УДК 512.547.25

П. М. Гудивок, М. П. Желізняк (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО НЕРОЗКЛАДНІ МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННИХ p-ГРУП НАД ЛОКАЛЬНИМИ ОБЛАСТЯМИ ЦІЛІСНОСТІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

It's making up clear in the paper, when an finite p-group has a infinite number of nonequivalent indecomposable matrix representations of any hight degree over some local rings of characteristic zero.

Вияснюється, коли скінченна p-група має нескінченне число нееквівалентних нерозкладних матричних зображень як завгодно високого степеня над деякими локальними кільцями характеристики нуль.

Роггенкамп [1] показав, що множина нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень скінченної групи G порядку $|G| > 1$, степені яких не перевищують порядок групи G, нескінченна, якщо K така нетерова область цілісності характеристики нуль, у якої існує такий простий ідеал P, що факторкільце K/P не є полем і $|G| \equiv 0(mod P)$.

Лема 1 ([2]). *Нехай K – комутативне кільце з одиницею, G – скінченна група, $\Gamma : g \to \Gamma(g)$ – матричне K-зображення групи G ($g \in G$, $\Gamma(g) \in GL(n, K)$) і $W(\Gamma) = \{C \in M(n, K)\, | C\Gamma(g) = \Gamma(g)C, g \in G\}$, де $M(n, K)$ – множина всіх матриць порядку n над кільцем K. Якщо $W(\Gamma)$ – локальне кільце, то Γ є нерозкладним матричним K-зображенням групи G.*

Теорема 1. *Нехай G – скінченна нециклічна p-група, K – локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики p, $\varepsilon \in K$ ($\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$) і $K/(1-\varepsilon)K$ – нескінченне кільце. Тоді число нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень степеня $4n$ групи G нескінченне (n – довільне натуральне число).*

Доведення. Очевидно, теорему досить довести для абелевої групи G типу (p, p): $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ ($a^p = b^p = e$).

Нехай E_n – одинична матриця порядку n і $I_n(\lambda)$ ($\lambda \in K$) – клітка Жордана порядку n над кільцем K з елементом λ по головній діагоналі.

Неважко перевірити, що відображення $\Gamma(\lambda)$ вигляду:

$$a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & \varepsilon E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} = A,$$

$$b \to \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda) \\ 0 & E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} = B(\lambda) \tag{1}$$

є матричним зображенням групи G над кільцем K.

Покажемо, що при $\lambda_1-\lambda_2 \notin (1-\varepsilon)K$ зображення $\Gamma(\lambda_1)$ і $\Gamma(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K. Припустимо, що зображення $\Gamma(\lambda_1)$ і $\Gamma(\lambda_2)$ K-еквівалентні. Тоді існує така оборотна матриця C над кільцем K, що

$$AC = CA, \tag{2}$$

$$B(\lambda_1)C = CB(\lambda_2). \tag{3}$$

Запишемо матрицю C у вигляді $C = \|C_{ij}\|$, де C_{ij} — матриця порядку n $(i, j = 1, ..., 4)$. Тоді із (1) і (2) одержимо:

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & \varepsilon E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & \varepsilon E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} C_{11}+C_{31} & C_{12}+C_{32} & C_{13}+C_{33} & C_{14}+C_{34} \\ \varepsilon C_{21}+C_{41} & \varepsilon C_{22}+C_{42} & \varepsilon C_{23}+C_{43} & \varepsilon C_{24}+C_{44} \\ \varepsilon C_{31} & \varepsilon C_{32} & \varepsilon C_{33} & \varepsilon C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}\varepsilon & C_{11}+C_{13}\varepsilon & C_{12}+C_{14} \\ C_{21} & C_{22}\varepsilon & C_{21}+C_{23}\varepsilon & C_{22}+C_{24} \\ C_{31} & C_{32}\varepsilon & C_{31}+C_{33}\varepsilon & C_{32}+C_{34} \\ C_{41} & C_{42}\varepsilon & C_{41}+C_{43}\varepsilon & C_{42}+C_{44} \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо:

$$C_{31} = 0, \quad C_{42} = 0, \tag{4}$$

$$C_{11} \equiv C_{33}(mod(1-\varepsilon)K), \quad C_{44} \equiv C_{22}(mod(1-\varepsilon)K). \tag{5}$$

Далі із (1) і (3) дістаємо:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda_1) \\ 0 & E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & C_{32} & C_{11} & C_{34} \\ C_{41} & 0 & C_{43} & C_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & C_{32} & C_{11} & C_{34} \\ C_{41} & 0 & C_{43} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda_2) \\ 0 & E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon C_{11}+I_n(\lambda_1)C_{41} & \varepsilon C_{12} & \varepsilon C_{13}+I_n(\lambda_1)C_{43} & \varepsilon C_{14}+I_n(\lambda_1)C_{22} \\ C_{21} & C_{22}+C_{32} & C_{23}+C_{11} & C_{24}+C_{34} \\ 0 & \varepsilon C_{32} & \varepsilon C_{11} & \varepsilon C_{34} \\ C_{41} & 0 & C_{43} & C_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11}\varepsilon & C_{12} & C_{12}+\varepsilon C_{13} & C_{11}I_n(\lambda_2)+C_{14} \\ C_{21}\varepsilon & C_{22} & C_{22}+\varepsilon C_{23} & C_{21}I_n(\lambda_2)+C_{24} \\ 0 & C_{32} & C_{32}+C_{11}\varepsilon & C_{34} \\ C_{41}\varepsilon & 0 & C_{43}\varepsilon & C_{41}I_n(\lambda_2)+C_{22} \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності маємо:

$$C_{41}=C_{21}=C_{32}=C_{12}=C_{43}=C_{34}=0, \tag{6}$$

$$C_{22}\equiv C_{11}(mod(1-\varepsilon)K), \tag{7}$$

$$I_n(\lambda_1)C_{22}\equiv C_{11}I_n(\lambda_2)(mod(1-\varepsilon)K). \tag{8}$$

З (5) і (7) випливає:

$$C_{11}\equiv C_{22}\equiv C_{33}\equiv C_{44}(mod(1-\varepsilon)K). \tag{9}$$

Тоді із (8) і (9) одержуємо, що

$$I_n(\lambda_1)C_{11}\equiv C_{11}I_n(\lambda_2)(mod(1-\varepsilon)K). \tag{10}$$

Оскільки $\lambda_1-\lambda_2\notin(1-\varepsilon)K$, то C_{11} — необоротна матриця над кільцем K. Згідно (4), (6) і (9)

$$C\equiv\begin{pmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & C_{14} \\ 0 & C_{11} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} \end{pmatrix}(modRadK), \tag{11}$$

де $RadK$ – радикал Джекобсона кільця K.

Використовуючи (10) і (11), одержимо, що C — необоротна матриця над кільцем K. Із отриманого протиріччя випливає, що зображення $\Gamma(\lambda_1)$ і $\Gamma(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K при $\lambda_1-\lambda_2\notin(1-\varepsilon)K$.

Далі покажемо, що $\Gamma(\lambda)$ є нерозкладним K-зображенням групи G. Якщо в (2) покласти $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ і вважати, що C – довільна матриця порядку $4n$ над кільцем K, то, використовуючи (2)-(11), одержимо:

$$C\equiv\begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}(modRadK),$$

де $\alpha\in K$. Тоді матриця C або $E_{4n}-C$ є оборотною над кільцем K. З леми 1 отримаємо, що $\Gamma(\lambda)$ є нерозкладним зображенням групи G над кільцем K. Отже, існує нескінченна кількість нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень степеня $4n$ групи G. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай $G = \langle a \rangle$ – скінченна p-група порядку $|G| > 1$ ($p > > 3$), K – локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики p, $\varepsilon \in K$ ($\varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1$) і $K/(1-\varepsilon)K$ – нескінченне кільце. Тоді число нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень степеня $4n$ групи G нескінченне (n – довільне натуральне число).*

Доведення. Очевидно, теорему досить довести для групи $G = \langle a \rangle$ ($a^p = e$). Розглянемо відображення $\Delta(\lambda)$ вигляду:

$$a \to \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & E_n & I_n(\lambda) \\ 0 & \varepsilon^2 E_n & E_n & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon^3 E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} = A(\lambda), \tag{12}$$

де E_n — одинична матриця порядку n і $I_n(\lambda)$ ($\lambda \in K$) — клітка Жордана порядку n над кільцем K з елементом λ по головній діагоналі.

Неважко перевірити, що відображення $\Delta(\lambda)$ є матричним K-зображенням групи G. Покажемо, що при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin (1-\varepsilon)K$ зображення $\Delta(\lambda_1)$ і $\Delta(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K. Припустимо протилежне. Тоді існує така оборотна матриця C над кільцем K, що

$$A(\lambda_1)C = CA(\lambda_2). \tag{13}$$

Запишемо матрицю C у вигляді $C = \|C_{ij}\|$, де C_{ij} — матриця порядку n ($i, j = = 1, ..., 4$).

Тоді, використовуючи (12) і (13), маємо:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & E_n & I_n(\lambda_1) \\ 0 & \varepsilon^2 E_n & E_n & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon^3 E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & E_n & I_n(\lambda_2) \\ 0 & \varepsilon^2 E_n & E_n & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon^3 E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon C_{11}+C_{31}+I_n(\lambda_1)C_{41} & C_{12}+C_{32}+I_n(\lambda_1)C_{42} & C_{13}+C_{33}+I_n(\lambda_1)C_{43} & C_{14}+C_{34}+I_n(\lambda_1)C_{44} \\ \varepsilon^2 C_{21}+C_{31}+C_{41} & \varepsilon^2 C_{22}+C_{32}+C_{42} & \varepsilon^2 C_{23}+C_{33}+C_{43} & \varepsilon^2 C_{24}+C_{34}+C_{44} \\ \varepsilon^3 C_{31} & \varepsilon^3 C_{32} & \varepsilon^3 C_{33} & \varepsilon^3 C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11}\varepsilon & C_{12}\varepsilon^2 & C_{11}+C_{12}+C_{13}\varepsilon^3 & C_{11}I_n(\lambda_2)+C_{12}+C_{14} \\ C_{21}\varepsilon & C_{22}\varepsilon^2 & C_{21}+C_{22}+C_{23}\varepsilon^3 & C_{21}I_n(\lambda_2)+C_{22}+C_{24} \\ C_{31}\varepsilon & C_{32}\varepsilon^2 & C_{31}+C_{32}+C_{33}\varepsilon^3 & C_{31}I_n(\lambda_2)+C_{32}+C_{34} \\ C_{41}\varepsilon & C_{42}\varepsilon^2 & C_{41}+C_{42}+C_{43}\varepsilon^3 & C_{41}I_n(\lambda_2)+C_{42}+C_{44} \end{pmatrix}.$$

Звідси дістаємо:

$$C_{41} = C_{42} = C_{31} = C_{32} = C_{21} = C_{12} = C_{43} = C_{34} = 0, \tag{14}$$

Враховуючи (14), одержимо:

$$C_{22} \equiv C_{33}(mod(1-\varepsilon)K), \tag{15}$$

$$C_{11} \equiv C_{33}(mod(1-\varepsilon)K), \tag{16}$$

$$C_{44} \equiv C_{22}(mod(1-\varepsilon)K), \tag{17}$$

$$I_n(\lambda_1)C_{44} \equiv C_{11}I_n(\lambda_2)(mod(1-\varepsilon)K). \tag{18}$$

Із (15)-(18) випливає, що

$$C_{11} \equiv C_{22} \equiv C_{33} \equiv C_{44}(mod(1-\varepsilon)K). \tag{19}$$

Тоді

$$I_n(\lambda_1)C_{11} \equiv C_{11}I_n(\lambda_2)(mod(1-\varepsilon)K). \tag{20}$$

Так як $\lambda_1 - \lambda_2 \notin (1-\varepsilon)K$, то C_{11} – необоротна матриця над кільцем K. Із (14) і (19) дістаємо, що

$$C \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & C_{14} \\ 0 & C_{11} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} \end{pmatrix} (modRadK). \tag{21}$$

Отже, C – необоротна матриця над кільцем K. Із одержаного протиріччя випливає, що K-зображення $\Delta(\lambda_1)$ і $\Delta(\lambda_2)$ не є еквівалентними над кільцем K при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin (1-\varepsilon)K$.

Далі покажемо, що $\Delta(\lambda)$ є нерозкладним K-зображенням групи G. В (13) покладемо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і будемо вважати, що C – довільна матриця порядку $4n$ над кільцем K. Тоді, використовуючи (13)-(21), маємо:

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} (modRadK),$$

де $\alpha \in K$. Очевидно, матриця C або $E_{4n} - C$ є оборотною над кільцем K. З леми 1 отримаємо, що $\Delta(\lambda)$ є нерозкладним зображенням групи G над кільцем K. Отже, існує нескінченна кількість нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень степеня $4n$ групи $G = \langle a \rangle$. Теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай G – скінченна група порядку 3^r $(r \geqslant 1)$, K – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики три $(\varepsilon \in K, \varepsilon^3 = 1, \varepsilon \neq 1)$. Якщо $(1-\varepsilon)K \neq RadK$ і $K/RadK$ – нескінченне поле, тоді число нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень групи G степеня $3n$ нескінченне (n – довільне натуральне число).*

Доведення. Очевидно, теорему досить довести для випадку, коли $G = \langle a \rangle$– циклічна група порядку 3.

Оскільки $(1-\varepsilon)K$ не є максимальним ідеалом кільця K, то існує такий необоротний елемент t кільця K, що $t \notin (1-\varepsilon)K$. Неважко показати, що відображення

$$\Delta_1(\lambda) : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^2 E_n & tE_n & I_n(\lambda) \\ 0 & \varepsilon E_n & tE_n \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} = D(\lambda) \tag{22}$$

є матричним K-зображенням групи $G = \langle a \rangle$.

Покажемо, що при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin RadK$ зображення $\Delta_1(\lambda_1)$ і $\Delta_1(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K. Припустимо, що при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin RadK$ зображення $\Delta_1(\lambda_1)$ і $\Delta_1(\lambda_2)$ K-еквівалентні. Тоді існує така оборотна матриця C над кільцем K, що

$$D(\lambda_1)C = CD(\lambda_2). \tag{23}$$

Представимо матрицю C у вигляді:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

де C_{ij} – матриця порядку n $(i, j = 1, 2, 3)$.

Використовуючи (22)-(24), одержимо:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2 E_n & tE_n & I_n(\lambda_1) \\ 0 & \varepsilon E_n & tE_n \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^2 E_n & tE_n & I_n(\lambda_2) \\ 0 & \varepsilon E_n & tE_n \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2 C_{11} + tC_{21} + I_n(\lambda_1)C_{31} & \varepsilon^2 C_{12} + tC_{22} + I_n(\lambda_1)C_{32} & \varepsilon^2 C_{13} + tC_{23} + I_n(\lambda_1)C_{33} \\ \varepsilon C_{21} + tC_{31} & \varepsilon C_{22} + tC_{32} & \varepsilon C_{23} + tC_{33} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon^2 C_{11} & tC_{11} + \varepsilon C_{12} & C_{11}I_n(\lambda_2) + tC_{12} + C_{13} \\ \varepsilon^2 C_{21} & tC_{21} + \varepsilon C_{22} & C_{21}I_n(\lambda_2) + tC_{22} + C_{23} \\ \varepsilon^2 C_{31} & tC_{31} + \varepsilon C_{32} & C_{31}I_n(\lambda_2) + tC_{32} + C_{33} \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що

$$C_{21} = C_{31} = C_{32} = 0, \tag{25}$$

$$C_{11} \equiv C_{22} \equiv C_{33} (modRadK), \tag{26}$$

$$I_n(\lambda_1)C_{33} \equiv C_{11}I_n(\lambda_2)(modRadK). \tag{27}$$

Із (26) і (27) одержимо, що

$$I_n(\lambda_1)C_{11} \equiv C_{11}I_n(\lambda_2)(modRadK). \tag{28}$$

Так як $\lambda_1 - \lambda_2 \notin RadK$, то C_{11} – необоротна матриця над кільцем K.

Із (25) і (26) дістаємо, що

$$C \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{11} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{11} \end{pmatrix} (modRadK). \tag{29}$$

Отже, C – необоротна матриця над кільцем K. Із одержаного протиріччя випливає, що K-зображення $\Delta_1(\lambda_1)$ і $\Delta_1(\lambda_2)$ не є еквівалентними над кільцем K при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin RadK$.

Далі покажемо, що $\Delta_1(\lambda)$ є нерозкладним K-зображенням групи $G = \langle a \rangle$. Якщо в (23) покласти $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і вважати, що C – довільна матриця порядку $3n$ над кільцем K, то, використовуючи (23)-(29), одержимо:

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} (modRadK),$$

де $\alpha \in K$. Тоді матриця C або $E_{3n} - C$ є оборотною над кільцем K. З леми 1 дістанемо, що $\Delta_1(\lambda)$ є нерозкладним зображенням групи $G = \langle a \rangle$ над кільцем K. Отже, існує нескінченна кількість нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень степеня $3n$ групи $G = \langle a \rangle$. Теорема доведена.

Теорема 4. *Нехай $G = \langle a \rangle$ – циклічна група порядку 2^s $(s > 1)$ і K – нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики два. Якщо $2K \neq RadK$ і $K/RadK$ – нескінченне поле, то число нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень степеня $4n$ групи G нескінченне (n – довільне натуральне число).*

Доведення. Очевидно, теорему досить довести для випадку, коли $G = \langle a \rangle$ – циклічна група порядку 4.

Оскільки $2K$ не є максимальним ідеалом кільця K, то існує такий необоротний елемент t кільця K, що $t \notin 2K$. Неважко показати, що відображення

$$\Delta_2(\lambda) : a \to \begin{pmatrix} 0 & -E_n & tE_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda) \\ 0 & 0 & -E_n & tE_n \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} = R(\lambda) \tag{30}$$

є матричним K-зображенням групи $G = \langle a \rangle$.

Покажемо, що при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin RadK$ зображення $\Delta_2(\lambda_1)$ і $\Delta_2(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K. Припустимо, що при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin RadK$ зображення $\Delta_2(\lambda_1)$ і $\Delta_2(\lambda_2)$ K-еквівалентні. Тоді існує така оборотна матриця C над кільцем K, що

$$R(\lambda_1)C = CR(\lambda_2). \tag{31}$$

Представимо матрицю C у вигляді:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

де C_{ij} – матриця порядку n $(i, j = 1, 2, 3, 4)$.

Використовуючи (30)-(32), одержимо:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_n & tE_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda) \\ 0 & 0 & -E_n & tE_n \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_n & tE_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda) \\ 0 & 0 & -E_n & tE_n \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} -C_{21}+tC_{31} & -C_{22}+tC_{32} & -C_{23}+tC_{33} & -C_{24}+tC_{34} \\ C_{11}+I_n(\lambda_1)C_{41} & C_{12}+I_n(\lambda_1)C_{42} & C_{13}+I_n(\lambda_1)C_{43} & C_{14}+I_n(\lambda_1)C_{44} \\ -C_{31}+tC_{41} & -C_{32}+tC_{42} & -C_{33}+tC_{43} & -C_{34}+tC_{44} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{12} & -C_{11} & tC_{11}-C_{13} & C_{12}I_n(\lambda_2)+tC_{13}+C_{14} \\ C_{22} & -C_{21} & tC_{21}-C_{23} & C_{22}I_n(\lambda_2)+tC_{23}+C_{24} \\ C_{32} & -C_{31} & tC_{31}-C_{33} & C_{32}I_n(\lambda_2)+tC_{33}+C_{34} \\ C_{42} & -C_{41} & tC_{41}-C_{43} & C_{42}I_n(\lambda_2)+tC_{43}+C_{44} \end{pmatrix}.$$

Звідси одержуємо:

$$C_{41} = C_{42} = C_{43} = C_{31} = C_{32} = 0, \tag{33}$$

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = -C_{21}, \tag{34}$$

$$C_{33} \equiv C_{44}(modRadK), \tag{35}$$

$$C_{11} - C_{21} \equiv C_{33}(modRadK), \tag{36}$$

$$-C_{24} + tC_{34} = C_{12}I_n(\lambda_2) + tC_{13} + C_{14}, \tag{37}$$

$$C_{22}I_n(\lambda_2) + tC_{23} + C_{24} = C_{14} + I_n(\lambda_1)C_{44}. \tag{38}$$

Додамо (37) і (38):

$$C_{22}I_n(\lambda_2) + tC_{23} + tC_{34} = C_{12}I_n(\lambda_2) + tC_{13} + I_n(\lambda_1)C_{44} + 2C_{14},$$

$$(C_{22} - C_{12})I_n(\lambda_2) + tC_{23} + tC_{34} = I_n(\lambda_1)C_{44} + tC_{13} + 2C_{14},$$

$$(C_{22} - C_{12})I_n(\lambda_2) \equiv I_n(\lambda_1)C_{44}(modRadK). \tag{39}$$

Із (34), (35) і (36) маємо:

$$C_{44} \equiv C_{33} \equiv C_{11} + C_{12} \equiv (C_{22} - C_{12})(modRadK). \tag{40}$$

Тоді із (39) і (40) випливає, що

$$C_{44}I_n(\lambda_2) \equiv I_n(\lambda_1)C_{44}(modRadK). \tag{41}$$

Так як $\lambda_1 - \lambda_2 \notin RadK$, то C_{44} – необоротна матриця над кільцем K. Із (33), (34) і (40) дістаємо, що

$$C \equiv \begin{pmatrix} C_{44}+C_{12} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{44}+C_{12} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{44} & C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} (modRadK). \tag{42}$$

Отже, C – необоротна матриця над кільцем K. Із одержаного протиріччя випливає, що K-зображення $\Delta_2(\lambda_1)$ і $\Delta_2(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin RadK$.

Далі покажемо, що $\Delta_2(\lambda)$ є нерозкладним K-зображенням групи G. Якщо в (31) покласти $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і вважати, що C – довільна матриця порядку $4n$ над кільцем K, то, використовуючи (41), одержимо:

$$C_{44} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} (modRadK), \tag{43}$$

де $\alpha \in K$. Нехай

$$D \equiv \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} (modRadK),$$

тоді

$$D^{-1} \equiv \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} (modRadK).$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}+C_{11} & C_{12}+C_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \equiv \qquad (44) \\ &\equiv \begin{pmatrix} C_{11}+C_{12} & C_{12} \\ 0 & C_{11}+C_{12} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} C_{44} & C_{12} \\ 0 & C_{44} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} (modRadK). \end{aligned}$$

Із (42)-(44) дістаємо, що матриця C або $E_{4n} - C$ є оборотною над кільцем K, оскільки існує така оборотна матриця D над кільцем K, що

$$D^{-1}CD \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} (modRadK).$$

Звідси та з леми 1 отримаємо, що $\Delta_2(\lambda)$ є нерозкладним зображенням групи G над кільцем K. Отже, група G має нескінченну кількість нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень степеня $4n$. Теорема доведена.

Теорема 5. *Нехай G – скінченна p-група порядку $|G| > 1$ $(p \neq 2)$, K – локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики p, $\varepsilon \in K$ $(\varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1)$. Якщо K не є дискретно нормованим кільцем, то число нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень степеня $3n$ групи G нескінченне (n – довільне натуральне число).*

Доведення. Очевидно, теорему досить довести для випадку, коли $G = \langle a \rangle$ – циклічна p-група порядку $p > 2$.

Легко бачити, що в кільці K існує такий елемент $u \neq 0$, що $u \in RadK$ і $(u, p) = 1$. Розглянемо матричні K-зображення Γ_i $(i \in \mathbb{N})$ групи $G = \langle a \rangle$ такого вигляду:

$$\Gamma_i : a \to \Gamma_i(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & u^i E_n & I_n(1) \\ 0 & \varepsilon^2 E_n & u^i E_n \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Покажемо, що при $i < j$ зображення Γ_i і Γ_j не еквівалентні над кільцем K. Припустимо, що зображення Γ_i і Γ_j K-еквівалентні. Тоді існує така оборотна матриця C над кільцем K, що

$$\Gamma_i(a)C = C\Gamma_j(a). \tag{46}$$

Очевидно,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}, \tag{47}$$

де C_{ij} – матриця порядку n $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$.

Із (46) і (47) дістаємо:

$$\begin{gathered} u^j C_{11} + \varepsilon^2 C_{12} = \varepsilon C_{12} + u^i C_{22}, \\ u^j C_{22} + C_{23} = \varepsilon^2 C_{23} + u^i C_{33}, \\ C_{11} I_n(1) + u^j C_{12} + C_{13} = \varepsilon C_{13} + u^i C_{23} + I_n(1) C_{33}. \end{gathered} \tag{48}$$

Отже,

$$C_{22} = u^{j-i} C_{11} + (\varepsilon^2 - \varepsilon) C'_{12},$$

де $C_{12} = u^i C'_{12}$. Звідси випливає, що $C_{22} \equiv 0 (mod Rad K)$, тобто C – необоротна матриця над кільцем K. Із отриманого протиріччя дістаємо, що зображення Γ_i і Γ_j при $i \neq j$ не еквівалентні над кільцем K.

Покажемо далі, що Γ_i – нерозкладне K-зображення групи $G = \langle a \rangle$. Покладемо в (46) $i = j$ і будемо вважати, що C – довільна матриця порядку $3n$ над кільцем K. Тоді із (48) одержуємо:

$$\begin{gathered} C_{33} \equiv C_{22} \equiv C_{11} (mod Rad K), \\ C_{11} I_n(1) \equiv I_n(1) C_{11} (mod Rad K). \end{gathered} \tag{49}$$

Із (47), (49) і леми 1 випливає, що Γ_i – нерозкладне матричне K-зображення групи $G = \langle a \rangle$. Теорема доведена.

Теорема 6. *Нехай G – скінченна 2-група порядку $|G| > 2$, K – локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Якщо K не є дискретно нормованим кільцем, то число нееквівалентних нерозкладних матричних K-зображень степеня $4n$ групи G нескінченне (n – довільне натуральне число).*

Доведення. Так як $K/2K$ – нескінченне кільце, то із теореми 1 випливає доведення теореми 6 у випадку, коли G – нециклічна 2-група.

Нехай далі $G = \langle a \rangle$ – циклічна 2-група порядку $2^s (s > 1)$. Розглянемо наступні матричні K-зображення Γ_i $(i \in \mathbb{N})$ групи $G = \langle a \rangle$:

$$\Gamma_i : a \to \Gamma_i(a) = \begin{pmatrix} 0 & -E_n & u^i E_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 & I_n(1) \\ 0 & 0 & -E_n & u^i E_n \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \tag{50}$$

де $u \in RadK$, $u \neq 0$, $(u, 2) = 1$.

Очевидно,

$$\Delta_i : a \to \begin{pmatrix} -E_n & u^i E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

є матричним K-зображенням групи $G = \langle a \rangle$ і при $i \neq j$ зображення Δ_i та Δ_j не будуть K-еквівалентними. Звідси випливає, що при $i \neq j$ зображення Γ_i і Γ_j не будуть K-еквівалентними.

Залишилось показати, що Γ_i — нерозкладне матричне K-зображення групи $G = \langle a \rangle$. Нехай C – така матриця порядку $4n$ над кільцем K, що

$$\Gamma_i(a)C = C\Gamma_i(a). \tag{51}$$

Очевидно,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Тоді із (51) і (52) одержимо:

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{12} = -C_{21},$$

$$C_{33}u^i + 2C_{34} = u^i C_{44},$$

$$C_{11}u^i - C_{13} = u^i C_{33} - C_{23},$$

$$C_{21}u^i - C_{23} = C_{13},$$

$$C_{12}I_n(1) + C_{13}u^i + C_{14} = -C_{24} + u^i C_{34},$$

$$C_{22}I_n(1) + u^i C_{23} + C_{24} = C_{14} + I_n(1)C_{44}.$$

Звідси випливає, що

$$C_{44} \equiv C_{33}(modRadK),$$

$$C_{33} \equiv (C_{11} + C_{21})(modRadK),$$

$$(C_{21} + C_{11})I_n(1) \equiv I_n(1)C_{44}(modRadK).$$

Отже,

$$C_{44}I_n(1) \equiv I_n(1)C_{44}(modRadK).$$

Звідси та з доведення теореми 4 дістаємо, що Γ_i — нерозкладне матричне K-зображення групи $G = \langle a \rangle$. Теорема доведена.

1. *Roggenkamp K. W.* Gruppenringe von unendlichem Darstellungstyp // Math. Z., 1967. – **96**, №5. – P. 393-398.
2. *Каш Ф.* Модули и кольца. – Москва: Мир, 1981. – 368 с.

Одержано