОЇ ГРУПИ ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ

Нехай S_3 — симетрична група третього степеня з твірними елементами a, b і твірними співвідношеннями:

$$a^2 = b^3 = e, \qquad ba = ab^2,$$

де e — одиничний елемент групи S_3. Одержані результати базуються на класифікації всіх нееквівалентних нерозкладних цілочислових матричних зображень групи S_3, одержаною Л. А. Назаровою та А. В. Ройтером в [11]. Підкреслимо, в цій роботі доведено, що розклад цілочислових матричних зображень групи S_3 у суму нерозкладних зображень є однозначним з точністю до порядку слідування доданків.

Теорема 4.1 ([11]). *Всі попарно нееквівалентні нерозкладні матричні зображення симетричної групи S_3 над кільцем цілих раціональних чисел $\mathbb{Z}$ вичерпуються наступними зображеннями:*

$$\Gamma_1 : a \to 1, \quad b \to 1; \qquad \Gamma_2 : a \to -1, \quad b \to 1;$$

$$\Gamma_3 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_4 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_5 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_6 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_7 : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_8 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_9 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_{10} : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Надалі для матричного зображення Γ групи S_3 через $[\Gamma]$ позначимо клас всіх еквівалентних зображенню Γ матричних цілочислових зображень групи S_3. У свою чергу для невід'ємних цілих чисел n_1, n_2, ..., n_{10} через

$$n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + \cdots + n_{10}\Gamma_{10}$$

позначимо цілком розкладне зображення групи S_3, яке містить n_k раз нерозкладну компоненту Γ_k для кожного $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

Теорема 4.2. *Справджуються наступні формули для тензорних добутків нерозкладних цілочислових матричних зображень симетричної групи S_3:*

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_1] = [\Gamma_1], \qquad [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2] = [\Gamma_2],$$

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_3], \qquad [\Gamma_1 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_4],$$

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_5], \qquad [\Gamma_1 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_6],$$

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_7], \qquad [\Gamma_1 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_8],$$

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_9], \qquad [\Gamma_1 \otimes \Gamma_{10}] = [\Gamma_{10}],$$

$$[\Gamma_2 \otimes \Gamma_2] = [\Gamma_1], \qquad [\Gamma_2 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_4],$$

$$[\Gamma_2 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_3], \qquad [\Gamma_2 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_5],$$
$$[\Gamma_2 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_7], \qquad [\Gamma_2 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_6],$$
$$[\Gamma_2 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_9], \qquad [\Gamma_2 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_8],$$
$$[\Gamma_2 \otimes \Gamma_{10}] = [\Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_3 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_8],$$
$$[\Gamma_3 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_9], \qquad [\Gamma_3 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_3 + \Gamma_4],$$
$$[\Gamma_3 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_3 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_3 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_3 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_3 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_4 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_8],$$
$$[\Gamma_4 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_3 + \Gamma_4], \qquad [\Gamma_4 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_4 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_4 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_4 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_4 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_5 \otimes \Gamma_5] = [2\Gamma_5], \qquad [\Gamma_5 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_5 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_5 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_5 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_5 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_6 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_6 + \Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_6 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_7 + \Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_6 \otimes \Gamma_8] = [2\Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_6 \otimes \Gamma_9] = [2\Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_6 \otimes \Gamma_{10}] = [3\Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_7 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_6 + \Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_7 \otimes \Gamma_8] = [2\Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_7 \otimes \Gamma_9] = [2\Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_7 \otimes \Gamma_{10}] = [3\Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_8 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_9 + 2\Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_8 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_8 + 2\Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_8 \otimes \Gamma_{10}] = [4\Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_9 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_9 + 2\Gamma_{10}], \qquad [\Gamma_9 \otimes \Gamma_{10}] = [4\Gamma_{10}],$$
$$[\Gamma_{10} \otimes \Gamma_{10}] = [6\Gamma_{10}].$$

Доведення. Перші дев'ятнадцять рівностей є очевидними. Для доведення наступних двадцяти шести рівностей для всіх $i,\ j \in \{3,\ 4,\ \ldots,\ 10\}$ таких, що $i \le j$, нами знайдено оборотну матрицю $C^{(i,j)}$ над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ відповідного порядку, для якої справджуються рівності

$$\big(\Gamma_i \otimes \Gamma_j\big)(a)C^{(i,j)} = C^{(i,j)}\Big(\big(n_1^{(ij)}\Gamma_1 + n_2^{(ij)}\Gamma_2 + \cdots + n_{10}^{(ij)}\Gamma_{10}\big)(a)\Big),$$

$$\big(\Gamma_i \otimes \Gamma_j\big)(b)C^{(i,j)} = C^{(i,j)}\Big(\big(n_1^{(ij)}\Gamma_1 + n_2^{(ij)}\Gamma_2 + \cdots + n_{10}^{(ij)}\Gamma_{10}\big)(b)\Big),$$

для деяких невід'ємних цілих чисел $n_1^{(ij)}$, $n_2^{(ij)}$, …, $n_{10}^{(ij)}$. Укажемо ці матриці:

$$C^{(3,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,8)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(4,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad C^{(4,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & -2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(5,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,8)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,9)} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2
\end{pmatrix};$$

$$C^{(6,10)} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{pmatrix};$$

$$C^{(7,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,10)}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0
\end{pmatrix};$$

$$C^{(8,8)} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 0 \\
-2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & -3 & -3 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\
0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -3 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & -2 & 0
\end{pmatrix};$$

$$C^{(8,9)} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2
\end{pmatrix};$$

$$C^{(8,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(8,10)} & C_{12}^{(8,10)} \\ C_{21}^{(8,10)} & C_{22}^{(8,10)} \end{pmatrix};$$

де

$$C_{11}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C_{12}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_{21}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&-2&2\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&2&1&2&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&-1&1&-2\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&1&0&1&0&0&1&2&0&2\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&2&0&2\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&2&-2\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&-2&1 \end{pmatrix};$$

$$C_{22}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0\\ 1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ -3&-1&-2&-1&-2&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-2&-1&-1&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&-2&0&1&0&0\\ 2&1&1&2&0&2&1&0&0&1&0&1\\ -1&-1&-1&-1&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ -3&-2&-1&-2&0&-2&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-2&-1&0&-1&0&-1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(9,9)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & -5 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 7 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -3 & -3 & -5 & -6 & -2 & -2 & -1 & -1 & -3 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -6 & -4 & -1 & -2 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -3 & -4 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 6 & 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 3 & -1 & -4 & -2 & -2 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 3 & 4 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(9,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(9,10)} & C_{12}^{(9,10)} \\ C_{21}^{(9,10)} & C_{22}^{(9,10)} \end{pmatrix};$$

де

$$C_{11}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C_{12}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_{21}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C_{22}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(10,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(10,10)} & C_{12}^{(10,10)} \\ C_{21}^{(10,10)} & C_{22}^{(10,10)} \end{pmatrix};$$

де

$$C_{11}^{(10,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_{12}^{(10,10)}=\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&-1&0&0&-1&0&-1&1&1&1&1&0&1\\
1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-2&-1&0&-1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&3&1&1&2&0&2&-3&-2&-1&-2&0&-2\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&1&0&-1&-1&-1&0&-1
\end{pmatrix};$$

$$
C_{21}^{(10,10)} = \begin{pmatrix}
0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&-1&0&-1&-1&-1&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&2&1&2&0&1&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&1&-1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&-1&2&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-3&-2&-2&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&2&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-2&0&-2&1&-1&0&-1&-1&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-3&-1&-1&-2&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix};
$$

$$C_{22}^{(10,10)} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -2 & -2 & -1 & -2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0
\end{pmatrix}.$$

Наслідок 4.1. *Нехай Δ і Θ є нерозкладними цілочисловими матричними зображеннями симетричної групи S_3. Тензорний добуток $\Delta \otimes \Theta$ зображень Δ і Θ є нерозкладним матричним зображенням тоді і тільки тоді, коли виконується одна із умов:*

1) *одне із зображень Δ або Θ є зображенням 1-го степеня;*

2) *обидва зображення Δ і Θ є незвідними;*

3) *одне із зображень Δ або Θ є зображенням 2-го степеня, а інше — 3-го.*

Доведення. Доведення наслідку легко випливає із теореми 4.2, враховуючи наступні рівності:

$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_1] = [\Gamma_1], \qquad [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2] = [\Gamma_2],$$
$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_3], \qquad [\Gamma_1 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_4],$$
$$[\Gamma_1 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_5], \qquad [\Gamma_1 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_6],$$

$$
\begin{aligned}
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_7], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_8], \\
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_9], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_{10}] = [\Gamma_{10}], \\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_2] = [\Gamma_1], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_4], \\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_3], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_5], \\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_7], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_6], \\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_9], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_8], \\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_{10}] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_3 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_8], \\
&[\Gamma_3 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_9], && [\Gamma_3 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}], \\
&[\Gamma_3 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_4 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_8], \\
&[\Gamma_4 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_4 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}], \\
&[\Gamma_5 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_5 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}].
\end{aligned}
$$

ВИСНОВКИ

В цій дипломній роботі знайдені формули для тензорних добутків нерозкладних матричних цілочислових зображень симетричної групи S_3 степеня три. Відомо, що є 10 попарно нееквівалентних нерозкладних цілочислових матричних зображень групи S_3. Для кожної пари тензорних добутків цих зображень нами знайдено їх розклад у суму нерозкладних матричних зображень. Ці результати були одержані використовуючи теорію матричних рівнянь над областями головних ідеалів.

Нами також одержано критерій нерозкладності тензорного добутку нерозкладних матричних зображень симетричної групи третього степеня над кільцем цілих чисел.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Feit W. The representation theory of finite groups, North-Holland, Amsterdam, 1982. – 501 p.

2. Гудивок П. М., Рудько В. П. Тензорные произведения конечных групп. – Ужгород: Патент, 1985. – 118 с.

3. Curtis C. W., Reiner I. Methods of representation theory with applications to finite groups and orders. Volume 1. – New York: John Wiley & Sons, 1990. – 819 p.

4. Гудивок П. М. Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2003. – 118 с.

5. Diederichen F.-E. Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz // Abh. math. Sem. Hansische Univ. – 1940. – 13. – P. 357–412.

6. Reiner I. Integral representations of cyclic groups of prime order // Proc. Amer. Math. Soc.– 1957. – **8**. – P. 142–146.

7. Ройтер А. В. О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами // Весник Ленинград. ун-та. – 1960. – **19**. – С. 58–78.

8. Higman D. G. Indecomposable representations at characteristic p // Duke Math. J. – 1954. – **21**. – P. 369–376.

9. Боревич З. И., Фаддеев Д. К. К теории гомологий конечных групп // Весник Ленинград. ун-та. – 1959. – **14**, №2. – С. 72–87.

10. Назарова Л. А., Целочисленные представления четвертой группы // Докл. АН СССР. – 1961. – **140**, №5. – С. 1011–1014.

11. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Целочисленные представления симметрической группы третьей степени // Укр. мат. журн. – 1962. – **14**, №3. – С. 271–288.

12. Білецька Д. Ю., Шапочка І. В. Тензорні добутки нерозкладних цілочислових матричних зображень симетричної групи третього степеня // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2018. — Вип. №1 (32). — С. 15–28.

АНОТАЦІЯ

Дипломна робота бакалавра на тему: «Про тензорні добутки цілочислових матричних зображень симетричної групи степеня три» студентки Білецької Діани Юріївни містить 40 сторінок та 12 джерел за списком використаної літератури.

В дипломній роботі приведені формули для тензорних добутків нерозкладних матричних зображень симетричної групи третього степеня над кільцем цілих раціональних чисел.

Матричне зображення, скінченна група, тензорний добуток.

ABSTRACT

The bachelor's graduation paper on the topic: "On tensor products of integral matrix representations of the symmetric group of third degree" of the student Biletska Diana Yuriivna contains 40 pages, 12 references.

We have been found the formulas for the tensor products of indecomposable integral matrix representations of the symmetric group of the third degree.

Matrix representation, finite group, tensor product.

Виконавиця: (Білецька Д. Ю.)

Науковий керівник: (Шапочка І. В.)