

УДК 512.84

**А. А. Кириллюк** (Ужгородский нац. ун-т)

## КОНЕЧНЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ $GL(3, \mathbb{Z}_p)$

All finite subgroups of the group  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$  ( $\mathbb{Z}_p$  – is the ring of the rational  $p$ -adic integers) are described up to conjugacy for  $n \leq 3$ .

Всі скінченні підгрупи групи  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$  ( $\mathbb{Z}_p$  – кільце цілих раціональних  $p$ -адичних чисел) описані з точністю до спряженості для  $n \leq 3$ .

Пусть  $K$  – область целостности с единицей,  $\mathbb{Q}_p$  – поле рациональных  $p$ -адических чисел с кольцом целых величин  $\mathbb{Z}_p$ ,  $\bar{\mathbb{Z}}_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$  и  $GL(n, K)$  – полная линейная группа степени  $n$  над кольцом  $K$ .

Все конечные подгруппы группы  $GL(n, K)$  описаны с точностью до сопряженности в случае, когда  $K = \mathbb{Z}$  – кольцо целых рациональных чисел и  $n \leq 4$  (см. [1, 2]). В [3] описаны с точностью до сопряженности все неприводимые конечные подгруппы группы  $GL(5, \mathbb{Z})$ .

В настоящей работе на основании методов теории целочисленных представлений групп классифицируются с точностью до сопряженности конечные подгруппы группы  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$  при  $n \leq 3$ .

Введем некоторые обозначения. Пусть  $A, B, C \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ . Подгруппу  $V \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ , порождённую матрицами  $A$  и  $B$ , обозначим  $V = \{A, B\}$ , а через  $W = \{V, C\}$  – подгруппу группы  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ , порождённую матрицами  $A, B$  и  $C$ .  $C_m$  обозначает циклическую группу порядка  $m$ ,  $G \times H$  – прямое произведение групп  $G$  и  $H$ . Символами  $D_m, K_m, A_m, S_m$  обозначим группы диэдра и кватернионов порядка  $2m$ , знакопеременную и симметрическую группы степени  $m$  соответственно. Обозначим далее через  $\bar{A}$  матрицу, полученную из матрицы  $A \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$  приведением всех элементов  $A$  по модулю идеала  $p\bar{\mathbb{Z}}_p$ . Пусть

$$f : GL(n, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow GL(n, \bar{\mathbb{Z}}_p) \tag{1}$$

– гомоморфизм Минковского, при котором для  $A \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$   $f(A) = \bar{A}$ .

В дальнейшем часто будут использоваться следующие леммы:

**Лемма 1** (см. [4]). Пусть  $H$  – конечная подгруппа группы  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ .  $H$  изоморфна некоторой подгруппе  $\bar{H}_1$  группы  $GL(n, \bar{\mathbb{Z}}_p)$  при  $p \neq 2$  и  $H \cong \bar{H}_2 \subset GL(n, \bar{\mathbb{Z}}_4)$  при  $p = 2$  ( $\bar{\mathbb{Z}}_4 = \mathbb{Z}_2/4\mathbb{Z}_2$ ).

**Лемма 2** (см. [4]). Пусть  $V_1$  и  $V_2$  – конечные  $p'$ -подгруппы группы  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$  и  $\bar{V}_i = f(V_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Группы  $V_1$  и  $V_2$  тогда и только тогда сопряжены в группе  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ , когда  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$  сопряжены в группе  $GL(n, \bar{\mathbb{Z}}_p)$ .

Так как всякая конечная  $p'$ -подгруппа группы  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$  вполне приводима и любая  $p'$ -подгруппа из  $GL(n, \bar{\mathbb{Z}}_p)$  поднимается до некоторой конечной  $p'$ -подгруппы группы  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ , то в силу леммы 2 описание с точностью до сопряженности конечных  $p'$ -подгрупп группы  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$  сводится к описанию несопряженных неприводимых  $p'$ -подгрупп группы  $GL(n, \bar{\mathbb{Z}}_p)$ . Поскольку группа  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$  при  $n \leq 3$  и  $p > 3$  не содержит  $p$ -подгрупп, а неприводимые

подгруппы группы  $GL(n, \bar{\mathbb{Z}}_p)$  ( $n \leq 3$ ) описаны в [6–8], из вышесказанного получаем описание с точностью до сопряженности всех конечных подгрупп группы  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$  ( $n \leq 3; p > 3$ ).

Таким образом при  $n \leq 3$  осталось классифицировать несопряженные конечные подгруппы группы  $GL(n, \mathbb{Z}_p)$  лишь для  $p = 2$  и  $p = 3$ . Такая классификация приводится ниже.

1. Конечные подгруппы группы  $GL(n, \mathbb{Z}_2)$  ( $n \leq 3$ ).

Приведем следующий результат из [4].

**Предложение 1** [4]. *Конечные подгруппы группы  $GL(2, \mathbb{Z}_2)$  с точностью до сопряженности исчерпываются следующими группами:*

1) *абелевыми группами*

$$V_0 = \{E\}; V_1 = \{-E\}; V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}; V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} = \{\tilde{\varepsilon}\}; V_5 = \{V_2, -E\}; V_6 = \{V_3, -E\};$$

$$V_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{\tilde{i}\}; V_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{-\tilde{\varepsilon}\},$$

где  $V_0 \cong C_1$ ;  $V_1 \cong V_2 \cong V_3 \cong C_2$ ;  $V_4 \cong C_3$ ;  $V_5 \cong V_6 \cong C_2 \times C_2$ ;  $V_7 \cong C_4$ ;  $V_8 \cong C_6$ ,  $E$  – единичная матрица;

2) *неабелевыми группами*

$$U_1 = \{\tilde{\varepsilon}, V_3\}; U_2 = \{\tilde{i}, V_3\}; U_3 = \{-\tilde{i}, V_3\}; U_4 = \left\{ \tilde{\varepsilon}, \begin{pmatrix} \theta & \tau \\ \theta + \tau & -\theta \end{pmatrix} \right\} = \{\tilde{\varepsilon}, \tilde{i}_1\},$$

где  $(\theta, \tau)$  – некоторое решение уравнения  $x^2 + xy + y^2 = -1$  в кольце  $\mathbb{Z}_2$ ,  $U_1 \cong S_3$  :  $a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$ ;  $U_2 \cong D_4$  :  $a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$ ;  $U_3 \cong D_6$  :  $a^6 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$ ;  $U_4 \cong G_1$  :  $a^3 = b^4 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$ .

Пусть  $W$  – конечная подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ . В силу леммы 1 имеем

$$|W| \mid 2^{12} \cdot 3 \cdot 7. \quad (2)$$

**Предложение 2.** *С точностью до сопряженности  $p$ -подгруппы группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  исчерпываются группами  $V_1, \dots, V_{38}$ , где*

1)  $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix} \right\}$  – подгруппа, изоморфная группе  $C_3$ ;

2)  $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \right\} = \{\tilde{\varepsilon}\}$  – подгруппа, изоморфная группе  $C_7$

( $\alpha = \xi + \xi^2 + \xi^4$ ,  $\xi$  – первообразный корень степени 7 из 1);

3)  $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = \{A_1, B_1, -E\}$ ;

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = \{A_2, B_2, -E\} -$$

подгруппы, изоморфные группе  $D_4 \times C_2$ ;

$$V_5 = \{A_1, B_1\}; V_6 = \{A_1, -B_1\}; V_7 = \{-A_1, B_1\}; V_8 = \{-A_1, -B_1\};$$

$V_9 = \{A_2, B_1\}; V_{10} = \{A_2, -B_1\}; V_{11} = \{-A_2, B_1\}; V_{12} = \{-A_2, -B_1\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $D_4$ ;

$$V_{13} = \{A_1^2, B_1, -E\}; V_{14} = \{A_1^2 B_1, B_1, -E\}; V_{15} = \{A_2^2, B_1, -E\};$$

$V_{16} = \{A_2^2 B_1, B_1, -E\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $C_2 \times C_2 \times C_2$ ;

$V_{17} = \{A_1, -E\}; V_{18} = \{A_2, -E\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $C_4 \times C_2$ ;

$$V_{19} = \{A_1^2, -E\}; V_{20} = \{A_1^2, B_1\}; V_{21} = \{B_1, -E\}; V_{22} = \{A_1^2, -B_1\}; V_{23} = \{-A_1^2, B_1\};$$

$$V_{24} = \{A_1 B_1, -A_1^2\}; V_{25} = \{A_1 B_1, A_1^2\}; V_{26} = \{A_2^2, B_1\}; V_{27} = \{A_2^2, -B_1\};$$

$V_{28} = \{A_2 B_1, A_2^2\}; V_{29} = \{-A_2^2, B_1\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $C_2 \times C_2$ ;

$V_{30} = \{A_1\}; V_{31} = \{-A_1\}; V_{32} = \{A_2\}; V_{33} = \{-A_2\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $C_4$ ;

$V_{34} = \{-E\}; V_{35} = \{-A_1^2\}; V_{36} = \{A_1^2\}; V_{38} = \{B_1\}; V_{39} = \{-B_1\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $C_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $H_p$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ . В силу (2)  $p \leq 7$ . Из [9] и предложения 1 вытекает, что  $H_2 \cong D_4 \times C_2$  и  $H_3 \cong C_3$ . Покажем, что  $H_7 \cong C_7$ . Очевидно,

$$\Phi_7(x) = f_1(x) \cdot f_2(x), \tag{3}$$

где  $\Phi_7(x)$  – полином деления круга порядка 7, а  $f_i(x)$  – неприводимый над  $\mathbb{Z}_2$  полином степени 3 ( $i = 1, 2$ ). Если  $\xi$  – первообразный корень степени 7 из 1, то над кольцом  $\mathbb{Z}_2[\xi]$  имеет место разложение

$$\Phi_7(x) = (x - \xi) \cdots (x - \xi^6). \tag{4}$$

Пусть  $G$  – группа Галуа поля  $\mathbb{Q}_2(\xi)$  над полем  $\mathbb{Q}_2$ . Легко видеть, что  $G = \langle \varphi \rangle$ , где  $\varphi^3 = 1$  и  $\varphi(\xi) = \xi^3$ . Тогда из (3) и (4) вытекает

$$f_1(x) = (x - \xi)(x - \xi^2)(x - \xi^6) = x^3 - \alpha x^2 - (\alpha + 1)x - 1,$$

где  $\alpha = \xi + \xi^2 + \xi^4$ . Поскольку  $\varphi(\alpha) = \alpha$ , то  $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ . Полиному  $f_1(x)$  соответствует неприводимое  $\mathbb{Z}_2$ -представление группы  $C_7 = \langle a \rangle$ :

$$\Gamma : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \tilde{\xi}.$$

Легко проверить, что группа  $I_m \Gamma$  – единственная с точностью до сопряженности подгруппа порядка 7 группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ . Отсюда получаем, что  $H_7 \cong C_7$  и  $H_7$

сопряжена с  $I_m\Gamma$  в  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ . Используя предложение 1 нетрудно показать, что 3-подгруппа Силова группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  сопряжена с группой  $V_1$ . Опишем теперь 2-подгруппы группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ . В силу [9] и предложения 1 силовская 2-подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  изоморфна группе

$$D_4 \times C_2 : a^4 = b^2 = c^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}, ac = ca, bc = cb.$$

Пусть  $\Gamma$  – точное  $\mathbb{Z}_2$ -представление степени 3 группы  $D_4 \times C_2$ . Из предложения 1 и [10] вытекает, что  $\Gamma$  можно представить в виде:

$$\Gamma : a \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \beta \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma_a, b \rightarrow \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma_b, c \rightarrow \Gamma_c,$$

где  $\gamma, \delta = \pm 1; \beta = 0, 1$ . Из соотношений  $\Gamma_a\Gamma_c = \Gamma_c\Gamma_a, \Gamma_b^2 = E$  и  $\Gamma_b\Gamma_c = \Gamma_c\Gamma_b$  легко получить, что

$$\Gamma_c = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \pm D, \Gamma_c = \pm E.$$

Легко видеть, что группа  $U_1 = \{\Gamma_a, \Gamma_b, \pm D\}$  сопряжена в  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  с группой  $U_2 = \{\Gamma_a, \Gamma_b, -E\}$ , а группы  $V_3$  и  $V_4$  не сопряжены.

Так как всякая 2-подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  содержится в некоторой силовской 2-подгруппе  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ , то из вышесказанного можно получить описание с точностью до сопряженности всех 2-подгрупп группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ . Предложение доказано.

**Следствие 1.** Если  $W$  – конечная подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ , то

$$|W| |2^4 \cdot 3 \cdot 7. \quad (5)$$

**Лемма 3.** Пусть  $K$  – коммутативное кольцо с 1,  $G$  – конечная группа и  $H \leq G$ . Пусть  $\tilde{H}$  – подгруппа группы  $GL(n, K)$ , изоморфная  $H$  и  $\mathfrak{N}(G, \tilde{H})$  – множество всех таких представителей классов сопряженных подгрупп группы  $GL(n, K)$ , изоморфных группе  $G$ , которые содержат  $\tilde{H}$ . Если  $\tilde{G}$  – подгруппа группы  $GL(n, K)$ , изоморфная  $G$ , то  $\tilde{G}$  тогда и только тогда сопряжена с некоторой группой из  $\mathfrak{N}(G, \tilde{H})$ , когда  $\tilde{G}$  содержит подгруппу  $\tilde{N}$ , сопряженную с  $\tilde{H}$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $\tilde{G}$  сопряжена в  $GL(n, K)$  с некоторой группой  $U \subset \mathfrak{N}(G, \tilde{H})$ , т.е. существует матрица  $C \in GL(n, K)$ , такая, что  $C^{-1}\tilde{G}C = U$  и  $\{\tilde{N}_\alpha | \alpha \in J\}$  – все подгруппы группы  $\tilde{G}$ , изоморфные  $H$ . Тогда  $C^{-1}\tilde{N}_\alpha C \subset U$  и найдется такое  $\alpha_0 \in J$ , что  $C^{-1}\tilde{N}_{\alpha_0}C = \tilde{H}$ .

Достаточность. Пусть  $\tilde{N} \subseteq \tilde{G}$  сопряжена с  $\tilde{H}$ , т.е.  $C^{-1}\tilde{N}C = W$  – группа, содержащая  $\tilde{H}$  и, следовательно, сопряжена с некоторой группой из  $\mathfrak{N}(G, \tilde{H})$ . Лемма доказана.

**Предложение 3.** Конечные подгруппы порядков  $2^m \cdot 3$  ( $1 \leq m \leq 4$ ) группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  с точностью до сопряженности исчерпываются группами  $W_1, \dots, W_{30}$ , где

1)  $W_1 = \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\varepsilon} \end{array} \right) \right\}; W_2 = \left\{ \left( \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\varepsilon} \end{array} \right) \right\}; W_3 = \left\{ \left( \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{array} \right) \right\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $C_6$ ;

2)  $W_4 = \{V_1, B_1\}; W_5 = \{V_1, -B_1\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $S_3$ ;

3)  $W_6 = \{W_3, -E\}$  – подгруппа, изоморфная группе  $C_6 \times C_2$ ;

4)  $W_7 = \{W_1, B_1\}; W_8 = \{W_2, -B_1\}; W_9 = \{W_3, B_1\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $D_6$ ;

5)  $W_{10} = \left\{ V_1, \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{i}_1 \end{array} \right) \right\}; W_{11} = \left\{ V_1, \left( \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & \tilde{i}_1 \end{array} \right) \right\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $G_1 : a^3 = b^4 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$ ;

6)  $W_{12} = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \right\} = \{A_3, B_2\}; W_{13} = \left\{ A_3, \left( \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \right\};$

$W_{14} = \left\{ A_3, \left( \begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \right\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $A_4 : a^3 = b^2 = (ab)^2 = 1$ ;

7)  $W_{15} = \{W_8, -E\}; W_{16} = \{W_8, A_1^2\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $D_6 \times C_2$ ;

8)  $W_{17} = \{W_{10}, -E\}; W_{18} = \{W_{11}, -E\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $G_1 \times C_2$ ;

9)  $W_{19} = \{W_{12}, -E\}; W_{20} = \{W_{13}, -E\}; W_{21} = \{W_{14}, -E\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $A_4 \times C_2$ ;

10)  $W_{22} = \left\{ A_3, \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\} = \{A_3, B_3\}; W_{23} = \{A_3, -B_3\};$

$W_{24} = \left\{ A_3, \left( \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\} = \{A_3, B_4\}; W_{25} = \{A_3, -B_4\};$

$W_{26} = \left\{ A_3, \left( \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\} = \{A_3, B_5\}; W_{27} = \{A_3, -B_5\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $S_4 : a^3 = b^4 = (ab)^2 = 1$ ;

11)  $W_{28} = \{W_{22}, -E\}; W_{29} = \{W_{24}, -E\}; W_{30} = \{W_{27}, -E\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $S_4 \times C_2$ .

**Доказательство.** Используя результаты работ [10–12] нетрудно получить описание с точностью до сопряженности всех подгрупп порядка  $\leq 24$  группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ .

Пусть теперь  $W$  – подгруппа порядка 48 группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  и  $P$  – силовская 2-подгруппа группы  $W$ . Тогда  $|P| = 2^4$ . В силу предложения 2  $P = \{P_1, -E\}$ , где  $P_1 = P \cap SL(3, \mathbb{Z}_2)$ . Тогда  $W = \{V, -E\}$ , где  $V$  – подгруппа порядка 24 группы  $SL(3, \mathbb{Z}_2)$  и силовская 2-подгруппа  $V$  изоморфна  $D_4$ . Поэтому из опи-

сания подгрупп порядка 24, группы  $SL(3, \mathbb{Z}_2)$ , силовская 2-подгруппа которых изоморфна  $D_4$  вытекает, что  $V$  сопряжена с одной из групп  $W_{22}, W_{24}$  или  $W_{27}$ . Таким образом  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  содержит с точностью до сопряженности 3 подгруппы порядка 48. Предложение доказано.

Для описания групп порядка  $2^m \cdot 3^s \cdot 7^k$  ( $1 \leq m \leq 4$ ;  $s, k = 0, 1$ ;  $s + k \neq 0$ ) нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 4.** Пусть  $G$  – группа порядка  $2^m \cdot 3 \cdot 7$  ( $m = 2, 3, 4$ ). Если  $G$  не является разрешимой группой, то либо  $G \cong PSL_2(7)$  – простая группа при  $m = 3$ , либо  $G$  содержит нормальную подгруппу  $H$  такую что  $H \cong PSL_2(7)$  или  $G/H \cong PSL_2(7)$  при  $m = 4$ .

Доказательство леммы нетрудно получить на основании теоремы Шура о расщеплении (см. [13]).

**Предложение 4.** Подгруппы порядка  $2^m \cdot 3^s \cdot 7$  ( $0 \leq m \leq 4$ ;  $s = 0, 1$ ) группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  с точностью до сопряженности исчерпываются группами  $U_1, \dots, U_5$ , где

$$1) U_1 = \{-\tilde{\xi}\} - \text{подгруппа, изоморфная } C_{14};$$

$$2) U_2 = \left\{ \tilde{\xi}, \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} - \text{подгруппа, изоморфная группе } G_2 : a^7 = b^3 = 1,$$

$$b^{-1}ab = a^2 \ (\alpha = \xi + \xi^2 + \xi^4; \ \xi^7 = 1);$$

$$3) U_3 = \{U_2, -E\} - \text{подгруппа, изоморфная группе } G_2 \times C_2;$$

$$4) U_4 = \left\{ \tilde{\xi}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha - 1 \\ 0 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} - \text{подгруппа, изоморфная группе}$$

$$G_3 \cong PSL_2(7); \ a^7 = b^2 = (ab) = (a^4b)^4 = 1;$$

$$5) U_5 = \{U_4, -E\} - \text{подгруппа, изоморфная группе } G_3 \times C_2.$$

**Доказательство.** Пусть  $T$  – подгруппа порядка  $2^m \cdot 7$  группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ . Если  $m = 1$ , то существуют две неизоморфные абстрактные группы порядка 14:  $C_{14}$  и  $D_7 : a^7 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}$ . Поскольку  $C_{14} \cong C_7 \times C_2$ , то из леммы 3 нетрудно получить, что  $U_1$  – единственная с точностью до сопряженности подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ , изоморфная  $C_{14}$ . Предположим, что группа  $D_7$  обладает точным  $\mathbb{Z}_2$ -представлением  $\Gamma$  степени 3. Очевидно,  $\Gamma$  – абсолютно неприводимо, откуда  $3 \mid |D_7|$ , что абсурдно. Таким образом,  $D_7$  не вложима в  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ .

Покажем, что группа  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  не содержит подгрупп порядка  $2^m \cdot 7$  ( $m \geq 2$ ). Предположим противное, пусть  $G$  – абстрактная группа порядка  $2^m \cdot 7$  ( $m \geq 2$ ), обладающая точным  $\mathbb{Z}_2$ -представлением  $\Gamma$  степени 3. Используя [4] легко показать, что  $G$  – неабелева, а  $\Gamma$  неприводимо. Тогда  $\Gamma$  – абсолютно неприводимо и, значит  $3 \mid 2^m \cdot 7$ , что невозможно. Отсюда  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  не содержит подгрупп порядка  $2^m \cdot 7$  при  $m \geq 2$ .

Пусть  $T$  – подгруппа порядка 21 группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ . Очевидно,  $T$  – неабелева. Тогда  $T \cong G_2$ . Очевидно,

$$\Gamma : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \tilde{\xi}, b \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha = \xi + \xi^2 + \xi^4; \xi^7 = 1) -$$

точное  $\mathbb{Z}_2$ -представление степени 3 группы  $G_2$ . Отсюда и из лемм 1, 2 вытекает, что группа  $U_2 = I_m \Gamma$  – единственная с точностью до сопряженности подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ ,  $|U_2| = 21$ .

Пусть  $G$  – абстрактная группа порядка 42. Тогда  $G$  либо абелева, либо метациклическая группа, порожденная двумя образующими  $a$  и  $b$  с определяющими соотношениями

$$1) a^{14} = b^3 = 1, b^{-1}ab = a^9 \text{ или } 2) a^7 = b^6 = 1, b^{-1}ab = a^5.$$

Если  $T$  – подгруппа порядка 42 группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ , то очевидно  $T$  – неабелева группа. Легко видеть, что группа 1) изоморфна  $G_2 \times C_2$  и из предыдущего вытекает, что  $U_3$  – единственная с точностью до сопряженности подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ , изоморфная  $G_2 \times C_2$ .

Предположим теперь, что группа 2) вложима в  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  и  $\Gamma$  – точное  $\mathbb{Z}_2$ -представление степени 3 этой группы. Тогда можно предполагать, что  $\Gamma$  имеет вид:  $\Gamma : a \rightarrow \tilde{\xi}, b \rightarrow \Gamma_b$ . Легко проверить, что  $tr \tilde{\xi} \neq tr \tilde{\xi}^5$  и  $\Gamma$  не точно, т.е. группа 2) не вкладывается в  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ .

Покажем, что группа  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$  не содержит разрешимых подгрупп порядка  $2^m \cdot 3 \cdot 7$  при  $m \geq 2$ . Действительно, если  $V$  – разрешимая подгруппа порядка  $2^m \cdot 3 \cdot 7$  ( $m \geq 2$ ), то  $V$  содержит холловскую подгруппу порядка  $2^m \cdot 7$ , что противоречит доказанному выше.

Пусть теперь  $G_3 : a^7 = b^2 = (ab)^3 = (a^4b)^4 = 1$  – группа, изоморфная простой группе  $PSL_2(7)$ . Покажем, что  $G_3$  обладает точными  $\mathbb{Z}_2$ -представлениями степени 3. В силу результатов Маранды (см. [5]) это утверждение достаточно доказать для кольца классов вычетов  $\mathbb{Z}_{2^k}$  по  $\text{mod } 2^k$ , где  $k > k_0$ , а  $k_0$  определяется из равенства  $|G_3| \mathbb{Z}_2 = 2^{k_0} \mathbb{Z}_2$ . Очевидно,  $k_0 = 3$ .

Используя предложение 2, легко видеть, что представлениями

$$\Delta_1 : a \rightarrow 1; \Delta_2 : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}; \Delta_3 : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

исчерпываются все неэквивалентные неприводимые  $\mathbb{Z}_2$ -представления группы  $C_7 = (a)$ . Обозначим через  $\Delta_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, 3$ )  $\mathbb{Z}_{2^k}$ -представления группы  $C_7 = (a)$ , такие, что

$$\overline{\Delta}_i^{(k)}(a) \equiv \Delta_i(a) \pmod{2^k \mathbb{Z}_2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Очевидно, представлениями  $\overline{\Delta}_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) исчерпываются до эквивалентности неприводимые  $\mathbb{Z}_{2^k}$ -представления группы  $C_7$ .

1) Пусть  $k = 1$ , тогда  $GL(3, 2) = GL(3, \mathbb{Z}_2)$ . Легко видеть, что

$$\overline{\Gamma}_1 : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_1, b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_1$$

задает  $\mathbb{Z}_{2^k}$ -представления группы  $C_3$ . Очевидно,  $\overline{\Gamma}_1$  – точно.

Пусть  $U_1 = \{A_1, B_1\}$ ,  $U_2 = \{A_1, B'_1\}$  – группы, изоморфные группе  $G$ ,  $U_i = GL(3, 2)$ . Тогда существует автоморфизм  $\varphi$  группы  $GL(3, 2)$  такой, что  $\varphi(A_1) = A_1$ ,  $\varphi(B_1) = B'_1$ . Как известно (см. [13]), все автоморфизмы группы  $GL(3, 2)$  стандартны. Тогда  $\varphi$  – внутренний автоморфизм группы  $GL(3, 2)$ , либо  $\varphi = \psi \cdot \tau$ , где  $\psi$  – внутренний, а  $\tau$  – контраградиентный автоморфизм группы  $GL(3, 2)$ . В этом последнем случае

$$\psi \cdot \tau(A_1) = \psi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1 = \psi(A'_1)$$

и найдется матрица  $C \in GL(3, 2)$ , такая, что  $C^{-1}A_1^1C = A_1$ , что невозможно. Поэтому  $\varphi$  – внутренний автоморфизм  $GL(3, 2)$ , т.е.  $\bar{\Gamma}_1$  единственное с точностью до эквивалентности точное  $\bar{\mathbb{Z}}_2$ -представление степени 3 вида  $a \rightarrow A_1$ ,  $b \rightarrow \Gamma_b$  группы  $G_3$ .

Заметим, что в силу предложения 2 и леммы 3 можно ограничиться рассмотрением  $\bar{\mathbb{Z}}_{2^k}$ -представлений вида

$$\bar{\mathbb{Z}} : a \rightarrow \bar{\Delta}_2^{(k)}(a), \quad b \rightarrow B$$

группы  $G_3$ , где  $\Delta_2(a) \equiv \bar{\Delta}_2^{(k)}(a) \pmod{2^k \mathbb{Z}_2}$ .

2) Пусть  $k = 2$ . Легко видеть, что  $A_1 \equiv A_1^{(2)} \pmod{2}$ , где

$$A_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\bar{\Gamma}^{(2)} : a \rightarrow \Delta_1^{(2)}$ ,  $b \rightarrow B$  – некоторое точное  $\bar{\mathbb{Z}}_4$ -представление степени 3 группы  $G_3$ . Так как  $B \equiv B_1 \pmod{2}$ , то  $B$  имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 1 + x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & 1 + y_2 & 1 + y_3 \\ z_1 & z_2 & 1 + z_3 \end{pmatrix},$$

где  $x_i, y_i, z_i \equiv 0 \pmod{2}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Из определяющих соотношений группы  $G_3$  легко получить, что

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & y + 2 \\ y & z - 1 & z - 1 \\ 0 & 0 & z + 1 \end{pmatrix},$$

где  $y, z = 0, 2$ . Отсюда получаем два неэквивалентных точных представления степени 3 группы  $G_3$ :

$$\bar{\Gamma}_1^{(2)} : a \rightarrow A_1^{(2)}, b \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\bar{\Gamma}_2^{(2)} : a \rightarrow A_1^{(2)}, b \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



такие, что  $\bar{\Gamma}_1^{(2)}(g) \equiv \bar{\Gamma}_2^{(2)}(g) \equiv \bar{\Gamma}_1(g) \equiv \bar{\Gamma}_1(g) \pmod{2}$  для всех  $g \in G_3$ .

3) Пусть  $k = 4$ . Тогда всякое точное  $\bar{\mathbb{Z}}_{2^4}$ -представление  $\bar{\Gamma}_i^{(4)}$  группы  $G_3$  такое, что  $\bar{\Gamma}_i^{(4)} \equiv \bar{\Gamma}_1^{(2)} \pmod{4}$  соответственно имеет вид:

$$\bar{\Gamma}_1^{(4)} : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = A_1^{(4)}, b \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 3 & x_2 & x_3 + 2 \\ y_1 & y_2 + 3 & y_3 + 2 \\ z_1 & z_2 & z_3 + 1 \end{pmatrix} = B_1^{(4)};$$

$$\bar{\Gamma}_2^{(4)} : a \rightarrow A_1^{(4)}, b \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 3 & x_2 & x_3 + 2 \\ y_1 + 2 & y_2 + 3 & y_3 + 3 \\ z_1 & z_2 & z_3 + 1 \end{pmatrix} = B_2^{(4)}.$$

Рассуждая аналогично случаю 2), нетрудно получить, что в этом случае группа  $G_3$  обладает с точностью до эквивалентности одним точным  $\bar{\mathbb{Z}}_{2^4}$ -представлением степени 3:

$$\bar{\Gamma}^{(4)} : a \rightarrow A_1^{(4)}, b \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем  $\bar{\Gamma}^{(4)}(g) \equiv \bar{\Gamma}^{(2)}(g) \pmod{4}$  для всех  $g \in G_3$ , а представление  $\bar{\Gamma}_2^{(4)}$  не поднимается до точного  $\bar{\mathbb{Z}}_{2^4}$ -представления  $\bar{\Gamma}_2^{(4)}$  степени 3 группы  $G_3$ . Согласно предложению 2 и лемме 2 достаточно рассматривать  $\mathbb{Z}_2$ -представление степени 3 группы  $G_3$  вида:  $a \rightarrow \Delta_2(a), b \rightarrow B$ .

Легко видеть, что отображение

$$\Gamma : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, b \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha - 1 \\ 0 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

задает точное  $\mathbb{Z}_2$ -представление степени 3 группы  $G_3$ . Тогда в силу доказанного выше,  $\Gamma$  – единственное с точностью до эквивалентности точное  $\mathbb{Z}_2$ -представление степени 3 вида  $a \rightarrow \Delta_2(a), b \rightarrow B$  группы  $G_3$  и  $U_3 = I_m \Gamma$  – единственная с точностью до сопряженности подгруппа порядка 168 группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ .

Пусть  $G$  – группа порядка  $2^4 \cdot 3 \cdot 7$ . Из предыдущих рассуждений вытекает, что если  $G_1$  – подгруппа порядка  $2^4 \cdot 3 \cdot 7$  группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ , то  $G_1$  неразрешима. Тогда, в силу леммы 4, возможны случаи:

1)  $G$  содержит такую нормальную подгруппу  $H$ , что  $H \approx PSL_2(7)$ ;

2)  $G$  содержит такую нормальную подгруппу  $H$ , что  $G/H \cong PSL_2(7)$ , где  $G$  – абстрактная группа, изоморфная  $G_1$ . Если  $\Gamma$  – точное  $\mathbb{Z}_2$ -представление степени 3 группы  $G$ , то  $\Gamma$  неприводимо. Тогда  $\Gamma$  абсолютно неприводимо и если  $\mathfrak{z}$  – центр группы  $G$ , то  $|\mathfrak{z}(G)| \leq 2$  и  $G \cong N \times \mathfrak{z}(G)$ , где  $N$  – группа без центра. Рассмотрим случай 1): Пусть  $H \triangleleft G$  и  $H \cong PSL_2(7)$ . Если  $|\mathfrak{z}(G)| = 2$ , то с точностью до изоморфизма  $H$  единственная подгруппа группы  $G$  порядка  $|H| = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$ . Тогда  $G \cong PSL_2(7) \times C_2$ . Если  $G \cong \tilde{G} \subset GL(3, \mathbb{Z}_2)$ , то  $\mathfrak{z}(\tilde{G}) = \{\pm E\}$  и всякое точное  $\mathbb{Z}_2$ -представление степени 3 группы  $G$  имеет вид:  $a \rightarrow \Delta_a, b \rightarrow \Delta_b, c \rightarrow -E$ , где  $\Delta$  – некоторое точное  $\mathbb{Z}_2$ -представление степени 3 группы  $H \cong PSL_2(7)$ . Отсюда и из леммы 4  $U_5$  – единственная с точностью

до сопряженности подгруппа порядка 336 группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ . Если  $|\mathfrak{z}(G)| = 1$ , то существует  $g \in G$  и  $g \notin H$ , такой что  $g^3 H g = H$ . Покажем, что в этом случае  $G$  не обладает точным  $\mathbb{Z}_2$ -представлением степени 3. Предположим противное, пусть  $\Gamma$  – точное  $\mathbb{Z}_2$ -представление степени 3 группы  $G$  и  $\tilde{G} = \Gamma(G)$ . Построим гомоморфизм Минковского  $\rho : GL(3, \mathbb{Z}_2) \rightarrow GL(3, 2)$ , где  $\rho(A) = \bar{A}$  для  $A \in GL(3, \mathbb{Z}_2)$  и матрица  $\bar{A}$  получается из  $A$  приведением всех элементов  $A$  по модулю идеала  $2\mathbb{Z}_2$ . Пусть  $\Gamma(H) = \tilde{H}$ . Тогда  $\rho(\tilde{H}) = GL(3, 2)$ . Пусть  $\rho_{\tilde{G}}$  – ограничение  $\rho$  на подгруппу  $\tilde{G}$ . Пусть далее  $g \in G$  таков, что  $\Gamma(g) = \tilde{g}$  и  $\tilde{g} \notin \tilde{H}$ . Тогда  $\rho_{\tilde{G}}(g) \in Ker \rho_{\tilde{G}}$ . Из изоморфизма  $\tilde{G}/Ker \rho_{\tilde{G}} \cong GL(3, 2)$  следует, что  $|Ker \rho_{\tilde{G}}| = |H_1| = 2$  и  $\tilde{H}_1 \triangleleft \tilde{G}$ . Отсюда  $\tilde{H}_1 = (\tilde{g})$  и  $\tilde{h}^{-1} \tilde{g} \tilde{h} = \tilde{g}$  для всех  $\tilde{h} \in \tilde{H}$  и, значит,  $\mathfrak{z}(\tilde{G}) = \tilde{H}_1$ , что противоречит тривиальности  $\mathfrak{z}(\tilde{G})$ .

Рассмотрим теперь случай 2). Пусть  $H \triangleleft G$  и  $G/H \cong PSL_2(3)$ . Тогда  $G$  содержит нормальную подгруппу  $H_1 \triangleleft G$  содержит нормальную подгруппу  $H_1 \triangleleft G$  порядка  $|H_1| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$  и  $H = \mathfrak{z}(G)$ . Отсюда  $H_1 \cong PSL_2(7)$  и  $G \cong PSL_2(7) \times C_2$ . Таким образом случай 2) сводится к 1). Предложение доказано.

Из предложений 1–4 вытекает полное описание несопряженных конечных подгрупп группы  $GL(3, \mathbb{Z}_2)$ .

## 2. Конечные подгруппы группы $GL(n, \mathbb{Z}_3)$ ( $n \leq 3$ )

Пусть  $W$  – конечная подгруппа группы  $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ . Из леммы 1 вытекает, что

$$|W| \mid 2^4 \cdot 3. \quad (6)$$

**Предложение 5.** Конечные подгруппы группы  $GL(2, \mathbb{Z}_3)$  с точностью до сопряженности исчерпываются следующими группами:

1) абелевыми группами

$$V_0 = \{E\}; V_1 = \{-E\}; V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}; V_3 = \{\tilde{\varepsilon}\}; V_4 = \{\tilde{i}\}; V_5 = \{-\tilde{\varepsilon}\};$$

$$V_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \right\}; V_7 = \{V_2, -E\}, \text{ где } V_0 \cong C_1; V_1 \cong C_2; V_2 \cong C_2; V_3 \cong C_3;$$

$$V_4 \cong C_4; V_5 \cong C_6; V_6 \cong C_8; V_7 \cong C_2 \times C_2 \ (\lambda = \sqrt{-2});$$

2) неабелевыми группами

$$U_1 = \left\{ \tilde{\varepsilon}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}; U_2 = \left\{ \tilde{\varepsilon}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}; U_3 = \{\tilde{i}, V_2\};$$

$$U_4 = \left\{ \tilde{i}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right\}; U_5 = \left\{ -\tilde{\varepsilon}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}; U_6 = \left\{ V_6, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\};$$

где  $U_1, U_2 \cong S_3$ ;  $U_3 \cong D_4$ ;  $U_4 \cong K_4 : a^4 = 1, a^2 = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}$ ;  $U_5 \cong D_6$ ;  $U_6 \cong H : a^8 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^3$  (остальные обозначения см. в формулировке предложения 1).

**Доказательство.** Используя [9] и леммы 1, 2, можно показать, что силовские 2-подгруппы группы  $GL(2, \mathbb{Z}_3)$  сопряжены с группой  $U_6$ , а силовские 3-подгруппы группы  $GL(2, \mathbb{Z}_3)$  сопряжены с группой  $V_3$ . Таким образом, в силу (6) порядок произвольной конечной подгруппы группы  $GL(2, \mathbb{Z}_3)$  делит 48.

Далее, на основании [11, 12] нетрудно получить описание с точностью до сопряженности всех подгрупп группы  $GL(2, \mathbb{Z}_3)$  порядка  $\leq 12$ . Легко показать также, что  $GL(2, \mathbb{Z}_3)$  не содержит подгрупп порядка 24.

В заключение покажем, что  $GL(2, \mathbb{Z}_3)$  не содержит подгруппы порядка 48.

Для доказательства предположим, что  $W$  – подгруппа порядка 48 группы  $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ . Так как  $W$  разрешима, то она содержит подгруппу  $V$  такую, что  $[W : V] = 2$  или  $[W : V] = 3$ . Принимая во внимание, что  $GL(2, \mathbb{Z}_3)$  не содержит подгрупп порядка 24, заключаем, что случай  $[W : V] = 2$  невозможен. Значит  $[W : V] = 3$  и пусть  $V$  – подгруппа порядка 16 группы  $W$ . Тогда, очевидно,  $V$  сопряжена с группой  $U_6$ , где  $U_6 \cong H : a^8 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^3$ . Пусть  $G$  – абстрактная группа, изоморфная группе  $W$ . Тогда  $G/H = (cH)$ , где  $c^3 \in H$  и пусть  $\Gamma : a \rightarrow \Gamma_a, b \rightarrow \Gamma_b, c \rightarrow \Gamma_c$  точное  $\mathbb{Z}_3$ -представление степени 2 группы  $G$ . Так как  $-\tilde{\varepsilon}$  – единственный с точностью до сопряженности элемент порядка 6 в группе  $GL(2, \mathbb{Z}_3)$ , то из  $\Gamma_c^3 \in U_6$  следует, что  $\Gamma_c^3 = \pm E$ . Если  $\Gamma_c^3 = -E$ , то подгруппа группы  $\langle \tilde{\varepsilon} \rangle$  порожденная матрицами  $\Gamma_c$  и  $B_1$  изоморфна группе  $C_{24}$ , что невозможно. Значит,  $c^3 = 1$ . Путем несложных рассуждений показывается, что  $G$  изоморфна одной из следующих групп:

$$T_1 : a^8 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^3, c^3 = 1, c^{-1}ac = a^k, c^{-1}bc = b \quad (k, 2) = 1;$$

$$T_2 : a^8 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^3, c^3 = 1, c^{-1}ac = a^k, c^{-1}bc = a^2b \quad (k, 2) = 1;$$

В обоих случаях  $T_i$  содержит подгруппу порядка 24, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство.

Пусть теперь  $W$  – конечная подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ . По лемме 1

$$|W| \mid 2^5 \cdot 3^3 \cdot 13.$$

**Предложение 6.** *С точностью до сопряженности  $p$ -подгруппы группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$  исчерпываются группами  $V_1, \dots, V_{22}$ , где*

$$1) V_1 = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & \\ 0 & \tilde{\varepsilon} & \end{array} \right) \right\}; V_2 = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \right\} - \text{подгруппы, изоморфные}$$

группе  $C_3$ ;

$$2) V_3 = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{array} \right) \right\} = \{\tilde{\omega}\} - \text{подгруппа изоморфная группе } C_{13}$$

( $\beta = \omega + \omega^3 + \omega^9; \gamma = \omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-9}$ ,  $\omega$  – первообразный корень степени 13 из 1);

$$3) V_4 = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \right\} = \{A_1, B_1, -E\}$$

– подгруппа, изоморфная группе  $H \times C_2$ ;

$$V_5 = \{A_1, B_1\}; V_6 = \{-A_1, B_1\} - \text{подгруппы, изоморфные группе } H;$$

$$V_7 = \{A_1, -E\} - \text{подгруппа, изоморфная группе } C_8 \times C_2;$$

$$V_8 = \{A_1^4, B_1, -E\} - \text{подгруппа, изоморфная группе } C_2 \times C_2 \times C_2;$$

$$V_9 = \{A_1 B_1, A_1^2\}; V_{10} = \{A_1 B_1, -A_1^2\} - \text{подгруппы, изоморфные группе } K_4;$$

$V_{11} = \{A_1^2, B_1\}$ ;  $V_{12} = \{A_1 B_1, A_1^4\}$ ;  $V_{13} = \{A_1 B_1, -A_1^4\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $D_4$ ;

$V_{14} = \{A_1\}$ ;  $V_{15} = \{-A_1\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $C_8$ ;

$V_{16} = \{B_1, -E\}$ ;  $V_{17} = \{A_1^4, -E\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $C_2 \times C_2$ ;

$V_{18} = \{A_1^2\}$ ;  $V_{19} = \{-A_1^2\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $C_4$ ;

$V_{20} = \{-E\}$ ;  $V_{21} = \{B_1\}$ ;  $V_{22} = \{-B_1\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $C_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $H_p$  нетривиальная силовская  $P$ -подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ . В силу [9] и предложения 5  $H_3 \cong C_3$  и  $H_2 \cong H \times C_8$ . Так как  $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$ , то над  $\mathbb{Z}_3$  имеет место разложение

$$\Phi_{13}(x) = f_1(x) \dots f_4(x)$$

полинома деления круга  $\Phi_{13}(x)$  на неприводимые приведенные полиномы  $f_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) степени 3.

Пусть  $\omega$  – первообразный корень степени 13 из 1 и  $\varphi$  – образующий элемент группы Галуа поля  $\mathbb{Q}_3(\omega)$  над  $\mathbb{Q}_3$ . Легко видеть, что  $\varphi(\omega) = \omega^3$  и над кольцом  $\mathbb{Z}_3[\omega]$  имеет место разложение

$$\Phi_{13}(x) = (x - \omega) \dots (x - \omega^{12}).$$

Отсюда можно считать, что

$$f_1(x) = (x - \omega)(x - \omega^3)(x - \omega^9) = x^3 - \gamma x^2 + \beta x - 1, \quad (7)$$

где  $\gamma = \omega + \omega^3 + \omega^9$ ,  $\beta = \omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-9}$ . Разложению (7) соответствует точное  $\mathbb{Z}_3$ -представление степени 3 группы  $C_{13} = (a)$ :

$$\Gamma : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Используя [9] и лемму 2 можно показать, что группа  $I_m \Gamma$  – единственная с точностью до сопряженности подгруппа порядка 13 группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ . Пусть

$$G \cong H \times C_2 : a^8 = b^2 = c^2 = 1, b^{-1}ab = a^3, ac = ca, bc = cb.$$

Из [8] и предложения 5 вытекает, что

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

– единственная с точностью до сопряженности подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ , изоморфная группе  $H \times C_2$ . Поскольку всякая 2-подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$  содержится в некоторой силовской 2-подгруппе этой группы, то из вышесказанного легко получить описание всех несопряженных 2-подгрупп группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ .

Хорошо известно [11], что группа  $C_3 = (a)$  обладает с точностью до эквивалентности двумя точными  $\mathbb{Z}_3$ -представлениями степени 3:

$$\Delta_1 : a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}; \quad \Delta_2 : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим  $V_i = I_m \Delta_i$  ( $i = 1, 2$ ). Так как  $V_2$  неразложима, а  $V_1$  – вполне приводима, то  $V_1$  и  $V_2$  не сопряжены в  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ . Предложение доказано.

**Следствие 2.** *Если  $W$  – конечная подгруппа группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ , то*

$$|W| \mid 2^3 \cdot 3 \cdot 13. \quad (8)$$

**Предложение 7.** *Конечные подгруппы порядков  $2^m \cdot 3$  ( $1 \leq m \leq 5$ ) группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$  с точностью до сопряженности исчерпываются группами  $W_1, \dots, W_{21}$ , где*

- 1)  $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}; W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}; W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\};$   
 $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $C_6$ ;
- 2)  $W_5 = \left\{ V_1, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = \{V_1, B_2\}; W_6 = \left\{ V_1, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{V_1, B_3\};$   
 $W_7 = \{V_1, -B_2\}; W_8 = \{V_1, -B_3\}; W_9 = \{A_2, B_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\};$   
 $W_{10} = \{A_2, -B_4\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $S_3$ ;
- 3)  $W_{11} = \{W_3, -E\}$  – подгруппа, изоморфная группе  $C_6 \times C_2$ ;
- 4)  $W_{12} = \{A_1^4, -E\}$  – подгруппа, изоморфная группе  $A_4$ ;
- 5)  $W_{13} = \{W_3, B_2\}; W_{14} = \{W_4, B_3\}; W_{15} = \{W_2, B_2\}; W_{16} = \{W_1, B_4\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $D_6$ ;
- 6)  $W_{17} = \{W_{12}, -E\}$  – подгруппа, изоморфная группе  $A_4 \times C_2$ ;
- 7)  $W_{18} = \{W_{13}, -E\}$  – подгруппа, изоморфная группе  $D_6 \times C_2$ ;
- 8)  $W_{19} = \left\{ A_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{i} \end{pmatrix} \right\}; W_{20} = \left\{ A_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \tilde{i} \end{pmatrix} \right\}$  – подгруппы, изоморфные группе  $S_4$ ;
- 9)  $W_{21} = \{W_{19}, -E\}$  – подгруппа, изоморфная группе  $S_4 \times C_2$ .

**Доказательство.** Из предложения 7 нетрудно получить, что группами  $W_1, \dots, W_4$  исчерпываются с точностью до сопряженности циклические группы порядка 6 группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ . Описание разложимых точных  $\mathbb{Z}_3$ -представлений степени 3 группы  $S_3$  получаем, используя предложения 5, 7 и определяющие

соотношения группы  $S_3$ . Пусть  $\Gamma$  – неразложимое точное  $\mathbb{Z}_3$ -представление степени 3 группы  $S_3$ . Представим  $S_3$  в виде  $S_3 = H\lambda N$ , где  $H = (a)$ ,  $N = (b)$ . Как известно, неэквивалентные неразложимые  $\mathbb{Z}_3$ -представления группы  $H$  исчерпываются представлениями:

$$\Delta_1 : a \rightarrow 1; \Delta_2 : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \tilde{\varepsilon}; \Delta_3 : a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $M_i$  модуль представления  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Групповое кольцо  $\mathbb{Z}_3 N$  представимо в виде

$$\mathbb{Z}_3 N = \mathbb{Z}_3 N e_1 \oplus \mathbb{Z}_3 N e_2 = I_1 \oplus I_2, \quad (9)$$

где  $e_1 = \frac{1}{2}(1+b)$ ,  $e_2 = \frac{1}{2}(1-b)$  – полная система минимальных попарно ортогональных идемпотентов кольца  $\mathbb{Z}_3 N$ .

По теореме Хигмана всякое неразложимое  $\mathbb{Z}_3$ -представление группы  $S_3$  есть компонента разложения некоторого индуцированного представления силовской 3-подгруппы группы  $S_3$ .

Легко видеть, что в индуцированном модуле  $M_i^{S_3}$  реализуются  $\mathbb{Z}_3$ -представления степени  $i$  ( $i = 1, 2$ ). Рассмотрим модуль  $M_3^{S_3}$ . Очевидно,

$$M_3^{S_3} = \mathbb{Z}_3 S_3 \otimes_{\mathbb{Z}_3 H} \mathbb{Z}_3 H \cong \mathbb{Z}_3 S_3 \quad \text{и} \quad M_3^{S_3} = \mathbb{Z}_3 S_3 e_1 \oplus \mathbb{Z}_3 S_3 e_2 = N_1 \oplus N_2.$$

Модуль  $N_1$  имеет базис  $\{e_1, ae_1, a^2e_1\}$ . Действуя на базисные элементы  $N_1$  элементами группы  $S_3$ , получим

$$be_1 = e_1, \quad bae_1 = a^2be_1, \quad ba^2e_1 = be_1.$$

Таким образом в  $N_1$  реализуется представление

$$\Gamma_1 : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем, что в  $N_2$  реализуется представление

$$\Gamma_2 : a \rightarrow \Gamma_1(a), \quad b \rightarrow -\Gamma_1(b).$$

В силу [12]  $N_1$  и  $N_2$  – единственные с точностью до изоморфизма неразложимые  $\mathbb{Z}_3 S_3$ -модули размерности 3. Очевидно группы  $I_m \Gamma_1$  ( $i = 1, 2$ ) не сопряжены в  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ . Используя вышедоказанное и результаты [10–12] нетрудно описать с точностью до сопряженности все подгруппы  $W$  группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$  порядка  $|W| = 2^m \cdot 3$  ( $m = 2, 3$ ).

Опишем подгруппы порядка 48 группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ . Из разрешимости  $W$  следует, что  $W$  содержит подгруппу  $V$  порядка  $|V| = 2^4$ , которая, в силу предложения 6, изоморфна одной из групп:  $C_2 \times D_4$ ,  $C_2 \times K_4$  или  $H$ .

Покажем, что  $W \not\subset SL(3, \mathbb{Z}_3)$ . Предположим противное, пусть  $W$  – подгруппа порядка 48 группы  $SL(3, \mathbb{Z}_3)$ . Группа  $W$  содержит нормальную подгруппу  $U$ , такую что  $[W : U] = 2$  или  $[W : U] = 3$ . В первом случае, как легко видеть,

$U \cong S_4$  и сопряжена с группой  $W_{19}$ . Тогда силовская 2-подгруппа  $P$  группы  $W$  изоморфна группе  $C_2 \times D_4$  либо  $H$ . Случай  $P \cong C_2 \times D_4$  невозможен ввиду предложения 6. Таким образом  $P \cong H \triangleleft W$  и  $W \cong H \times C_3$ . Легко видеть, что случай  $[W : U] = 3$  сводится к предыдущему.

Из доказательства предложения 5 вытекает, что тогда  $W$  изоморфна одной из групп:

$$T_1 : a^8 = b^2 = c^3 = 1, b^{-1}ab = a^3, c^{-1}ac = a^k, c^{-1}bc = b, (k, 2) = 1;$$

$$T_2 : a^8 = b^2 = c^3 = 1, b^{-1}ab = a^3, c^{-1}ac = c^k, c^{-1}bc = a^2b, (k, 2) = 1.$$

В обоих случаях группа  $W$  содержит подгруппу, не вложимую в  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ , что невозможно. Поэтому  $W \cap SL(3, \mathbb{Z}_3) = V \neq \{E\}$ . Из предложения 6 элемент  $c$  порядка 3 группы  $W$  принадлежит  $SL(3, \mathbb{Z}_3)$  и, значит,  $c \in V$ . Покажем, что  $[W : V] = 2$ . По основной теореме о гомоморфизмах имеем

$$SL(3, \mathbb{Z}_3) \cdot W / SL(3, \mathbb{Z}_3) \cong W / SL(3, \mathbb{Z}_3) \cap W \cong W / V.$$

Поскольку  $W = \{c, P\}$  и  $c \in V$ , то далее можно записать

$$SL(3, \mathbb{Z}_3) \cdot W / SL(3, \mathbb{Z}_3) \cong SL(3, \mathbb{Z}_3) \cdot P / SL(3, \mathbb{Z}_3) \cong P / P_1 \cong W / V,$$

где  $P_1 = P \cap SL(3, \mathbb{Z}_3)$ . Следовательно, достаточно показать, что  $[P : P_1] = 2$ . Очевидно, случай  $P \cong H$  невозможен. Значит  $P \cong C_2 \times D_4$  или  $P \cong C_2 \times K_4$ . В обоих случаях  $-E \in P$  и  $[P : P_1] = 2$ . Отсюда с очевидностью получаем  $[W : V] = 2$  и  $-E \in W$ . Поскольку  $S_4$  – единственная с точностью до изоморфизма подгруппа порядка 24 группы  $SL(3, \mathbb{Z}_3)$ , то  $W \cong S_4 \times C_2$  и  $W = \{W_{19}, -E\}$ .

Предположим, что  $|W| = 2^5 \cdot 3$ . Тогда силовская 2-подгруппа группы  $W$  изоморфна группе  $H \times C_2$  и, следовательно,  $P = \{P, -E\}$ , где  $P_1 \subset SL(3, \mathbb{Z}_3)$ . Тогда группу  $W$  можно представить в виде  $W = \{-E, V\}$ , где  $V$  – группа порядка 48 в  $SL(3, \mathbb{Z}_3)$ , что противоречит лемме 3. Предложение доказано.

**Предложение 8.** Группа  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$  содержит с точностью до сопряженности 3 подгруппы  $U_1, U_2, U_3$  порядка  $2^m \cdot 3^k \cdot 13$  ( $0 \leq m \leq 5; k = 0, 1$ ):

$$1) U_1 = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & -\gamma \end{array} \right) \right\} - \text{подгруппа, изоморфная группе } C_{26};$$

$$2) U_2 = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -\beta \\ 0 & -\beta & \gamma - 1 \\ 0 & \gamma & \beta - 1 \end{array} \right) \right\} - \text{подгруппа, изоморфная}$$

группе  $C_4 : a^{17} = b^3 = 1, bab^{-1} = a^3;$

$$3) U_3 = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} -1 & -1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 - \gamma \\ 0 & -\gamma & 1 - \beta \end{array} \right) \right\} - \text{подгруппа, изоморфная}$$

группе  $C_5 : a^{13} = b^6 = 1, bab^{-1} = a^3;$

**Доказательство.** Пусть  $W$  – подгруппа порядка  $|W| = 2^m \cdot 3^k \cdot 13$  группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ . Тогда  $0 \leq m \leq 5$  и  $k = 0, 1$ . Рассмотрим следующие случаи:

1)  $|W| = 2^m \cdot 13$ . Очевидно, что при  $m > 1$   $W$  нециклична. Пусть  $G$  – абстрактная группа порядка  $2^m \cdot 13$ , обладающая точным  $\mathbb{Z}_3$ -представлением

степени 3 и  $P$  – силовская 13-подгруппа группы  $W$ . Если  $G$  – неприводима, то  $G$  либо абсолютно неприводима, либо циклична. Поскольку  $\Gamma|_P$  неприводимо, то и  $\Gamma$  неприводимо. Поскольку  $G$  – нециклична, то  $\Gamma$  – абсолютно неприводимо, откуда  $3 \mid |G|$ , что абсурдно. Поэтому  $m \leq 1$  и  $G$  – циклическая группа порядка 26. Из предложения 6 и леммы 3 получим, что  $U_1$  – единственная с точностью до сопряженности подгруппа порядка 26 группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ .

2) Пусть  $G$  – абстрактная группа порядка 39. Легко видеть, что если  $G$  вложима в  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ , то  $G$  нециклична. Тогда  $G$  – метациклическая группа, порожденная двумя образующими  $a$  и  $b$  с определяющими соотношениями

$$G : a^{13} = b^3 = 1, \quad bab^{-1} = a^3.$$

Предположим, что  $\Gamma$  – точное  $\mathbb{Z}_3$ -представление степени 3 группы  $G$ . Согласно предложению 6 и лемме 3 можно считать, что:

$$\Gamma : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}, \quad b \rightarrow \Gamma_b.$$

Покажем, что  $\Gamma$  реализуется в модуле  $\mathbb{Z}_3[\omega]$ , где  $\omega$  – первообразный корень степени 13 из 1,

$$\gamma = \omega + \omega^3 + \omega^9, \quad \beta = \omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-9}.$$

Действительно, пусть  $x = \alpha_0 + \alpha_1\omega^2$  ( $\alpha_i \in \mathbb{Z}_3$ ;  $0 \leq i \leq 2$ ) – элемент кольца  $\mathbb{Z}_3[\omega]$ , записанный в базисе  $1, \omega, \omega^2$  над кольцом  $\mathbb{Z}_3$ . Зададим действие  $a, b$  на элементе  $x$ , положив:  $ax = \omega x$ ,  $bx = \varphi(x)$ , где  $\varphi$  – образующий группы Галуа поля  $\mathbb{Q}_3(\omega)$  над  $\mathbb{Q}_3$ . Тогда  $bab^{-1} = a^3$ . Поэтому

$$\omega^3 = \gamma\omega^2 - \beta\omega + 1, \quad \omega^6 = -\beta + (\alpha - 1)\omega + (\beta - 1)\omega^2$$

и  $\Gamma_b$  имеет вид:

$$\Gamma_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\beta \\ 0 & -\beta & \gamma - 1 \\ 0 & \gamma & \beta - 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя лемму 4, получим, что  $U_2$  – единственная с точностью до сопряженности подгруппа порядка 39 группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ .

3) Пусть  $|W| = 2^m \cdot 3 \cdot 13$  ( $0 \leq m \leq s$ ). Покажем, что в этом случае  $m \leq 1$ . Предположим противное, пусть  $m \geq 1$  и

$$1 = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_s = W \tag{10}$$

– композиционный ряд группы  $W$ . Тогда все факторы ряда (10) – простые группы. Заметим, что в силу [13] все факторы (10) цикличны. Тогда  $W$  – разрешимая группа и  $W$  содержит подгруппу порядка  $2^m \cdot 13$ , что невозможно. Таким образом  $|W| \leq 2 \cdot 3 \cdot 13$ . Пусть  $G$  – абстрактная группа порядка  $|G| = 2 \cdot 3 \cdot 13$ . Очевидно,  $|G|$  – неабелева группа. Поскольку все силовские подгруппы группы  $G$  цикличны, то  $G$  – метациклическая группа. Отсюда и из вышедоказанного легко получить, что группу  $G$  можно представить в виде:

$$1) a^{13} = b^6 = 1, \quad bab^{-1} = a^3 \quad \text{или} \quad 2) a^3 = b^{26} = 1, \quad bab^{-1} = a^{-1}.$$



В случае 1) из предложения 6 следует, что  $U_3$  – единственная с точностью до сопряженности подгруппа, изоморфная группе 1). Легко видеть также, что группа 2) не вложима в  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ . Предложение доказано.

Из предложений 6–8 вытекает описание с точностью до сопряженности всех конечных подгрупп группы  $GL(3, \mathbb{Z}_3)$ .

1. Фёдоров Е. С. Начало учения о фигурах. – С.-Петербург, 1885.
2. Brown H., Neubuser J., Zassenhaus H. On integral groups I. The reducible case // Numer. Math., 1972. – V. 19. – P. 386–399.
3. Кириллюк А. А. // В сб. "Материалы 2-й конф. молодых ученых Зап. научн. центра АН УССР. Секция матем. н. – Ужгород, 1975 (№ 1734–76 Деп.).
4. Супруненко Д. А. Группы матриц. – М., 1972.
5. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М., 1969.
6. Mitchel H. Determination of the ordinaty and modular ternary linear groups // Trans. A.M.S., 1911.–V. 12. – P. 207–242.
7. Hartley R. Determination of ternary collineation groups, whose coefficients lie in  $GF(2^n)$  // Ann. of Math., 1925. – V. 27. – P. 140–158.
8. Bloom D. The subgroups of  $PSL_3(q)$  for odd  $q$  // Trans. A.M.S., 1967. – V. 127. – P. 150–173.
9. Вольвачев Р. Т.  $p$ -подгруппы Силова полной линейной группы над полем // Изв. АН СССР, сер. матем., 1963. – Т. 27, № 5. – С. 1031–1054.
10. Ройтер А. В. О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами // Вестн. Ленинград. ун-та, 1960. – № 19. – С. 65–74.
11. Берман С. Д., Гудивок П. М. Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых  $p$ -адических чисел // Изв. АН СССР, сер. матем., 1964. – Т. 28, № 4. – С. 875–910.
12. Гудивок П. М. О модулярных и целочисленных  $P$ -адических представлениях прямого произведения групп // УМЖ. – 1977. – Т. 29, № 5.– С. 580–588.
13. Mason G. A characterization of  $SL(3, 3)$  II // J. of Algebra, 1976. – V. 39. – P. 235–249.
14. О'Мура Р. Т. Сб. Автоморфизмы классических групп. – М., 1976.

Одержано 00.00.2014