# КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ “НЕЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ”

доц. Рейтій О.К.

01.09.2019 р.

## 1 Лекція 1. Нелінійні рівняння 1-го порядку з двома незалежними змінними. Методи розв'язування

### 1.1 Повний, загальний і особливий інтеграл

**Означення 1.** *Загальне нелінійне рівняння в частинних похідних першого порядку з двома незалежними змінними має вигляд*

$$F(x, y, w, p, q) = 0, \qquad \text{де} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\, q = \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1}$$

Такі рівняння часто зустрічаються в аналітичній механіці, варіаційному численні, теорії оптимального управління, диференціальних іграх, динамічному програмуванні, геометричній оптиці, диференціальній геометрії та інших областях.

У цьому розділі будемо розглядати гладкі розв'язки $w = w(x, y)$ рівняння (1), що мають неперервні похідні по обох аргументах (негладкі розв'язки див., наприклад, в [1]).

$1^\circ$. Нехай відомо частинний розв'язок рівняння (1)

$$w = \Xi(x, y, C_1, C_2), \tag{2}$$

який залежить від двох довільних сталих $C_1$ та $C_2$.

**Означення 2.** *Двопараметричне сімейство розв'язків (2) називається повним інтегралом рівняння (1), якщо в даній області ранг матриці*

$$M = \begin{pmatrix} \Xi_1 & \Xi_{x1} & \Xi_{y1} \\ \Xi_2 & \Xi_{x2} & \Xi_{y2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

*дорівнює двом (це справедливо, наприклад, при $\Xi_{x1}\Xi_{y2} - \Xi_{x2}\Xi_{y1} \neq 0$). Тут введено позначення*

$$\Xi_n = \frac{\partial \Xi}{\partial C_n}, \quad \Xi_{xn} = \frac{\partial^2 \Xi}{\partial x \partial C_n}, \quad \Xi_{yn} = \frac{\partial^2 \Xi}{\partial y \partial C_n} \quad (n = 1, 2).$$

У низці випадків повний інтеграл вдається знайти методом невизначених коефіцієнтів, задавши відповідним чином структуру частинного розв'язку.

**Приклад 1.** *Розглянемо рівняння*

$$\frac{\partial w}{\partial x} = a\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^n + b.$$

*Частинний розв'язок шукаємо у вигляді суми* $w = C_1 y + C_2 + C_3 x$. *Підставивши цей вираз у рівняння, знаходимо зв'язок між коефіцієнтами* $C_1$ *і* $C_3$: $C_3 = aC_1^n + b$. *Звідси отримаємо повний інтеграл:* $w = C_1 y + (aC_1^n + b)x + C_2$.

Повний інтеграл рівняння (1) часто записується в неявному вигляді[1]

$$\Xi(x, y, w, C_1, C_2) = 0. \tag{4}$$

2°. Загальний інтеграл (розв'язок) ДРЧП 1-го порядку, як відомо, завжди залежить від однієї довільної функції. Загальний розв'язок рівняння (1) можна зобразити в параметричному вигляді за допомогою повного інтеграла (2) (або (4)) і двох рівнянь

$$\begin{gathered} C_2 = f(C_1), \\ \frac{\partial \Xi}{\partial C_1} + \frac{\partial \Xi}{\partial C_2} f'(C_1) = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

де $f$ – довільна функція, а штрих означає похідну. Загальний інтеграл в певному сенсі відіграє роль загального розв'язку, що залежить від довільної функції (питання про те, чи всі розв'язки він описує, вимагає додаткового аналізу).

**Приклад 2.** *Для рівняння, розглянутого в першому прикладі, загальний інтеграл можна представити в параметричному вигляді за допомогою співвідношень*

$$w = C_1 y + (aC_1^n + b)x + C_2, \quad C_2 = f(C_1), \quad y + anC_1^{n-1}x + f'(C_1) = 0.$$

*Виключаючи звідси* $C_2$ *і перепозначаючи параметр* $C_1$ *через* $C$, *зручно представити загальний інтеграл в наочнішій формі*

$$w = Cy + (aC^n + b)x + f(C),$$

$$y = -anC^{n-1}x + f'(C).$$

3°. Особливий інтеграл рівняння (1) знаходиться без використання повного інтеграла шляхом виключення $p$ і $q$ із системи трьох рівнянь

$$F = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0,$$

де перше рівняння збігається з (1).

[1] В формулах (2) і (4) символом $\Xi$ позначено різні функції.

## 1.2 Метод Лагранжа-Шарпі

Нехай знайдено один перший інтеграл

$$\Phi(x, y, w, p, q) = C_1 \tag{6}$$

характеристичної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dw}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_w} = -\frac{dq}{F_y + qF_w}, \tag{7}$$

де

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_w = \frac{\partial F}{\partial w}, \quad F_p = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad F_q = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Вважатимемо, що інтеграл (6) разом з рівнянням (1) можна розв'язати відносно похідних $p$, $q$:

$$p = \varphi_1(x, y, w, C_1), \quad q = \varphi_2(x, y, w, C_1). \tag{8}$$

Перше рівняння цієї системи можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння з незалежною змінною $x$ і параметром $y$. Отримавши загальний розв'язок цього рівняння, залежний від довільної функції $\psi(y)$, підставляють його в друге рівняння. У підсумку приходять до звичайного диференціального рівняння для $\psi$. Визначивши функцію $\psi(y)$ і підставивши її в загальний розв'язок першого рівняння (8), знаходимо повний інтеграл рівняння (1). Аналогічним чином розв'язання системи (8) можна починати з другого рівняння, розглядаючи його як звичайне диференціальне рівняння з незалежною змінною $y$ і параметром $x$.

**Приклад 3.** *Розглянемо рівняння*

$$ywp^2 - q = 0, \qquad \text{де} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

*Характеристична система (7) в даному випадку має вигляд*

$$\frac{dx}{2ywp} = -\frac{dy}{1} = \frac{dw}{2ywp^2 - q} = -\frac{dp}{yp^3} = -\frac{dq}{wp^2 + yp^2 q}.$$

*Скориставшись вихідним рівнянням, спрощуємо знаменник третього відношення і отримуємо інтегровну комбінацію: $dw/(ywp^2) = -dp/(yp^3)$. Звідси знаходимо перший інтеграл $p = C_1/w$. Розв'язуючи його разом з вихідним рівнянням відносно $p$ і $q$, отримуємо систему*

$$p = \frac{C_1}{w}, \quad q = \frac{C_1^2 y}{w}.$$

*Загальний розв'язок першого рівняння має вигляд $w^2 = 2C_1x + \psi(y)$, де $\psi(y)$ – довільна функція. Підставляючи цей розв'язок у друге рівняння системи, маємо $\psi'(y) = 2C_1^2 y$. Тому $\psi(y) = C_1^2 y^2 + C_2$. В результаті отримаємо повний інтеграл у вигляді*

$$w^2 = 2C_1x + C_1^2 y^2 + C_2.$$

Відмітимо, що повний інтеграл рівняння (1) є загальним розв'язком цілком інтегровного рівняння Пфаффа

$$dw = \varphi_1(x, y, w, C_1)dx + \varphi_2(x, y, w, C_1)dy, \tag{9}$$

в якому містяться функції $\varphi_1$ та $\varphi_2$ з системи (8).

**Зауваження 1.** *Очевидним першим інтегралом характеристичної системи (7) є рівність $F(x, y, w, p, q) = C$, тому функція $\Phi$, що визначає інтеграл (6), повинна бути відмінна від $F$. Однак, використання очевидного першого інтеграла дозволяє знизити порядок системи (7) на одиницю.*

## 1.3 Побудова повного інтеграла за допомогою двох перших інтегралів

Нехай знайдено два незалежних перших інтеграла

$$\Phi(x, y, w, p, q) = C_1, \quad \Psi(x, y, w, p, q) = C_2 \tag{10}$$

характеристичної системи звичайних диференціальних рівнянь (7). Вважатимемо, що функції $F$, $\Phi$, $\Psi$, які визначають рівняння (1) та інтеграли (10), задовольняють наступним двом умовам:

$$J \equiv \frac{\partial(F, \Phi, \Psi)}{\partial(w, p, q)} \not\equiv 0, \qquad [\Phi, \Psi] \equiv \begin{vmatrix} \Phi_p & \Phi_x + p\Phi_w \\ \Psi_p & \Psi_x + p\Psi_w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_q & \Phi_y + q\Phi_w \\ \Psi_q & \Psi_y + q\Psi_w \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{11}$$

де $J$ – якобіан функцій $F$, $\Phi$, $\Psi$ по змінним $w$, $p$, $q$, а $[\Phi, \Psi]$ – дужка Якобі. В цьому випадку рівності (1) і (10) являють собою параметричну форму представлення повного інтеграла рівняння (1) ($p$ і $q$ розглядаються як параметри). Виключивши $p$ і $q$ з (1) та (10), а потім розв'язавши отриманий вираз відносно $w$, можна отримати повний інтеграл в явному вигляді $w = w(x, y, C_1, C_2)$.

**Приклад 4.** *Розглянемо рівняння*

$$pq - aw = 0, \qquad \text{де} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

*Характеристична система (7) у цьому випадку має вигляд*

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dw}{2pq} = \frac{dp}{ap} = \frac{dq}{aq}.$$

*Прирівнюючи спочатку перше і п'яте відношення, а потім друге і четверте, знаходимо перші інтеграли*

$$q - ax = C_1, \qquad p - ay = C_2.$$

*Маємо $F = pq - aw$, $\Phi = q - ax$, $\Psi = p - ay$. Ці функції задовольняють умовам (11). Розв'язуючи рівняння і перші інтеграли відносно $w$, отримуємо повний інтеграл у вигляді*

$$w = \frac{1}{a}(ax + C_1)(ay + C_2).$$

## 1.4 Випадок, коли рівняння не залежить явно від $w$

Нехай вихідне рівняння не містить явно шуканої функції, тобто має вигляд

$$F(x, y, p, q) = 0. \tag{12}$$

1°. Якщо отримано однопараметричне сімейство розв'язків $w = \overline{\Xi}(x, y, C_1)$, що задовольняє умові $\overline{\Xi}_1' \not\equiv \mathrm{const}$ (тут штрих означає похідну по $C_1$), повний інтеграл дається виразом $w = \overline{\Xi}(x, y, C_1) + C_2$.
2°. Перший інтеграл (6) можна шукати в формі $\Phi(x, y, p, q) = C_1$, аналогічній рівнянню (12). В цьому випадку характеристична система (7) записується так:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = -\frac{dp}{F_x} = -\frac{dq}{F_y}.$$

Відповідне рівняння Пфаффа (9) набуває вигляду

$$dw = \varphi_1(x, y, C_1)dx + \varphi_2(x, y, C_1)dy$$

і може бути проінтегроване в квадратурах. В результаті маємо такий вираз для повного інтеграла:

$$w = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi_1(t, y, C_1)dt + \int\limits_{y_0}^{y} \varphi_2(x_0, s, C_1)ds + C_2, \tag{13}$$

де сталі $x_0$ і $y_0$ можна вибрати довільними.
3°. Нехай рівняння (12) вдається розв'язати відносно $p$ або $q$, наприклад

$$p = -\mathcal{H}(x, y, q).$$

Тоді диференціюючи обидві частини по $y$, можна отримати квазілінійне рівняння відносно похідної $q$:

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}(x, y, q) = 0, \qquad q = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Це рівняння простіше вихідного, його якісні особливості і методи розв'язання описані в підручниках, присвячених теорії звичайних диференціальних рівнянь (див., наприклад, [2]).

## 1.5 Рівняння Гамільтона-Якобі

**Означення 3.** *Рівняння (1), розв'язане відносно однієї з похідних*

$$p + \mathcal{H}(x, y, w, q) = 0, \qquad \text{де} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{14}$$

*прийнято називати рівнянням Гамільтона-Якобі, а функцію $\mathcal{H}$ – гамільтоніаном (або функцією Гамільтона).*

Рівняння вигляду (14) часто зустрічаються в різних розділах механіки, теорії управління та диференціальних іграх, де змінна $x$ зазвичай відіграє роль часу, а змінна $y$ – роль просторової координати. Рівнянню Гамільтона-Якобі (14) відповідає функція $F(x, y, w, p, q) = p + \mathcal{H}(x, y, w, q)$ в рівнянні (1).

Характеристична система (7) для рівняння (14) з урахуванням рівності $p = -\mathcal{H}$ зводиться до простішої системи, що складається з трьох диференціальних рівнянь

$$y'_x = \mathcal{H}_q, \quad w'_x = q\mathcal{H}_q - \mathcal{H}, \quad q'_x = -q\mathcal{H}_w - \mathcal{H}_y, \tag{15}$$

які не залежать від $p$ (в лівій частині рівнянь знаходяться похідні по змінній $x$).

## 1.6 Перетворення Лежандра і Ейлера

Будемо вважати, що функція $w(x, y)$ двічі неперервно диференційовна в розглядуваній області.

1°. Перетворення Лежандра вводиться так:

$$x = W_X, \quad y = W_Y, \quad w = XW_X + YW_Y - W, \qquad \text{де} \quad W = W(X, Y). \tag{16}$$

Обернене перетворення Лежандра має аналогічний вигляд

$$X = w_x, \quad Y = w_y, \quad W = xw_x + yw_y - w, \qquad \text{де} \quad w = w(x, y). \tag{17}$$

Переходячи в рівнянні (1) до нових змінних (16), отримаємо

$$F(W_X, W_Y, XW_X + YW_Y - W, X, Y) = 0. \tag{18}$$

Це рівняння іноді простіше вихідного рівняння (1). Якщо $W = W(X, Y)$ – інтеграл рівняння (18), то співвідношення (16) дають параметричне представлення відповідного інтеграла $w = w(x, y)$ рівняння (1).

**Зауваження 2.** *При використанні перетворення Лежандра окремі інтеграли можуть пропадати, якщо в деякій підобласті якобіан $\partial(w_x, w_y)/\partial(x, y)$ тотожно дорівнює нулю.*

2°. Пряме і обернене перетворення Ейлера мають вигляд

$$x = W_X, \quad y = Y, \quad w = XW_X - W, \qquad \text{де} \quad W = W(X, Y); \tag{19}$$

$$X = w_x, \quad Y = y, \quad W = xw_x - w, \qquad \text{де} \quad w = w(x, y). \tag{20}$$

Переходячи в (1) до нових змінних (19), отримаємо наступне рівняння:

$$F(W_X, Y, XW_X - W, X, -W_Y) = 0, \tag{21}$$

яке іноді простіше вихідного. Якщо $W = W(X, Y)$ – інтеграл рівняння (21), то співвідношення (19) дають параметричне представлення відповідного інтеграла $w = w(x, y)$ рівняння (1).

**Зауваження 3.** *При використанні перетворення Ейлера окремі інтеграли можуть пропадати, якщо в деякій підобласті друга похідна $w_{xx}$ (або $w_{yy}$) тотожно дорівнює нулю.*

# 2 Лекція 2. Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв'язку

## 2.1 Постановка задачі та процедура побудови розв'язку

Розглянемо *задачу Коші* для рівняння

$$F(x, y, w, p, q) = 0, \qquad \text{де} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{22}$$

з початковими умовами

$$x = h_1(\xi), \quad y = h_2(\xi), \quad w = h_3(\xi), \tag{23}$$

де $\xi$ – параметр ($\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$), а $h_k(\xi)$ – задані функції.

Розв'язання цієї задачі здійснюється в кілька етапів:

1°. Спочатку визначаються додаткові початкові умови для похідних:

$$p = p_0(\xi), \quad q = q_0(\xi). \tag{24}$$

Для цього розв'язують алгебраїчну (або трансцендентну) систему рівнянь

$$F(h_1(\xi), h_2(\xi), h_3(\xi), p_0, q_0) = 0, \tag{25}$$
$$p_0 h_1'(\xi) + q_0 h_2'(\xi) - h_3'(\xi) = 0 \tag{26}$$

відносно $p_0$ і $q_0$. Рівняння (25) отримано в результаті підстановки початкових даних (23) у вихідне рівняння (22). Рівняння (26) є наслідком залежності $w = w(x, y)$ і формули для диференціала $dw = pdx + qdy$, де $dx$, $dy$, $dw$ обчислюються за початковими даними (23).

2°. Розв'язується автономна система рівнянь

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dw}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_w} = -\frac{dq}{F_y + qF_w} = d\tau, \tag{27}$$

яка отримана з формули (7) (див. попередню лекцію) шляхом введення додаткової змінної $\tau$ (що відіграє роль часу).

3°. Сталі інтегрування визначаються з початкових умов:

$$x = h_1(\xi), \quad y = h_2(\xi), \quad w = h_3(\xi), \quad p = p_0(\xi), \quad q = q_0(\xi), \quad \tau = 0, \tag{28}$$

які отримані об'єднанням умов (23) і (24). В результаті знаходимо три функції

$$x = x(\tau, \xi), \quad y = y(\tau, \xi)), \quad w = w(\tau, \xi), \tag{29}$$

які дають розв'язки даної задачі Коші в параметричному вигляді ($\tau$, $\xi$ – параметри).

## 2.2 Теорема існування та єдиності

Нехай функція $F = F(x, y, w, p, q)$, за допомогою якої задається рівняння (22), двічі неперервно диференційовна за всіма п'ятьма аргументами (в даній області), причому $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$. Нехай функції $h_1(\xi)$, $h_2(\xi)$, $h_3(\xi)$, які визначають початкові дані (23), двічі неперервно диференційовні по $\xi$, причому $(h_1')^2 + (h_2')^2 \neq 0$. Вважаємо, що функції $p_0(\xi)$, $q_0(\xi)$, які задають додаткові початкові умови (24), задовольняють системі (25), (26). Крім того, вважаємо, що виконується умова

$$\Delta \equiv F_p h_2' - F_q h_1' \neq 0,$$

в якій фігурують функції з (23), (24) і штрихом позначено похідні по $\xi$. При виконанні зроблених припущень, існує єдиний двічі неперервно диференційовний розв'язок рівняння (22), який задовольняє початковим умовам (23), (24).

**Зауваження 4.** *Ця теорема носить локальний характер: існування єдиного гладкого розв'язку задачі Коші гарантується лише в деякому околі лінії, що задається початковими даними (23) разом з додатковими умовами (24).*

**Зауваження 5.** *Алгебраїчна (або трансцендентна) система (25), (26) може мати кілька розв'язків, що призводить до різних додаткових початкових умов для похідних (24). Кожна з цих додаткових умов буде породжувати свій власний розв'язок задачі Коші (22), (23).*

**Зауваження 6.** *Для нелінійних рівнянь глобальний розв'язок задачі Коші (22), (23) може виявитися багатозначним також через перетин характеристик в площині $x$, $y$.*

## 2.3 Задача Коші для рівняння Гамільтона-Якобі

Початкова умова для рівняння Гамільтона-Якобі (14) зазвичай формулюється у вигляді

$$w = \varphi(y) \qquad \text{при} \qquad x = L. \tag{30}$$

В даному випадку розв'язання задачі Коші зводиться до розв'язання характеристичної системи (15) з початковою умовою

$$y = \xi, \quad w = \varphi(\xi), \quad q = \varphi'(\xi) \qquad \text{при} \qquad x = L, \tag{31}$$

де штрих означає похідну по параметру $\xi$.

## 2.4 Приклади розв'язання задачі Коші

Розглянемо конкретні приклади.

**Приклад 5.** *Потрібно знайти розв'язок рівняння*

$$aw = pq, \qquad \text{де} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{32}$$

*що проходить через пряму*

$$x = 1, \quad w = by. \tag{33}$$

*Запишемо рівняння прямої (33) в параметричній формі*

$$x = 1, \quad y = \xi, \quad w = b\xi. \tag{34}$$

*Визначимо* $p_0(\xi)$ *і* $q_0(\xi)$ *із системи (25), (26), яка в даному випадку має вигляд:*

$$ab\xi = p_0 q_0, \quad q_0 - b = 0.$$

*Звідси отримаємо*

$$p_0 = a\xi, \quad q_0 = b. \tag{35}$$

*Система (27) при* $F = pq - aw$ *записується так:*

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dw}{2pq} = \frac{dp}{ap} = \frac{dq}{aq} = d\tau. \tag{36}$$

*Її розв'язок дається формулами (спочатку інтегруються два останніх рівняння):*

$$p = C_1 \mathrm{e}^{a\tau}, \quad q = C_2 \mathrm{e}^{a\tau}, \quad x = \frac{C_2}{a}\mathrm{e}^{a\tau} + C_3, \quad y = \frac{C_1}{a}\mathrm{e}^{a\tau} + C_4, \quad w = \frac{C_1 C_2}{a}\mathrm{e}^{2a\tau} + C_5. \tag{37}$$

*Використовуючи початкові умови (отримані з (34) і (35))*

$$x = 1, \quad y = \xi, \quad w = b\xi, \quad p_0 = a\xi, \quad q_0 = b \qquad \text{при} \quad \tau = 0, \tag{38}$$

*визначимо сталі інтегрування в (37):*

$$C_1 = a\xi, \quad C_2 = b, \quad C_3 = 1 - \frac{b}{a}, \quad C_4 = C_5 = 0.$$

*Підставляючи ці значення в (37), знаходимо розв'язок задачі Коші (32), (33) в параметричному вигляді*

$$x = \frac{b}{a}\mathrm{e}^{a\tau} + 1 - \frac{b}{a}, \quad y = \xi \mathrm{e}^{a\tau}, \quad w = b\xi \mathrm{e}^{2a\tau}.$$

*Виключаючи параметри* $\xi$ *і* $\tau$, *отримаємо розв'язок у явному вигляді:* $w = (ax + b - a)y$.

**Приклад 6.** *Отримаємо тепер розв'язок рівняння (32), що задовольняє початковій умові* $w = f(y)$ *при* $x = 0$.

*Запишемо початкову умову в параметричній формі*

$$x = 0, \quad y = \xi, \quad w = f(\xi). \tag{39}$$

*Система (25), (26) для визначення* $p_0(\xi)$ *і* $q_0(\xi)$ *має вигляд:* $af(\xi) = p_0 q_0$, $q_0 - f'(\xi) = 0$. *Звідси маємо*

$$p_0 = a\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad q_0 = f'(\xi). \tag{40}$$

*Загальний розв'язок характеристичної системи (36) описується формулами (37). Використовуючи початкові умови (39), (40), які повинні виконуватися при $\tau = 0$, знаходимо сталі інтегрування*

$$C_1 = a\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad C_2 = f'(\xi), \quad C_3 = -\frac{f'(\xi)}{a}, \quad C_4 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad C_5 = 0.$$

*Підставляючи ці значення в (37), отримаємо розв'язок задачі Коші (32), (39) у параметричному вигляді*

$$x = \frac{1}{a}f'(\xi)(\mathrm{e}^{a\tau} - 1), \quad y = \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}(\mathrm{e}^{a\tau} - 1) + \xi, \quad w = f(\xi)\mathrm{e}^{2a\tau}.$$

**Приклад 7.** *Потрібно знайти розв'язок рівняння*

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = a^2, \tag{41}$$

*що проходить через коло*

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad w = 0. \tag{42}$$

*Ввівши параметр $\xi$, запишемо рівняння кола так:*

$$x = b\sin\xi, \quad y = b\cos\xi, \quad w = 0. \tag{43}$$

*Рівняння для визначення додаткових початкових умов (25), (26) в даному випадку мають вигляд*

$$p_0^2 + q_0^2 = a^2, \quad p_0\cos\xi - q_0\sin\xi = 0.$$

*Звідси отримаємо*

$$p_0 = \varepsilon a\sin\xi, \quad q_0 = \varepsilon a\cos\xi, \qquad \text{де} \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{44}$$

*Система (36) при $F = p^2 + q^2 - a^2$ записується так:*

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dw}{2(p^2+q^2)} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = d\tau. \tag{45}$$

*Її розв'язок дається формулами (спочатку інтегруються два останніх рівняння):*

$$p = C_1, \quad q = C_2, \quad x = 2C_1\tau + C_3, \quad y = 2C_2\tau + C_4, \quad w = 2(C_1^2 + C_2^2)\tau + C_5. \tag{46}$$

*Використовуючи початкові умови (43), (44), які повинні виконуватися при $\tau = 0$, знаходимо сталі інтегрування*

$$C_1 = \varepsilon a\sin\xi, \quad C_2 = \varepsilon a\cos\xi, \quad C_3 = b\sin\xi, \quad C_4 = b\cos\xi, \quad C_5 = 0, \qquad \text{де} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

*Підставляючи ці значення в (46), знаходимо розв'язок задачі Коші (41), (42) у параметричному вигляді*

$$x = (2\varepsilon a\tau + b)\sin\xi, \quad y = (2\varepsilon a\tau + b)\cos\xi, \quad w = 2a^2\tau.$$

*Виключаючи параметри $\xi$ та $\tau$, запишемо розв'язок в більш наочному вигляді:*

$$a^2(x^2 + y^2) = (ab \pm w)^2. \tag{47}$$

*Геометрична інтерпретація: формула (47) описує два круглих конуса в просторі $(x, y, w)$, у яких в основі лежить коло (42) і спільна вісь збігається з віссю $w$. Координати вершин конусів: $w = \pm ab$.*

*Важливо відмітити, що розв'язок (47) є багатозначною функцією.*

# 3 Лекція 3. Відокремлення змінних. Рівняння спеціального вигляду

Метод відокремлення змінних полягає в тому, що повний інтеграл шукається у вигляді суми функцій різних аргументів. Опишемо структуру повного інтеграла деяких класів нелінійних рівнянь 1-го порядку, що допускають відокремлення змінних.
1°. Нехай функція $F$ не залежить явно від шуканої функції $w(x, y)$, тобто рівняння

$$F(x, y, w, p, q) = 0, \qquad \text{де} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y} \tag{48}$$

має вигляд

$$F(x, y, p, q) = 0, \tag{49}$$

Тоді повний інтеграл містить одну адитивну сталу:

$$w = \Xi(x, y, C_1) + C_2. \tag{50}$$

2°. Нехай рівняння не залежить явно від змінної $x$ і шуканої величини $w$:

$$F(y, p, q) = 0. \tag{51}$$

Тоді повний інтеграл можна представити у вигляді

$$w = C_1 x + u(y), \tag{52}$$

де нова функція $u(y)$ визначається шляхом розв'язання звичайного диференціального рівняння:

$$F(y, C_1, u'(y)) = 0. \tag{53}$$

Функція $u$ згідно п. 1° містить адитивну сталу $C_2$.

**Приклад 8.** *Розв'язати рівняння*

$$p^2 q - ay = 0.$$

*Підставляючи (52) у це рівняння, отримуємо*

$$C_1^2 \frac{du}{dy} - ay = 0 \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{ay}{C_1^2},$$

*звідки*

$$u = \int \frac{ay}{C_1^2} dy + C_2 = \frac{a}{2C_1^2} y^2 + C_2,$$

*а повний інтеграл в цьому випадку має вигляд*

$$w = C_1 x + \frac{a}{2C_1^2} y^2 + C_2.$$

3°. Нехай в рівнянні можна окремо виділити залежності від двох змінних $x$ і $y$, після чого воно набуває вигляду

$$F(\varphi_1(x,p), \varphi_2(y,q)) = 0. \tag{54}$$

Тоді повний інтеграл можна представити у вигляді суми двох функцій

$$w = w_1(x) + w_2(y), \tag{55}$$

які визначаються шляхом розв'язання двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{array}{c} \varphi_1(x, w_1'(x)) = C_1, \\ \varphi_2(y, w_2'(y)) = C_2, \end{array} \tag{56}$$

де $C_1$ – довільна стала, а $C_2$ визначається з виразу $F(C_1, C_2) = 0$.

**Приклад 9.** *Розв'язати рівняння*

$$(xp)^2(yq)^3 + a = 0.$$

*Система (56) для цього рівняння має вигляд*

$$\begin{array}{c} (xw_1')^2 = C_1, \\ (yw_2')^3 = C_2, \end{array}$$

*де $C_1$ і $C_2$ – пов'язані співвідношенням*

$$C_1C_2 + a = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{a}{C_1}.$$

*З першого рівняння отримуємо*

$$w_1'(x) = \pm\frac{\sqrt{C_1}}{x} \Rightarrow w_1 = \pm\sqrt{C_1}\left(\ln|x| + \tilde{C}_1\right),$$

*а з другого –*

$$w_2'(y) = \frac{\sqrt[3]{C_2}}{y} \Rightarrow w_2 = -\sqrt[3]{\frac{a}{C_1}}\left(\ln|y| + \tilde{C}_2\right),$$

*де $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ – довільні сталі.*

*Підставляючи отримані для $w_1$ та $w_2$ вирази у формулу (55), отримуємо повний інтеграл*

$$w = \pm\sqrt{C_1}\ln|x| - \sqrt[3]{\frac{a}{C_1}}\ln|y| + C_3,$$

*де $C_1$, $C_3$ – довільні сталі.*

4°. Нехай рівняння має вигляд

$$F(x,p) + F(y,q) = aw, \quad a \text{ – стала.} \tag{57}$$

Повний інтеграл можна представити у вигляді суми двох функцій

$$w = w_1(x) + w_2(y), \tag{58}$$

які визначаються шляхом розв'язання двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{array}{c} F_1(x, w_1') - aw_1 = \lambda, \\ F_2(y, w_2') - aw_2 = -\lambda, \end{array} \tag{59}$$

де $\lambda$ – стала відокремлення.

**Приклад 10.** *Розв'язати рівняння*

$$(xp)^2 + yq = aw.$$

*Підстановка* $w = w_1(x) + w_2(y)$ *приводить нас до рівняння*

$$(xw_1'(x))^2 + yw_2'(y) = aw_1(x) + aw_2(y),$$

*в якому змінні відокремлюються, і отримуємо два рівняння*

$$(xw_1'(x))^2 - aw_1(x) = -yw_2'(y) + aw_2(y) = \lambda.$$

*З першого рівняння отримуємо*

$$xw_1' = \pm\sqrt{aw_1 + \lambda} \Rightarrow \pm\frac{dw_1}{\sqrt{aw_1 + \lambda}} = \frac{dx}{x},$$

$$\pm\frac{2}{a}\sqrt{aw_1 + \lambda} = \ln|x| + \ln|C_1| \Rightarrow w_1 = \frac{a}{4}\ln^2|C_1 x| - \frac{\lambda}{a},$$

*а з другого рівняння –*

$$yw_2' = aw_2 - \lambda \Rightarrow \frac{dw_2}{aw_2 - \lambda} = \frac{dy}{y},$$

$$\frac{1}{a}\ln|aw_2 - \lambda| = \ln|y| + \ln|C_2| \Rightarrow w_2 = \frac{1}{a}\left[(C_2 y)^a + \lambda\right],$$

*де* $C_1$, $C_2$ *– довільні сталі.*

*Додаючи отримані для* $w_1$ *та* $w_2$ *вирази, дістанемо повний інтеграл*

$$w = \frac{a}{4}\ln^2|C_1 x| + \frac{1}{a}(C_2 y)^a.$$

# 4 Лекція 4. Точкові перетворення рівнянь математичної фізики. Перетворення годографа

## 4.1 Точкові перетворення

Нехай $x$, $y$ – незалежні змінні, а $w = w(x, y)$ – функція цих змінних. У загальному випадку точкове перетворення задається формулами

$$x = X(\xi, \eta, u), \qquad y = Y(\xi, \eta, u), \qquad w = W(\xi, \eta, u), \tag{60}$$

де $\xi$, $\eta$ – нові незалежні змінні, $u = u(\xi, \eta)$ – нова залежна змінна, $X$, $Y$, $W$ – деякі (задані або шукані) функції.

Точкові перетворення не тільки зберігають порядок рівняння, до якого вони застосовуються, але і не змінюють радикально структуру рівняння, так як старші похідні нових змінних лінійно залежать від старших похідних вихідних змінних.

Перетворення (60) оборотне, якщо якобіан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial w} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

У загальному випадку рівняння другого порядку з двома незалежними змінними

$$F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{61}$$

за допомогою оборотного точкового перетворення (60) приводиться до вигляду

$$G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = 0. \tag{62}$$

Якщо $u = u(\xi, \eta)$ – деякий розв'язок рівняння (62), то формули (60) визначають відповідний розв'язок рівняння (61) в параметричному вигляді.

Найпростіші перетворення незалежних змінних мають вигляд:

$$\begin{array}{lll} \xi = x - x_0, & \eta = y - y_0, & \text{(перетворення зсуву)}, \\ \xi = k_1 x, & \eta = k_2 y & \text{(перетворення масштабування)}. \end{array}$$

Перше перетворення відповідає переносу початку координат в точку $(x_0, y_0)$, а інше – зміні масштабів (стисненню або розтягу) уздовж осей $x$ та $y$.

Точкові перетворення використовуються для спрощення рівнянь і приведення їх до відомих. Іноді вони дозволяють звести нелінійні рівняння до лінійних.

**Приклад 11.** *Нелінійне рівняння*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^m \frac{\partial w}{\partial x}\right) + [xf(t) + g(t)]\frac{\partial w}{\partial x} + h(t)w$$

*за допомогою точкового перетворення*

$$w(x,t) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)dt, \quad \tau = \int F^2(t)H^m(t)dt,$$

*де функції $F$ та $H$ визначаються формулами*

$$F(t) = \exp\left[\int f(t)dt\right], \quad H(t) = \exp\left[\int h(t)dt\right],$$

*приводиться до простішого рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

**Приклад 12.** *Нелінійне рівняння*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(x,t)$$

*заміною $u = \exp(aw)$ приводиться до лінійного рівняння для функції $u = u(x,t)$:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + af(x,t)u.$$

## 4.2 Перетворення годографа

Для спрощення нелінійних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними іноді використовується перетворення годографа.

### 4.2.1 Випадок, коли одна з незалежних змінних приймається за шукану величину

Для рівняння з двома незалежними змінними $x$, $t$ та шуканою функцією $w = w(x,t)$ перетворення годографа полягає в тому, що розв'язок шукається в неявному вигляді ($x$ і $t$ можна поміняти місцями):

$$x = x(t,w), \tag{63}$$

тобто $t$ і $w$ приймаються за незалежні змінні, а $x$ – за залежну змінну. Перетворення годографа (63) не змінює порядок рівняння і є окремим випадком точкового перетворення (його можна записати в еквівалентному вигляді: $x = \tilde{w}$, $t = \tilde{t}$, $w = \tilde{x}$).

**Приклад 13.** *Розглянемо нелінійне рівняння другого порядку*

$$\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{64}$$

*Шукаємо розв'язок в неявному вигляді. Диференціюючи вираз (63) по обом змінним як неявну функцію з урахуванням залежності $w = w(x,t)$, отримаємо:*

$$\begin{array}{ll} 1 = x_w w_x & (\textit{диференціювання по } x), \\ 0 = x_w w_t + x_t & (\textit{диференціювання по } t), \\ 0 = x_{ww} w_x^2 + x_w w_{xx} & (\textit{диференціювання по } x \textit{ двічі}), \end{array}$$

*де нижні індекси позначають відповідні частинні похідні. З цих співвідношень виразимо «старі» похідні через «нові»:*

$$w_x = \frac{1}{x_w}, \quad w_t = -\frac{x_t}{x_w}, \quad w_{xx} = -\frac{w_x^2 x_{ww}}{x_w} = -\frac{x_{ww}}{x_w^3}.$$

*Підставивши ці вирази в (64), приходимо до лінійного рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a\frac{\partial^2 x}{\partial w^2}.$$

### 4.2.2 Використання еквівалентної системи рівнянь

Для системи двох рівнянь з двома незалежними змінними $x$, $y$ і залежними змінними $w = w(x, y)$, $v = v(x, y)$ перетворення годографа полягає в тому, що $w$ і $v$ приймаються за незалежні змінні, а $x$ і $y$ – за залежні змінні, тобто шукаються функції

$$x = x(w, v), \qquad y = y(w, v). \tag{65}$$

Перетворення годографа застосовується в газовій динаміці і в теорії струменів для лінеаризації відповідних рівнянь та розв'язання деяких крайових задач.

Для дослідження окремих рівнянь іноді корисно перейти до еквівалентної системи рівнянь, а потім зробити перетворення годографа. Проілюструємо сказане на прикладах конкретних нелінійних рівнянь.

**Приклад 14.** *Стаціонарне рівняння Хохлова-Заболоцької (зустрічається в акустиці і в нелінійній механіці)*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial}{\partial y}\left(w\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \tag{66}$$

*представимо у вигляді системи рівнянь*

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -aw\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{67}$$

*Використаємо перетворення годографа (65): приймемо $w$ і $v$ за незалежні змінні, а $x$ і $y$ – за залежні змінні. Диференціюючи кожен вираз (65) по $x$ та по $y$ (як складені функції) і виключаючи з отриманих співвідношень частинні похідні $x_w$, $x_v$, $y_w$, $y_v$, маємо:*

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{де} \quad J = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{68}$$

*Виключаючи з (67) за допомогою (68) похідні $w_x$, $w_y$, $v_x$, $v_y$, приходимо до системи*

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial w}, \quad -aw\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial w}. \tag{69}$$

*Почленно продиференціюємо перше рівняння по $w$, а друге – по $v$, і виключимо змішану похідну $y_{wv}$. В результаті для функції $x = x(w, v)$ отримаємо лінійне рівняння*

$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} + aw\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0. \tag{70}$$

*Аналогічним чином з системи (69) для функції $y = y(w, v)$ маємо інше лінійне рівняння:*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{aw}\frac{\partial y}{\partial w}\right) = 0. \tag{71}$$

*Взявши деякий частинний розв'язок $x = x(w, v)$ рівняння (70) і підставивши його в систему (69), простим інтегруванням можна знайти $y = y(w, v)$. Виключивши з рівностей (67) змінну $v$, отримаємо точний розв'язок $w = w(x, y)$ нелінійного рівняння (66).*

**Зауваження 7.** *Рівняння (70) при довільному $a$ має простий частинний розв'язок*

$$x = C_1 wv + C_2 w + C_3 v + C_4, \tag{72}$$

*де $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ – довільні сталі. Підставивши його в систему (69), отримаємо*

$$\frac{\partial y}{\partial v} = C_1 v + C_2, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = -a(C_1 w + C_3)w. \tag{73}$$

*Інтегруючи перше рівняння (73), знаходимо $y = \frac{1}{2}C_1 v^2 + C_2 v + \varphi(w)$. Підставивши цей розв'язок в друге рівняння (73), визначаємо функцію $\varphi(w)$. В результаті отримаємо*

$$y = \frac{1}{2}C_1 v^2 + C_2 v - \frac{1}{3}aC_1 w^3 - \frac{1}{2}aC_3 w^2 + C_5. \tag{74}$$

*Формули (72) і (74) визначають точний розв'язок рівняння (66) в параметричній формі ($v$ – параметр).*

*Аналогічним чином можна побудувати й інші точні розв'язки рівняння (66).*

# 5 Лекція 5. Контактні перетворення. Перетворення Лежандра та Ейлера

## 5.1 Загальний вигляд контактних перетворень

Будемо розглядати функції двох змінних $w = w(x, y)$. Загальною властивістю контактних перетворень є залежність вихідних змінних від нових змінних та їх перших похідних:

$$x = X\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad y = Y\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad w = W\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad (75)$$

Функції $X$, $Y$, $W$ не є довільними: вони вибираються так, щоб перші похідні вихідних змінних також залежали тільки від перетворених змінних і їх похідних не вище першого порядку:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = U\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = V\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \quad (76)$$

Контактні перетворення (75), (76) не підвищують порядку рівнянь, до яких вони застосовуються.

У загальному випадку рівняння другого порядку з двома незалежними змінними

$$F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (77)$$

за допомогою контактного перетворення (75), (76) приводиться до вигляду

$$G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = 0. \quad (78)$$

Іноді рівняння (78) буває простішим за рівняння (77). Якщо $u = u(\xi, \eta)$ – деякий розв'язок рівняння (78), то формули (75) визначають відповідний розв'язок рівняння (77) у параметричному вигляді.

Покажемо, як знайти функції $U$ і $V$ в (76) та співвідношення, яким повинні задовольняти функції $X$, $Y$, $W$ в (75). Продиференціюємо за правилом диференціювання неявних функцій перший і другий вирази (75) по $x$ і $y$, враховуючи, що $u = u(\xi, \eta)$. В результаті отримаємо чотири співвідношення:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial u}p + \frac{\partial X}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial u}q + \frac{\partial X}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1,\\
&\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial u}p + \frac{\partial Y}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial u}q + \frac{\partial Y}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,\\
&\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial u}p + \frac{\partial X}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial u}q + \frac{\partial X}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,\\
&\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial u}p + \frac{\partial Y}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial u}q + \frac{\partial Y}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1,
\end{aligned} \quad (79)$$

де використано короткі позначення $p = \frac{\partial u}{\partial \xi}$, $q = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ $(p_\eta = q_\xi)$; індекси $\xi$ та $\eta$ відповідають частинним похідним. Перша пара рівностей (79) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial\eta}{\partial x}$, друга – відносно $\frac{\partial\xi}{\partial y}$, $\frac{\partial\eta}{\partial y}$. Розв'язавши ці системи, можна знайти похідні $\frac{\partial\xi}{\partial x}=A$, $\frac{\partial\eta}{\partial x}=B$, $\frac{\partial\xi}{\partial y}=C$, $\frac{\partial\eta}{\partial y}=D$, а потім, продиференціювавши третє співвідношення (75) по $x$ і $y$, можна виразити величини $U=\frac{\partial w}{\partial x}$, $V=\frac{\partial w}{\partial y}$ – через нові змінні:

$$U=A\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}+\frac{\partial W}{\partial u}p+\frac{\partial W}{\partial p}p_\xi+\frac{\partial W}{\partial q}p_\eta\right)+B\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}+\frac{\partial W}{\partial u}q+\frac{\partial W}{\partial p}q_\xi+\frac{\partial W}{\partial q}q_\eta\right),$$
$$V=C\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}+\frac{\partial W}{\partial u}p+\frac{\partial W}{\partial p}p_\xi+\frac{\partial W}{\partial q}p_\eta\right)+D\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}+\frac{\partial W}{\partial u}q+\frac{\partial W}{\partial p}q_\xi+\frac{\partial W}{\partial q}q_\eta\right).$$

При цьому умови відсутності залежності від других похідних

$$\frac{\partial U}{\partial p_\xi}=\frac{\partial V}{\partial p_\xi}=\frac{\partial U}{\partial p_\eta}=\frac{\partial V}{\partial p_\eta}=\frac{\partial U}{\partial q_\eta}=\frac{\partial V}{\partial q_\eta}=0\quad(p_\eta\equiv q_\xi),$$

які випливають з (76), задають додаткові співвідношення між функціями $X$, $Y$, $W$.

**Зауваження 8.** *Важливо відмітити, що контактні перетворення визначаються незалежно від вигляду конкретних рівнянь.*

## 5.2 Перетворення Лежандра

Важливим частинним випадком контактних перетворень є перетворення Лежандра, яке визначається співвідношеннями

$$w(x,y)+u(\xi,\eta)=x\xi+y\eta,\quad x=\frac{\partial u}{\partial\xi},\quad y=\frac{\partial u}{\partial\eta},\tag{80}$$

де $u$ – нова залежна змінна, а $\xi$ і $\eta$ – нові незалежні змінні.

З формул (80) отримаємо перші похідні (використовуються два наслідки першої рівності, отримані шляхом її диференціювання по $x$ і $y$, з урахуванням двох інших співвідношень):

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\xi,\quad\frac{\partial w}{\partial y}=\eta.\tag{81}$$

За допомогою формул (80), (81) знаходимо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=J\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},\quad\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=-J\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta},\quad\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=J\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2},$$

де

$$J=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2,\quad\frac{1}{J}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2.$$

У загальному випадку рівняння другого порядку з двома незалежними змінними (77) за допомогою перетворення Лежандра (80) (при $J\neq0$) приводиться до вигляду

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta},\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}-u,\xi,\eta,J\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},-J\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta},J\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right)=0.\tag{82}$$

Іноді рівняння (82) буває простішим за рівняння (77).

Нехай $u = u(\xi, \eta)$ – деякий розв'язок рівняння (82). Тоді формули

$$w = \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} - u(\xi, \eta), \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

визначають відповідний розв'язок рівняння (77) у параметричному вигляді.

**Зауваження 9.** *Використання перетворення Лежандра може призвести до втрати розв'язків, які відповідають умові $J = 0$.*

**Приклад 15.** *Рівняння стаціонарного трансзвукового газового потоку*

$$a \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

*перетворенням Лежандра (80) зводиться до лінійного рівняння зі змінними коефіцієнтами*

$$a\xi \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

## 5.3 Перетворення Ейлера

Перетворення Ейлера є окремим випадком контактних перетворень. Воно визначається співвідношеннями

$$w(x, y) + u(\xi, \eta) = x\xi, \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \eta. \tag{83}$$

З формул (83) (використовуються два наслідки першої рівності, отримані шляхом її диференціювання по $x$ і $y$, з урахуванням двох інших співвідношень) можна отримати:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \xi, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \eta}. \tag{84}$$

Диференціюючи ці вирази по $x$ і $y$, знаходимо другі похідні

$$w_{xx} = \frac{1}{u_{\xi\xi}}, \quad w_{xy} = -\frac{u_{\xi\eta}}{u_{\xi\xi}}, \quad w_{yy} = \frac{u_{\xi\eta}^2 - u_{\xi\xi} u_{\eta\eta}}{u_{\xi\xi}}. \tag{85}$$

Нижні індекси позначають відповідні частинні похідні.

Перетворення Ейлера (83)-(85) використовується для розв'язання (лінеаризації) деяких нелінійних рівнянь з частинними похідними.

У загальному випадку рівняння другого порядку з двома незалежними змінними (77) за допомогою перетворення Ейлера (83) приводиться до вигляду

$$F\left(u_\xi, \eta, \xi u_\xi - u, \xi, -u_\eta, \frac{1}{u_{\xi\xi}}, -\frac{u_{\xi\eta}}{u_{\xi\xi}}, \frac{u_{\xi\eta}^2 - u_{\xi\xi} u_{\eta\eta}}{u_{\xi\xi}}\right) = 0. \tag{86}$$

Іноді рівняння (86) буває простішим за рівняння (77).

Нехай $u = u(\xi, \eta)$ – деякий розв'язок рівняння (86). Тоді формули (83) визначають відповідний розв'язок рівняння (77) у параметричному вигляді.

**Приклад 16.** *Нелінійне рівняння*

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a = 0$$

*перетворенням Ейлера (83)-(85) приводиться до лінійного рівняння теплопровідності:*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

**Приклад 17.** *Нелінійне рівняння*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{87}$$

*також лінеаризується перетворенням Ейлера (83)-(85):*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = a\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

*Інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок останнього рівняння*

$$u = f(\xi) + g(\eta)\mathrm{e}^{a\xi}, \tag{88}$$

*де* $f(\xi)$ *і* $g(\eta)$ *– довільний функції.*

*Використовуючи формули (83) та (88), отримаємо загальний розв'язок вихідного рівняння (87) в параметричному вигляді:*

$$\begin{aligned} w &= x\xi - f(\xi) - g(y)\mathrm{e}^{a\xi}, \\ x &= f'_\xi(\xi) + ag(y)\mathrm{e}^{a\xi}. \end{aligned}$$

# 6 Лекція 6. Перетворення Беклунда. Диференціальні підстановки

## 6.1 Перетворення Беклунда

### 6.1.1 Перетворення Беклунда для рівнянь другого порядку

Нехай $w = w(x, y)$ – розв'язок рівняння другого порядку з двома незалежними змінними

$$F_1\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{89}$$

а $u = u(x, y)$ – розв'язок рівняння

$$F_2\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{90}$$

Кажуть, що рівняння (89) та (90) пов'язані перетворенням Беклунда

$$\begin{aligned} \Phi_1\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \\ \Phi_2\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \end{aligned} \tag{91}$$

якщо з сумісності пари (89) і (91) випливає рівняння (90), а з сумісності пари (90) і (91) випливає (89). Якщо для деякого конкретного розв'язку $u = u(x, y)$ рівняння (90) вдається розв'язати рівняння (91) відносно $w = w(x, y)$, то функція $w = w(x, y)$ буде розв'язком рівняння (89). Співвідношення (91) називають також *диференціальними зв'язками.*

Перетворення Беклунда можуть зберігати інваріантним вигляд рівняння[2] (це дає можливість «розмножувати» розв'язки) або пов'язувати розв'язки різних рівнянь (це дозволяє з розв'язків одного рівняння отримувати розв'язки іншого).

**Приклад 18.** *Покажемо, що рівняння Бюргерса*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{92}$$

*пов'язане з лінійним рівнянням теплопровідності*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{93}$$

*перетворенням Беклунда*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}uw = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial (uw)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{94}$$

[2] В таких випадках їх називають автоперетвореннями Беклунда

*Дійсно, виключаючи з (94) $w$, приходимо до рівняння (93). Обернено: нехай $u(x,t)$ – ненульовий розв'язок рівняння теплопровідності (93). Поділивши (93) на $u$ і обчисливши частинні похідні по $x$ від обох частин отриманого виразу, з урахуванням рівності $(u_t/u)_x = (u_x/u)_t$ маємо*

$$\left(\frac{u_x}{u}\right)_t = \left(\frac{u_{xx}}{u}\right)_x .$$

*Підставимо сюди наслідки першого співвідношення (94) (див. першу і останню формули в ланцюжку рівностей):*

$$\frac{u_x}{u} = \frac{w}{2} \Rightarrow \frac{u_{xx}}{u} - \left(\frac{u_x}{u}\right)^2 = \frac{w_x}{2} \Rightarrow \frac{u_{xx}}{u} = \frac{w_x}{2} + \frac{1}{4}w^2.$$

*В результаті приходимо до рівняння Бюргерса (92).*

**Приклад 19.** *Покажемо, що рівняння Ліувілля*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \mathrm{e}^{\lambda w} \tag{95}$$

*пов'язане з лінійним хвильовим рівнянням*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{96}$$

*перетворенням Беклунда*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{2k}{\lambda} \exp\left[\frac{\lambda}{2}(w+u)\right], \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{1}{k} \exp\left[\frac{\lambda}{2}(w-u)\right], \end{aligned} \tag{97}$$

*де $k \neq 0$ – довільна стала.*

*Продиференціюємо перше співвідношення (97) по $y$, а друге – по $x$. З огляду на рівності $u_{yx} = u_{xy}$ і $w_{yx} = w_{xy}$ і виключаючи комбінації перших похідних за допомогою (97), маємо*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= k \exp\left[\frac{\lambda}{2}(w+u)\right] \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\exp(\lambda w), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\lambda}{2k} \exp\left[\frac{\lambda}{2}(w-u)\right] \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \exp(\lambda w). \end{aligned} \tag{98}$$

*Додаючи рівності (98), отримаємо лінійне рівняння (96). Віднімаючи з першої рівності другу, приходимо до нелінійного рівняння (95).*

**Зауваження 10.** *Важливо відмітити, що, на відміну від контактних перетворень, перетворення Беклунда визначаються виглядом конкретних рівнянь (перетворення Беклунда існує не завжди).*

**Зауваження 11.** *Для двох еволюційних рівнянь n-го порядку вигляду*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F_1\left(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_2\left(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right)$$

*перетворення Беклунда часто шукають у формі диференціального зв'язку*

$$\Phi\left(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^m w}{\partial x^m}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right) = 0,$$

*що містить похідні тільки по одній змінній $x$ (інша змінна $t$ входить неявно через функції $w$, $u$). Цей зв'язок може розглядатися як звичайне диференціальне рівняння відносно однієї із залежних змінних.*

### 6.1.2 Перетворення Беклунда, що ґрунтуються на законах збереження

Будемо вважати, що диференціальне рівняння можна записати у формі закону збереження:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[G\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots\right)\right] = 0. \tag{99}$$

Перетворення Беклунда (перетворення за розв'язком)

$$dz = F\left(w, w_x, w_y, \ldots\right) dy - G\left(w, w_x, w_y, \ldots\right) dx, \quad d\eta = dy \tag{100}$$

$$\left(dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -G, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = F\right)$$

визначає перехід від $x$ і $y$ до нових незалежних змінних $z$ і $\eta$ за правилом

$$\frac{\partial}{\partial x} = -G\frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} + F\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тут використано короткий запис функцій $F$ і $G$ з (99). Перетворення (100) зберігає порядок розглядуваного рівняння.

**Зауваження 12.** *Нерідко зустрічаються перетворення за розв'язком (100), доповнені перетворенням шуканої величини вигляду $u = \varphi(w)$.*

**Приклад 20.** *Розглянемо нелінійне рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right], \tag{101}$$

*яке є частинним випадком рівняння (99) при $y = t$, $F = f(w)w_x$, $G = -w$.*

*Перетворення за розв'язком (100) в даному випадку має вигляд*

$$dz = wdx + [f(w)w_x]dt, \quad d\eta = dt. \tag{102}$$

*Воно визначає перехід від $x$, $y$ до нових незалежних змінних $z$, $\eta$ за правилом*

$$\frac{\partial}{\partial x} = w\frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} + [f(w)w_x]\frac{\partial}{\partial z}.$$

*Застосовуючи перетворення (102) до рівняння (101), отримаємо*

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = w^2\frac{\partial}{\partial z}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial z}\right]. \tag{103}$$

*Підстановка $w = 1/u$ приводить (103) до рівняння вигляду (101):*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{u^2}f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right].$$

*В частинному випадку $f(w) = aw^{-2}$ нелінійне рівняння (101) перетворенням (102) переводиться в лінійне рівняння $u_\eta = au_{zz}$.*

## 6.2 Диференціальні підстановки

Крім перетворень Беклунда, в математичній фізиці використовуються також *диференціальні підстановки*. Для рівнянь другого порядку диференціальні підстановки зазвичай мають вигляд

$$w = \Psi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Диференціальна підстановка підвищує порядок рівняння (якщо вона підставляється в рівняння для $w$) і дозволяє за допомогою розв'язків одного рівняння отримувати розв'язки іншого. Зв'язок між розв'язками цих рівнянь, взагалі кажучи, є необоротним і носить односторонній характер. Диференціальні підстановки можуть бути наслідком перетворення Беклунда (хоча це і не є обов'язковим). Диференціальна підстановка може знижувати порядок рівняння (коли в якості вихідного приймається рівняння для $u$).

У загальному випадку диференціальні підстановки визначаються формулами

$$x = X\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad y = Y\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad w = W\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

де функції $X$, $Y$, $W$ можуть задаватися довільним чином.

**Приклад 21.** *Розглянемо рівняння Бюргерса*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{104}$$

*Перше співвідношення (94) можна записати як диференціальну підстановку (перетворення Хопфа-Коула)*

$$w = \frac{2u_x}{u}. \tag{105}$$

*Підставляючи (105) в (104), отримаємо рівняння*

$$\frac{2u_{tx}}{u} - \frac{2u_t u_x}{u^2} = \frac{2u_{xxx}}{u} - \frac{2u_x u_{xx}}{u^2},$$

*яке можна перетворити до наступного вигляду:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right] = 0.$$

*Таким чином, будь-який розв'язок лінійного рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

*формулою (105) переводиться в розв'язок рівняння Бюргерса (104). Обернене твердження невірне: розв'язок рівняння (104) породжує, взагалі кажучи, розв'язок більш загального рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)u,$$

*де $f(t)$ – деяка функція $t$.*

**Приклад 22.** *Рівняння стаціонарного ламінарного гідродинамічного примежового шару на плоскій пластині має вигляд*

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}. \tag{106}$$

*де $w$ – функція струменю, $x$ і $y$ – відповідно поздовжня і поперечна координати, $\nu$ – кінематична в'язкість рідини.*

*Перетворення Мізеса (диференціальна підстановка)*

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad u(\xi, \eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \text{де} \quad w = w(x, y), \tag{107}$$

*знижує порядок рівняння (106) і приводить його до простішого нелінійного рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial}{\partial \eta}\left(u \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{108}$$

*При виведенні рівняння (108) використовувалися формули для обчислення похідних:*

$$\frac{\partial}{\partial y} = u\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u\frac{\partial u}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = u\frac{\partial}{\partial \eta}\left(u\frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

# 7 Лекція 7. Розв'язки типу біжучої хвилі

## 7.1 Попередні зауваження

Для побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики розроблено низку методів, що ґрунтуються на переході до нових змінних (залежних і незалежних). При цьому зазвичай ставиться мета: знайти нові змінні, кількість яких менше, ніж число вихідних змінних. Перехід до таких змінних приводить до простіших рівнянь. Зокрема, пошук точних розв'язків рівнянь з частинними похідними з двома незалежними змінними зводиться до дослідження звичайних диференціальних рівнянь (або систем таких рівнянь). Природно, при зазначеній редукції розв'язки звичайних диференціальних рівнянь дають не всі розв'язки вихідного рівняння з частинними похідними, а лише клас розв'язків, що володіють деякими спеціальними властивостями.

Найпростішими класами точних розв'язків, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, є розв'язки типу біжучої хвилі і автомодельні розв'язки. Існування цих розв'язків зазвичай (але не завжди) обумовлено інваріантністю розглянутих рівнянь щодо перетворень зсуву і розтягу-стискання.

Розв'язки типу біжучої хвилі і автомодельні розв'язки часто зустрічаються в різних застосуваннях. Нижче розглянуто характерні особливості цих розв'язків. Вважається, що шукана величина $w$ залежить від двох змінних: $x$ та $t$, де $t$ відіграє роль часу, а $x$ – роль просторової координати.

## 7.2 Розв'язки типу біжучої хвилі

### 7.2.1 Загальний вигляд розв'язків типу біжучої хвилі

**Означення 4.** *Розв'язками типу біжучої хвилі називаються розв'язки вигляду*

$$w(x,t) = W(z), \quad z = kx - \lambda t, \tag{109}$$

*де величина $\lambda/k$ відіграє роль швидкості поширення хвилі ($\lambda$ може бути будь-якого знака, значення $\lambda = 0$ відповідає стаціонарному розв'язку, а значення $k = 0$ просторово-однорідному розв'язку).*

Розв'язки типу біжучої хвилі характеризуються тим, що профілі цих розв'язків у різні моменти часу[3] отримуються один з одного перетворенням зсуву і можна ввести декартову систему координат, що рухається зі сталою швидкістю, в якої профіль шуканої величини буде стаціонарним. При $k > 0$, $\lambda > 0$ хвиля (109) рухається вздовж осі $x$ вправо (в бік збільшення значень $x$).

Пошук розв'язків типу біжучої хвилі проводиться прямою підстановкою виразу (109) у вихідне рівняння з урахуванням рівностей $w_x = kW'$, $w_t = -\lambda W'$ і т. д. (штрих позначає похідну по $z$).

Розв'язки типу біжучої хвилі допускають рівняння, що не залежать явно від незалежних змінних:

$$F\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \dots\right) = 0. \tag{110}$$

[3] Термін *розв'язок типу біжучої хвилі* використовується також у випадках, коли змінна $t$ відіграє роль просторової координати.

Підставляючи (109) в (110), отримаємо автономне звичайне диференціальне рівняння відносно функції $W(z)$:

$$F\left(W, kW', -\lambda W', k^2 W'', -k\lambda W'', \lambda^2 W'', \ldots\right) = 0,$$

де $k$ і $\lambda$ – довільні сталі.

**Приклад 23.** *Нелінійне рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] \tag{111}$$

*допускає розв'язки типу біжучої хвилі. Підставивши (109) в (111), приходимо до звичайного диференціального рівняння*

$$k^2[f(W)W']' + \lambda W' = 0.$$

*Інтегруючи двічі, отримаємо його розв'язок у неявному вигляді*

$$k^2 \int \frac{f(W)dW}{\lambda W + C_1} = -z + C_2,$$

*де $C_1$ і $C_2$ – довільні сталі.*

**Приклад 24.** *Розглянемо однорідне рівняння Монжа-Ампера*

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{112}$$

*Підставивши в нього вираз (109), отримаємо тотожність. Тому рівняння (112) має розв'язок*

$$w = W(kx - \lambda t),$$

*де $W(z)$ – довільна функція, $k$, $\lambda$ – довільні сталі.*

**Приклад 25.** *Система нелінійних рівнянь масо- та теплопереносу при наявності об'ємних хімічних реакцій*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, w),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(u, w)$$

*допускає точний розв'язок типу біжучої хвилі*

$$u = u(z), \quad w = w(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

*де функції $u(z)$ і $w(z)$ описуються системою звичайних диференціальних рівнянь*

$$ak^2 u'' + \lambda u' + f(u, w) = 0,$$
$$bk^2 w'' + \lambda w' + g(u, w) = 0.$$

### 7.2.2 Інваріантність рівнянь відносно перетворень зсуву

Важливо відмітити, що рівняння вигляду (110) інваріантні (тобто зберігають вигляд) відносно перетворень зсуву за незалежними змінними:

$$x = \bar{x} + C_1, \quad t = \bar{t} + C_2, \tag{113}$$

де $C_1$ і $C_2$ – довільні сталі. Властивість інваріантності конкретних рівнянь відносно перетворень зсуву (113) нерозривно пов'язана з існуванням у цих рівнянь розв'язків типу біжучої хвилі (з першого випливає друге).

Розв'язки типу біжучої хвилі є найпростішими *інваріантними розв'язками*, тобто розв'язками, які обумовлені здатністю рівнянь бути інваріантними відносно деяких перетворень (що містять довільні сталі).

**Зауваження 13.** *Умова інваріантності рівняння відносно перетворень (113) не є необхідною умовою для існування розв'язків типу біжучої хвилі. Прямою перевіркою можна переконатися, що рівняння другого порядку*

$$\begin{aligned} F\,(w, w_x, w_t, xw_x + tw_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, xw_{xx} + tw_{xt},& \\ xw_{xt} + tw_{tt}, x^2 w_{xx} + 2xtw_{xt} + t^2 w_{tt}, xw_t w_{xx} + tw_x w_{tt}) &= 0 \end{aligned}$$

*не допускає перетворень вигляду (113), але має точний розв'язок типу біжучої хвилі (109), який описується звичайним диференціальним рівнянням*

$$F\left(W, kW', -\lambda W', zW', k^2 W'', -k\lambda W'', \lambda^2 W'', kzW'', -\lambda zW'', z^2 W'', -k\lambda zW''\right) = 0.$$

### 7.2.3 Функціональне рівняння, що задає розв'язок типу біжучої хвилі

Покажемо, що розв'язок типу біжучої хвилі можна визначити як розв'язок функціонального рівняння

$$w(x, t) = w(x + C\lambda, t + Ck), \tag{114}$$

де $k$ і $\lambda$ – деякі сталі, $C$ – довільна стала. Рівняння (114) означає, що шукана функція не змінюється при одночасному збільшенні обох аргументів на пропорційні величини ($C$ – коефіцієнт пропорційності).

Дійсно, диференціюючи рівняння (114) по $C$, а потім вважаючи $C = 0$, приходимо до диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку

$$\lambda \frac{\partial w}{\partial x} + k \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \tag{115}$$

Загальний розв'язок цього рівняння отримується методом характеристик. Для цього будуємо систему рівнянь

$$\frac{dx}{\lambda} = \frac{dt}{k} = \frac{dw}{0}.$$

З першого та другого рівнянь отримуємо відповідно дві характеристики

$$C_1 = kx - \lambda t, \quad w = C_2.$$

Загальний інтеграл рівняння (115) матиме вигляд

$$\Phi(kx - \lambda t, w) = 0,$$

де $\Phi(x_1, x_2)$ – довільна функція. Якщо виразити звідси $w$, то отримаємо загальний розв'язок цього рівняння вигляду (109), що й слід було довести.

# 8 Лекція 8. Автомодельні розв'язки. Метод подібності

## 8.1 Загальний вигляд автомодельних розв'язків. Метод подібності

**Означення 5.** *Автомодельними називаються розв'язки вигляду*

$$w(x,t) = t^{\alpha} U(\zeta), \quad \zeta = xt^{\beta}. \tag{116}$$

Профілі цих розв'язків в різні моменти часу виходять один з одного *перетвореннями подібності* (перетвореннями типу розтягу або стискання).

Автомодельні розв'язки існують, якщо розтяг незалежних і залежної змінних за правилом

$$t = C\bar{t}, \quad x = C^k \bar{x}, \quad w = C^m \bar{w}, \quad C > 0 \text{ – довільна стала,} \tag{117}$$

при відповідному виборі $k$ та $m$ еквівалентний тотожному перетворенню, тобто вихідне рівняння

$$F(x, t, w, w_x, w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, \ldots) = 0 \tag{118}$$

в результаті перетворення (117) переходить в точно таке ж рівняння

$$F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{w}, \bar{w}_{\bar{x}}, \bar{w}_{\bar{t}}, \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}}, \bar{w}_{\bar{x}\bar{t}}, \bar{w}_{\bar{t}\bar{t}}, \ldots) = 0. \tag{119}$$

Тут функція $F$ та ж сама, що і в рівнянні (118); при цьому рівняння (118) не залежить від параметра $C$.

Знайдемо зв'язок між параметрами $\alpha$, $\beta$ в розв'язку (116) і параметрами $k$, $m$ в перетворенні розтягу-стискання (117). Нехай

$$w = \Phi(x,t) \tag{120}$$

– розв'язок рівняння (118). Тоді функція

$$\bar{w} = \Phi(\bar{x}, \bar{t}) \tag{121}$$

буде розв'язком рівняння (119).

З огляду на явний вигляд розв'язку (116), з (121) отримаємо

$$\bar{w} = \bar{t}^{\alpha} U(\bar{x}\bar{t}^{\beta}). \tag{122}$$

Повертаючись в (122) до вихідних змінних за допомогою (117), маємо

$$w = C^{m-\alpha} t^{\alpha} U\left(C^{-k-\beta} x t^{\beta}\right). \tag{123}$$

Ця функція, за побудовою, задовольняє рівнянню (118), тобто є його розв'язком. Вимагатимемо, щоб розв'язок (123) співпадав з (116) (тобто щоб умова єдиності розв'язку виконувалася для будь-яких значень параметра $C \neq 0$). Для цього треба покласти

$$\alpha = m \quad \beta = -k, \tag{124}$$

після чого автомодельні розв'язки (116) набувають вигляду

$$w(x,t) = t^{m} U(\zeta), \quad \zeta = xt^{-k}. \tag{125}$$

На практиці пошук автомодельних розв'язків проводиться за отриманим вище критерієм існування: якщо $k$ і $m$ в (117) знайдено, то автомодельні змінні мають вигляд (125).

Метод побудови автомодельних розв'язків, що ґрунтується на використанні перетворень розтягу-стискання типу (117), називається *методом подібності*. Важливо відмітити, що ці перетворення містять вільний (довільний) параметр $C$.

Для наочності наведемо основні етапи побудови автомодельних розв'язків.

**Схема побудови автомодельних розв'язків, яка часто використовується на практиці**

1. У вихідному рівнянні (118)
$$F(x, t, w, w_x, w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, \ldots) = 0$$
виконуємо перетворення (117)
$$t = C\bar{t}, \quad x = C^k\bar{x}, \quad w = C^m\bar{w}, \quad C > 0 - \text{довільна стала.}$$

2. Підбираємо $k$ і $m$ так, щоб рівняння зберігало вигляд, тобто отримуємо рівняння (119)
$$F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{w}, \bar{w}_{\bar{x}}, \bar{w}_{\bar{t}}, \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}}, \bar{w}_{\bar{x}\bar{t}}, \bar{w}_{\bar{t}\bar{t}}, \ldots) = 0.$$

3. Будуємо автомодельний розв'язок у вигляді: $w(x,t) = t^m U(\zeta)$, $\zeta = xt^{-k}$.

4. Підставляємо побудований автомодельний розв'язок у вихідне рівняння (118) і отримуємо звичайне диференціальне рівняння для $U(\zeta)$.

## 8.2 Приклади автомодельних розв'язків рівнянь математичної фізики та механіки

**Приклад 26.** *Розглянемо рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом степеневого типу*
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^n. \tag{126}$$

*Розтяг змінних за формулами (117) перетворює рівняння (126) до наступного вигляду:*
$$C^{m-1}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = aC^{m-2k}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + bC^{mn}\bar{w}^n.$$
*Прирівнювання степеней $C$ дає систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих $k$ і $m$:*
$$m - 1 = m - 2k = mn,$$
*яка має єдиний розв'язок: $k = 1/2$, $m = 1/(1-n)$. З огляду на ці рівності і використовуючи формули (125), знаходимо автомодельні змінні*
$$w = t^{1/(1-n)}U(\zeta), \quad \zeta = xt^{-1/2}.$$
*Підставляючи їх в (126), приходимо до звичайного диференціального рівняння для визначення функції $U(\zeta)$:*
$$aU'' + \frac{1}{2}\zeta U' + \frac{1}{n-1}U + bU^n = 0.$$

**Приклад 27.** *Розглянемо нелінійне рівняння*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n \frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{127}$$

*яке зустрічається в задачах хвильової і газової динаміки.*

*Підставивши (117) в (127), отримаємо*

$$C^{m-2}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = aC^{mn+m-2k}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{w}^n \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right).$$

*Прирівнювання степеней $C$ дає одне лінійне рівняння: $m - 2 = mn + m - 2k$. Звідси маємо: $k = mn/2 + 1$, де $m$ можна вибрати довільним чином. Використовуючи далі формули (125), знаходимо автомодельні змінні:*

$$w = t^m U(\zeta), \quad \zeta = xt^{-mn/2-1}.$$

*Підставивши їх у (127), можна отримати звичайне диференціальне рівняння для функції $U(\zeta)$.*

У табл. 1 наведено інші приклади автомодельних розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики.

Описаний метод побудови автомодельних розв'язків застосовний також до систем рівнянь з частинними похідними. Проілюструємо сказане на конкретному прикладі.

**Приклад 28.** *Розглянемо систему рівнянь стаціонарного ламінарного гідродинамічного прикордонного шару на плоскій пластині:*

$$\begin{aligned} &u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{128}$$

*Зробимо в (128) розтяг незалежних і залежних змінних за правилом*

$$x = C\bar{x}, \quad y = C^k\bar{y}, \quad u = C^m\bar{u}, \quad v = C^n\bar{v}. \tag{129}$$

*Помноживши отримані рівняння на відповідні сталі множники, маємо*

$$\begin{aligned} &\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + C^{n-m-k+1}\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = C^{-m-2k+1}\nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \\ &\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + C^{n-m-k+1}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0. \end{aligned} \tag{130}$$

*Вимагатимемо, щоб вигляд рівнянь перетвореної системи (130) співпадав з виглядом рівнянь вихідної системи (128). Ця умова дає два лінійні алгебраїчні рівняння: $n - m - k + 1 = 0$, $-2k - m + 1 = 0$. Розв'язавши їх щодо $m$ і $n$, отримаємо*

$$m = 1 - 2k, \quad n = -k, \tag{131}$$

Табл. 1: Деякі нелінійні рівняння математичної фізики, що допускають автомодельні розв'язки

| Рівняння | Назва рівняння | Вигляд розв'язку | Визначальне рівняння |
|---|---|---|---|
| $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]$ | Нестаціонарне рівняння теплопровідності | $w = w(\zeta)$, $\zeta = xt^{-1/2}$ | $[f(w)w']' + \frac{1}{2}\zeta w' = 0$ |
| $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^k$ | Рівняння теплопровідності з джерелом | $w = t^pU(\zeta)$, $\zeta = xt^q$, $p = \frac{1}{1-k}$, $q = \frac{k-n-1}{2(1-k)}$ | $a(U^nU')' - q\zeta U' + bU^k - pU = 0$ |
| $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\frac{\partial w}{\partial x}$ | Рівняння Бюргерса | $w = t^{-1/2}U(\zeta)$, $\zeta = xt^{-1/2}$ | $aU'' + bUU' + \frac{1}{2}\zeta U' + \frac{1}{2}U = 0$ |
| $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ | Потенціальне рівняння Бюргерса | $w = w(\zeta)$, $\zeta = xt^{-1/2}$ | $aw'' + b(w')^2 + \frac{1}{2}\zeta w' = 0$ |
| $\frac{\partial w}{\partial t} = a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ | Рівняння нелінійної фільтрації | $w = t^pU(\zeta)$, $\zeta = xt^q$, $p = -\frac{(k+2)q+1}{k}$, $q$ – будь-яке | $a(U')^kU'' = q\zeta U' + pU$ |
| $\frac{\partial w}{\partial t} = f\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ | Рівняння нелінійної фільтрації | $w = t^{1/2}U(\zeta)$, $\zeta = xt^{-1/2}$ | $2f(U')U'' + \zeta U' - U = 0$ |
| $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]$ | Хвильове рівняння | $w = w(\zeta)$, $\zeta = x/t$ | $(\zeta^2w')' = [f(w)w']$ |
| $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = aw^n$ | Рівняння теплопровідності з джерелом | $w = x^{\frac{2}{1-n}}U(\zeta)$, $\zeta = y/x$ | $(1 + \zeta^2)U'' - \frac{2(1+n)}{1-n}\zeta U' + \frac{2(1+n)}{(1-n)^2}U - aU^n = 0$ |
| $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ | Рівняння трансзвукового потоку газу | $w = x^{-3k-2}U(\zeta)$, $\zeta = x^ky$, $k$ – будь-яке | $\frac{a}{k+1}U'U'' + \frac{k^2}{k+1}\zeta^2U'' - 5k\zeta U' + 3(3k+2)U = 0$ |
| $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw\frac{\partial w}{\partial x}$ | Рівняння Кортевега-де Фріза | $w = t^{-2/3}U(\zeta)$, $\zeta = xt^{=1/3}$ | $aU''' + bUU' + \frac{1}{3}\zeta U' + \frac{2}{3}U = 0$ |
| $\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$ | Рівняння примежевого шару | $w = x^{\lambda+1}U(\zeta)$, $\zeta = x^\lambda y$, $\lambda$ – будь-яке | $(2\lambda + 1)(U')^2 - (\lambda + 1)UU'' = aU'''$ |

*де показник $k$ можна вибирати довільним чином. Для побудови автомодельного розв'язку використовуємо приведену вище схему побудови автомодельних розв'язків, в якій для визначення вигляду функцій $u$ і $v$ треба відповідно перепозначити $x \to y$, $t \to x$, $w \to u$ (для компоненти $u$) і $x \to y$, $t \to x$, $w \to v$, $m \to n$ (для компоненти $v$). В результаті маємо*

$$u(x,y) = x^{1-2k}U(\zeta), \quad v(x,y) = x^{-k}V(\zeta), \quad \zeta = yx^{-k}, \tag{132}$$

*де $k$ – довільна стала. Підставивши (132) у вихідну систему (128), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь для функцій $U = U(\zeta)$, $V = V(\zeta)$:*

$$U[(1-2k)U - k\zeta U'] + VU' = \nu U'',$$
$$(1-2k)U - k\zeta U' + V' = 0.$$

## 8.3 Загальніший підхід, що ґрунтується на розв'язанні функціонального рівняння

Алгоритм побудови автомодельного розв'язку, описаний в розд. 8.1, ґрунтувався на явному представленні цього розв'язку у вигляді (116). Однак існує загальніший підхід, що дозволяє вивести залежність (116) безпосередньо з умови інваріантності рівняння (118) відносно перетворення (117).

Дійсно, будемо вважати, що рівняння (118) в результаті перетворення (117) переходить в точно таке саме рівняння (119). Нехай (120) – розв'язок рівняння (118). Тоді функція (121) буде розв'язком рівняння (119). Повертаючись в (121) до вихідних змінних (117), маємо

$$w = C^m \Phi\left(C^{-k}x, C^{-1}t\right). \tag{133}$$

Ця функція, за побудовою, задовольняє рівнянню (118), тобто є його розв'язком. Вимагатимемо, щоб розв'язок (133) збігався з (120) (тобто щоб умова єдиності розв'язку виконувалася для будь-яких значень параметра $C \neq 0$). В результаті приходимо до функціонального рівняння

$$\Phi(x,t) = C^m \Phi\left(C^{-k}x, C^{-1}t\right). \tag{134}$$

При $C = 1$ рівняння (134) обертається на тотожність. Розкладемо (134) в ряд за параметром $C$ в околі значення $C = 1$, потім поділимо отриманий вираз на $(C-1)$ і перейдемо до границі при $C \to 1$. В результаті отримаємо лінійне рівняння з частинними похідними першого порядку для функції $\Phi$:

$$kx\frac{\partial \Phi}{\partial x} + t\frac{\partial \Phi}{\partial t} - m\Phi = 0. \tag{135}$$

Запишемо відповідну характеристичну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{kx} = \frac{dt}{t} = \frac{d\Phi}{m\Phi}.$$

Знаходимо її перші інтеграли:

$$xt^{-k} = A_1, \quad t^{-m}\Phi = A_2,$$

де $A_1$, $A_2$ – довільні сталі. Загальний розв'язок рівняння з частинними похідними (135) шукається у вигляді $A_2 = U(A_1)$, де $U(A)$ – довільна функція. В результаті отримаємо розв'язок функціонального рівняння (134):

$$\Phi(x,t) = t^m U(\zeta), \quad \zeta = xt^{-k}. \tag{136}$$

Підставивши (136) в (120), приходимо до автомодельного розв'язку (125).

## 8.4 Деякі зауваження

**Зауваження 14.** *При $\alpha = 0$ автомодельні розв'язки (116) зустрічаються в задачах з найпростішими початковими і граничними умовами:*

$$w = w_1 \quad \textit{при} \quad t = 0 \ (x > 0), \quad w = w_2 \quad \textit{при} \quad x = 0 \ (t > 0),$$

*де $w_1$ і $w_2$ – деякі сталі.*

**Зауваження 15.** *Умова існування перетворення (117), що зберігає вигляд розглядуваного рівняння, є достатньою для існування автомодельного розв'язку. Однак ця умова не є необхідною: існують рівняння, які не допускають перетворень вигляду (117), але мають автомодельні розв'язки.*

Наприклад, рівняння

$$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (bx^2 + at^2)f(w)$$

має автомодельний розв'язок

$$w = w(z), \quad z = xt \quad \Longrightarrow \quad w'' - f(w) = 0,$$

але не допускає перетворень вигляду (117). У вказаному рівнянні $a$ і $b$ можуть бути довільними функціями аргументів $x$, $t$, $w$, $w_x$, $w_t$, $w_{xx}$, ...

Ширший клас рівнянь

$$F\left(w, \frac{a_1 w_x^n + b_1 w_t^m}{a_1 t^n + b_1 x^m}, \frac{a_2 w_{xx}^p + b_2 w_{tt}^q}{a_2 t^{2p} + b_2 x^{2q}}, \frac{a_3 w_{xx} + b_3 w_{tt}}{a_3 w_x^2 + b_3 w_t^2}\right) = 0,$$

де $a_k$ і $b_k$ – довільні функції аргументів $x$, $t$, $w$, $w_x$, ..., також не допускає перетворень вигляду (117), але має автомодельні розв'язки вигляду $w = w(z)$, $z = xt$.

**Зауваження 16.** *Розв'язки типу біжучої хвилі тісно пов'язані з автомодельними розв'язками. Дійсно, поклавши*

$$t = \ln\tau, \quad x = \ln y,$$

*в формулах*

$$w(x,t) = W(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

*одержимо зображення біжучої хвилі в автомодельному вигляді*

$$w = W(k\ln(y\tau^{-\lambda/k})) = U(y\tau^{-\lambda/k}),$$

*де $U(z) = W(k\ln z)$.*

# 9 Лекція 9. Рівняння, інваріантні відносно комбінацій перетворень зсуву і розтягу. Узагальнено-автомодельні розв'язки

## 9.1 Експоненціально-автомодельні (граничні) розв'язки

**Означення 6.** *Експоненціально-автомодельними розв'язками називаються розв'язки вигляду*

$$w(x,t) = \mathrm{e}^{\alpha t} U(\zeta), \quad \zeta = x\mathrm{e}^{\beta t}. \tag{137}$$

Експоненціально-автомодельні розв'язки існують, якщо розглядуване рівняння

$$F(x, t, w, w_x, w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, \ldots) = 0 \tag{138}$$

є інваріантним відносно перетворення

$$t = \bar{t} + \ln C, \quad x = C^k \bar{x}, \quad w = C^m \bar{w}, \tag{139}$$

де $C > 0$ – довільна стала, при деяких $k$ і $m$. Перетворення (139) являє собою комбінацію перетворення зсуву по $t$ з перетвореннями типу розтягу-стискання по $x$ і $w$. Важливо підкреслити, що ці перетворення містять довільний параметр $C$, а розглядуване рівняння не залежить від параметра $C$.

Знайдемо зв'язок між параметрами $\alpha$, $\beta$ в розв'язку (137) і параметрами $k$, $m$ в перетворенні зсуву-розтягу (139). Нехай $w = \Phi(x,t)$ – розв'язок рівняння (138). Тоді функція $\bar{w} = \Phi(\bar{x}, \bar{t})$ буде розв'язком рівняння

$$F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{w}, \bar{w}_{\bar{x}}, \bar{w}_{\bar{t}}, \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}}, \bar{w}_{\bar{x}\bar{t}}, \bar{w}_{\bar{t}\bar{t}}, \ldots) = 0. \tag{140}$$

З огляду на явний вигляд розв'язку (137), отримаємо

$$\bar{w} = \mathrm{e}^{\alpha \bar{t}} U(\bar{x}\mathrm{e}^{\beta \bar{t}}).$$

Повертаючись до початкових змінних за допомогою (139), маємо

$$w = C^{m-\alpha} \mathrm{e}^{\alpha t} U(C^{-k-\beta} x \mathrm{e}^{\beta t}).$$

Вимагатимемо, щоб даний розв'язок співпав з (137) (тобто щоб умова єдиності розв'язку виконувалося для будь-яких значень параметра $C \neq 0$). Для цього треба покласти

$$\alpha = m, \quad \beta = -k. \tag{141}$$

На практиці пошук експоненціально-автомодельних розв'язків проводиться за отриманим вище критерієм існування: якщо $k$ і $m$ в (139) знайдено, то нові змінні мають вигляд (137) з параметрами (141).

**Зауваження 17.** *Розв'язки вигляду (137) іноді називають також граничними автомодельними розв'язками.*

Табл. 2: Інваріантні розв'язки, пошук яких ґрунтується на використанні комбінацій перетворень зсуву та розтягу ($C$, $C_1$, $C_2$ – довільні сталі)

| № | Вигляд розв'язків | Інваріантні перетворення | Зв'язок між коефіцієнтами |
|---|---|---|---|
| 1 | $w = U(\zeta)$, $\zeta = \alpha x + \beta y$ | $t = \bar{t} + C_1, \quad x = \bar{x} + C_2$ | $\alpha$ і $\beta$ – довільні сталі |
| 2 | $w = t^\alpha U(\zeta)$, $\zeta = xt^\beta$ | $t = C\bar{t}$, $x = C^k\bar{x}$, $w = C^m\bar{w}$ | $\alpha = m$, $\beta = -k$ |
| 3 | $w(x,t) = \mathrm{e}^{\alpha t}U(\zeta)$, $\zeta = x\mathrm{e}^{\beta t}$ | $t = \bar{t} + \ln C$, $x = C^k\bar{x}$, $w = C^m\bar{w}$ | $\alpha = m$, $\beta = -k$ |
| 4 | $w = t^\alpha U(\zeta)$, $\zeta = x + \beta \ln t$ | $t = C\bar{t}$, $x = \bar{x} + k\ln C$, $w = C^m\bar{w}$ | $\alpha = m$, $\beta = -k$ |

**Приклад 29.** *Покажемо, що нелінійне рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{142}$$

*допускає експоненціально-автомодельний розв'язок. Підставивши (139) в (142), отримуємо*

$$C^m\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = aC^{mn+m-2k}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{w}^n\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right).$$

*Прирівнювання степеней $C$ дає одне лінійне рівняння: $m = mn+m-2k$. Звідси маємо: $k = mn/2$, де $m$ – будь-яке число. Використовуючи далі формули (137) та (141) і вважаючи без втрати загальності $m = 2$ (це еквівалентно операції масштабування за часом $t$), знаходимо нові змінні*

$$w(x,t) = \mathrm{e}^{2t}U(\zeta), \quad \zeta = x\mathrm{e}^{-nt}. \tag{143}$$

*Підставляючи їх в (142), отримаємо звичайне диференціальне рівняння для функції $U(\zeta)$:*

$$a(U^nU')' + n\zeta U' - 2U = 0.$$

**Приклад 30.** *Використовуючи описаний метод, можна показати, що рівняння*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

*також має експоненціально-автомодельний розв'язок вигляду (143).*

## 9.2 Інваріантні розв'язки

Для наочності в табл. 2 зібрано інваріантні розв'язки, пошук яких ґрунтується на використанні комбінацій перетворень зсуву та розтягу по незалежним змінним та перетворень розтягу по залежній змінній. Крім розв'язків типу біжучої хвилі, автомодельних розв'язків і експоненціально-автомодельних розв'язків, розглянутих раніше, в останньому рядку описано ще один інваріантний розв'язок. Проілюструємо спосіб його побудови на конкретному прикладі.

**Приклад 31.** *Покажемо, що нелінійне рівняння теплопровідності (142) допускає розв'язок, вказаний у четвертому рядку табл. 2. Для цього виконаємо перетворення*

$$t = C\bar{t}, \quad x = \bar{x} + k \ln C, \quad w = C^m \bar{w}.$$

*В результаті отримаємо*

$$C^{m-1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = aC^{mn+m} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{w}^n \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right).$$

*Прирівнювання степеней $C$ дає одне лінійне рівняння: $m-1 = mn+m$. Звідси знаходимо: $m = -1/n$, а $k$ – будь-яке число. Тому (див. четвертий рядок табл. 2) рівняння (142) має інваріантний розв'язок вигляду*

$$w(x,t) = t^{-1/n} U(\zeta), \quad \zeta = x + \beta \ln t, \quad \text{де } \beta \text{ – будь-яке число.} \tag{144}$$

*Підставляючи (144) в (142), приходимо до автономного звичайного диференціального рівняння*

$$a(U^n U')' - \beta U' + \frac{1}{n} U = 0.$$

*Частинному значенню $C = 0$ відповідає розв'язок з відокремлюваними змінними у вигляді суми функцій різних аргументів.*

Розглянуті вище конкретні приклади наочно показують, що побудова точних розв'язків шляхом зниження розмірності рівнянь з частинними похідними досягається, коли розглядаються рівняння, інваріантні відносно деяких перетворень (які містять один або кілька довільних параметрів) або, іншими словами, мають певну симетрію. Пізніше ми розглянемо загальний метод дослідження симетрії диференціальних рівнянь (метод групового аналізу), який дозволяє регулярним чином отримувати подібні і складніші інваріантні розв'язки.

## 9.3 Узагальнено-автомодельні розв'язки

**Означення 7.** *Узагальнено-автомодельними розв'язками називаються розв'язки вигляду*

$$w(x,t) = \varphi(t) U(\zeta), \quad \zeta = \psi(t) x. \tag{145}$$

Формула (145) включає в себе, як окремі випадки, розглянуті раніше автомодельні і експоненціально-автомодельні розв'язки.

Процедура пошуку узагальнено-автомодельних розв'язків полягає в наступному: після підстановки виразу (145) в розглядуване рівняння функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ вибираються таким чином, щоб функція $U(\zeta)$ задовольняла одному звичайному диференціальному рівнянню.

**Приклад 32.** *Шукаємо розв'язок нелінійного рівняння теплопровідності (142) у вигляді (145). Використовуючи (145) і з огляду на зв'язок $x = \zeta/\psi(t)$, знаходимо похідні:*

$$w_t = \varphi'_t U + \varphi \psi'_t x U'_\zeta = \varphi'_t U + \frac{\varphi \psi'_t}{\psi} \zeta U'_\zeta, \quad w_x = \varphi \psi U'_\zeta, \quad (w^n w_x)_x = \psi^2 \varphi^{n+1} (U^n U'_\zeta)'_\zeta.$$

*Підставивши їх у (142), після ділення на $\varphi'_t$ отримаємо*

$$U + \frac{\varphi\psi'_t}{\varphi'_t\psi}\zeta U'_\zeta = a\frac{\psi^2\varphi^{n+1}}{\varphi'_t}(U^n U'_\zeta)'_\zeta. \tag{146}$$

*Щоб це співвідношення являло собою звичайне диференціальне рівняння для $U(\zeta)$, треба прирівняти функціональні коефіцієнти при $\zeta U'_\zeta$ і $(U^n U'_\zeta)'_\zeta$ сталим величинам:*

$$\frac{\varphi\psi'_t}{\varphi'_t\psi} = \alpha, \quad \frac{\psi^2\varphi^{n+1}}{\varphi'_t} = \beta. \tag{147}$$

*При цьому функція $U(\zeta)$ буде описуватися рівнянням*

$$U + \alpha\zeta U'_\zeta = a\beta(U^n U'_\zeta)'_\zeta.$$

*З першого рівняння (147) знаходимо*

$$\psi = C_1\varphi^\alpha, \tag{148}$$

*де $C_1$ – довільна стала. Підставляючи отриманий вираз у друге рівняння (147) і інтегруючи, маємо*

$$\begin{aligned} &\frac{C_1^2}{\beta}t + C_2 = -\frac{1}{2\alpha+n}\varphi^{-2\alpha-n} && \textit{при} \quad \alpha \neq -\frac{n}{2}, \\ &\frac{C_1^2}{\beta}t + C_2 = \ln|\varphi| && \textit{при} \quad \alpha = -\frac{n}{2}, \end{aligned} \tag{149}$$

*де $C_2$ – довільна стала. Підберемо сталі $C_1$, $C_2$ та $\beta$ так, щоб отримати якомога простіші вирази для функцій $\varphi(t)$, $\psi(t)$. З (148), (149), зокрема, маємо*

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = t^{-1/(2\alpha+n)}, \quad \psi(t) = t^{-\alpha/(2\alpha+n)} && \textit{при} \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad \beta = -\frac{1}{2\alpha+n}; \\ &\varphi(t) = \mathrm{e}^{2t}, \quad \psi(t) = \mathrm{e}^{-nt} && \textit{при} \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

*Тут перша пара функцій $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ відповідає автомодельному розв'язку ($\alpha \neq -n/2$ – будь-яке число), а друга пара – експоненціально-автомодельному розв'язку.*

# 10 Лекція 10. Метод узагальненого відокремлення змінних. Вступ

## 10.1 Розв'язки з мультиплікативним і адитивним відокремленням змінних

Метод відокремлення змінних є найпоширенішим методом розв'язання лінійних рівнянь математичної фізики. Для рівнянь з двома незалежними змінними $x$ і $t$ та шуканою функцією $w$ цей метод базується на пошуку точних розв'язків у вигляді добутку функцій різних аргументів:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t). \tag{150}$$

Інтегрування окремих класів нелінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку ґрунтується на пошуку точних розв'язків у вигляді суми функцій різних аргументів:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t). \tag{151}$$

Деякі нелінійні рівняння математичної фізики другого і вищих порядків також мають точні розв'язки вигляду (150) або (151). Подібні розв'язки будемо називати відповідно *розв'язками з мультиплікативним* і *адитивним відокремленням змінних* [4, 10, 11, 1, 12, 13].

## 10.2 Найпростіші випадки відокремлення змінних в нелінійних рівняннях

В окремих випадках відокремлення змінних в нелінійних рівняннях проводиться за тією ж схемою, що і в лінійних рівняннях. Точний розв'язок шукається у вигляді добутку або суми функцій різних аргументів. Підставивши (150) або (151) в аналізоване рівняння і виконуючи елементарні алгебраїчні операції, приходять до рівності двох виразів (для рівнянь з двома змінними), що залежать від різних аргументів. Така ситуація можлива тільки в тому випадку, коли кожен із зазначених виразів дорівнює одній і тій самій сталій величині. В результаті отримують звичайні диференціальні рівняння для шуканих величин.

Проілюструємо сказане на конкретних прикладах.

**Приклад 33.** *Рівняння теплопровідності зі степеневою нелінійністю*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^k \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{152}$$

*має точний розв'язок у вигляді добутку функцій різних аргументів. Підставивши (150) в рівняння (152), приходимо до виразу*

$$\varphi\psi'_t = a\psi^{k+1}(\varphi^k\varphi'_x)'_x.$$

*Відокремлюючи змінні шляхом ділення обох частин на $\varphi\psi^{k+1}$, отримаємо*

$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = \frac{a(\varphi^k\varphi'_x)'_x}{\varphi}.$$

*Ліва частина цієї рівності залежить тільки від змінної $t$, а права – тільки від $x$. Це можливо лише при виконанні умов*

$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = C, \quad \frac{a(\varphi^k \varphi'_x)'_x}{\varphi} = C \tag{153}$$

*де $C$ – довільна стала. Розв'язавши звичайні диференціальні рівняння (153), отримаємо розв'язки вигляду (150) рівняння (152).*

Процедура побудови розв'язку зі змінними вигляду (150) нелінійного рівняння (152) повністю аналогічна процедурі, яка використовується для розв'язання лінійних рівнянь, зокрема, для рівняння (152) при $k = 0$. Випадки розв'язків з подібним відокремленням змінних будемо називати *найпростішими.*

**Приклад 34.** *Хвильове рівняння з експоненціальною нелінійністю*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{154}$$

*має точний розв'язок у вигляді суми функцій різних аргументів. Підставимо вираз (151) в рівняння (154). Після ділення обох частин на $\mathrm{e}^{\lambda\psi}$ приходимо до рівності*

$$\mathrm{e}^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = a(\mathrm{e}^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x,$$

*ліва частина якої залежить тільки від змінної $t$, а права – тільки від $x$. Це можливо лише при виконанні умов*

$$\mathrm{e}^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = C, \quad a(\mathrm{e}^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x = C, \tag{155}$$

*де $C$ – довільна стала. Розв'язавши звичайні диференціальні рівняння (155), отримаємо розв'язок рівняння (154) вигляду (151).*

**Приклад 35.** *Рівняння теплопровідності в анізотропному середовищі з джерелом логарифмічного типу*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = aw\ln w \tag{156}$$

*має точний розв'язок у вигляді добутку функцій різних аргументів*

$$w = \varphi(x)\psi(y). \tag{157}$$

*Підставимо вираз (157) в рівняння (156). Після ділення на $\varphi\psi$ і перенесення окремих доданків в різні частини отриманої рівності, одержимо*

$$\frac{1}{\varphi}[f(x)\varphi'_x]'_x - a\ln\varphi = -\frac{1}{\psi}[g(y)\psi'_y]'_y + a\ln\psi.$$

*Ліва частина цього виразу залежить тільки від змінної $x$, а права – тільки від $y$. Прирівнюючи їх до сталої величини, можна отримати звичайні диференціальні рівняння для функцій $\varphi(x)$ і $\psi(y)$.*

## 10.3 Приклади нетривіального відокремлення змінних в нелінійних рівняннях

У багатьох випадках відокремлення змінних в нелінійних рівняннях відбувається інакше, ніж в лінійних рівняннях. Проілюструємо сказане на конкретних прикладах.

**Приклад 36.** *Розглянемо рівняння з кубічною нелінійністю*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - aw^3, \tag{158}$$

*де $f(t)$ – довільна функція.*

*Шукатимемо точні розв'язки у вигляді добутку функцій різних аргументів. Підставимо (150) в (158) і поділимо обидві частини отриманої рівності на $f(t)\varphi(x)\psi(t)$. В результаті маємо*

$$\frac{\psi'_t}{f\psi} = \frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} + \frac{\psi^2}{f}[(\varphi'_x)^2 - a\varphi^2], \tag{159}$$

*У загальному випадку цей вираз не можна представити у вигляді суми функцій різних аргументів. Це, однак, не означає, що рівняння (158) не має розв'язків вигляду (150).*
*1°. Прямою перевіркою можна переконатися, що функціонально-диференціальне рівняння (159) при $a > 0$ має розв'язок*

$$\varphi(x) = C\exp\left(\pm x\sqrt{a}\right), \quad \psi(t) = \exp\left[a\int f(t)dt\right], \tag{160}$$

*де $C$ – довільна стала. Розв'язок (160) для $\varphi$ обертає в нуль вираз в квадратних дужках в (159), що дозволяє відокремити змінні.*
*2°. Є загальніший розв'язок функціонально-диференціального рівняння (159) при $a > 0$:*

$$\begin{aligned}&\varphi(x) = C_1\exp\left(x\sqrt{a}\right) + C_2\exp\left(-x\sqrt{a}\right),\\ &\psi(t) = \mathrm{e}^F\left(C_3 + 8aC_1C_2\int \mathrm{e}^{2F}dt\right)^{-1/2}, \qquad F = a\int f(t)dt,\end{aligned}$$

*де $C_1$, $C_2$, $C_3$ – довільні сталі. Функція $\varphi = \varphi(x)$ така, що обидві комбінації величин в рівнянні (159), які залежать від $x$, одночасно будуть рівні деяким сталим:*

$$\frac{\varphi''_{xx}}{\varphi} = \mathrm{const}, \quad (\varphi'_x)^2 - a\varphi^2 = \mathrm{const},$$

*Ця обставина і дозволяє відокремити змінні. Відмітимо, що функція $\psi = \psi(t)$ задовольняє рівнянню Бернуллі $\psi'_t = af(t)\psi - 4aC_1C_2\psi^3$.*
*3°. Є інший розв'язок функціонально-диференціального рівняння (159) при $a < 0$:*

$$\begin{aligned}&\varphi(x) = C_1\sin\left(x\sqrt{-a}\right) + C_2\cos\left(x\sqrt{-a}\right),\\ &\psi(t) = \mathrm{e}^F\left[C_3 + 2a(C_1^2 + C_2^2)\int \mathrm{e}^{2F}dt\right]^{-1/2}, \qquad F = a\int f(t)dt,\end{aligned}$$

*де $C_1$, $C_2$, $C_3$ – довільні сталі. Функція $\varphi = \varphi(x)$ така, що обидві комбінації величин в рівнянні (159), які залежать від $x$, одночасно будуть рівні деяким сталим. Відмітимо, що функція $\psi = \psi(t)$ задовольняє рівнянню Бернуллі $\psi'_t = af(t)\psi - a(C_1^2 + C_2^2)\psi^3$.*

Розглянуті приклади ілюструють деякі особливості розв'язків з відокремленням змінних. У наступних лекціях будуть описані досить загальні методи побудови таких і складніших розв'язків нелінійних рівнянь з частинними похідними.

# 11 Лекція 11. Структура розв'язків з узагальненим відокремленням змінних. Спрощена схема побудови точних розв'язків

## 11.1 Структура розв'язків з узагальненим відокремленням змінних

### 11.1.1 Загальний вигляд розв'язків. Розглядувані класи нелінійних рівнянь

Для простоти викладу обмежимося тут описом випадку рівнянь математичної фізики з двома незалежними змінними $x$, $y$ та залежною змінною $w$ (одна з незалежних змінних може відігравати роль часу).

Лінійні рівняння математичної фізики з відокремлюваними змінними допускають точні розв'язки у вигляді суми

$$w(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_n(x)\psi_n(y), \tag{161}$$

де $w_i = \varphi_i(x)\psi_i(y)$ – відповідні частинні розв'язки. При цьому функції $\varphi_i(x)$, як і функції $\psi_i(y)$, при різних значеннях $i$ не пов'язані одна з одною.

Багато нелінійних рівнянь з частинними похідними з квадратичними і степеневими нелінійностями вигляду

$$f_1(x)g_1(y)\Pi_1[w] + f_2(x)g_2(y)\Pi_2[w] + \ldots + f_m(x)g_m(y)\Pi_m[w] = 0, \tag{162}$$

де $\Pi_i[w]$ – диференціальні форми, що являють собою добутки цілих невід'ємних степеней функції $w$ та її частинних похідних $w_x$, $w_y$, $w_{xx}$, $w_{xy}$, $w_{yy}$, $w_{xxx}$, ..., також мають точні розв'язки вигляду (161). Такі розв'язки будемо називати *розв'язками з узагальненим відокремленням змінних*. Для нелінійних рівнянь, на відміну від лінійних, функції $\varphi_i(x)$ при різних значеннях $i$ зазвичай пов'язані одна з одною [і з функціями $\psi_i(y)$]. У загальному випадку функції $\varphi_i(x)$ і $\psi_i(y)$ заздалегідь не відомі і повинні визначатися в ході дослідження. Приклади точних розв'язків нелінійних рівнянь вигляду (161) для найпростіших випадків $n = 1$ і $n = 2$ (при $\psi_1 = \varphi_2 = 1$) розглянуті нами на попередній лекції.

Відзначимо, що найчастіше зустрічається розв'язок з узагальненим відокремленням змінних спеціального вигляду

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x)$$

(у правій частині незалежні змінні можна поміняти місцями). В окремому випадку $\chi(x) = 0$ цей розв'язок переходить в розв'язок з мультиплікативним відокремленням змінних, а у випадку $\varphi(x) = 1$ – в розв'язок з адитивним відокремленням змінних.

**Зауваження 18.** *Вирази вигляду (161) часто використовуються в прикладній та обчислювальній математиці для побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь методом Гальоркіна (і його різними модифікаціями).*

**Зауваження 19.** *Розв'язки вигляду (161) можуть допускати також рівняння, що мають відмінні від (162) нелінійності.*

### 11.1.2 Загальний вигляд функціонально-диференціальних рівнянь

У загальному випадку після підстановки виразу (161) в диференціальне рівняння (162) для визначення функцій $\varphi_i(x)$ і $\psi_i(y)$ отримаємо функціонально-диференціальне рівняння

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \ldots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0, \tag{163}$$

де функціонали $\Phi_j(X)\Psi_j(Y)$ залежать відповідно від змінних $x$ і $y$:

$$\begin{aligned} \Phi_j(X) &\equiv \Phi_j\left(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_n, \varphi_n', \varphi_n''\right), \\ \Psi_j(Y) &\equiv \Psi_j\left(y, \psi_1, \psi_1', \psi_1'', \ldots, \psi_n, \psi_n', \psi_n''\right). \end{aligned} \tag{164}$$

Тут для наочності формули виписані для випадку рівняння другого порядку (162); для рівнянь старших порядків в праві частини формул (164) увійдуть відповідні старші похідні функцій $\varphi_i(x)$ і $\psi_i(y)$.

Далі в наступних темах буде описано два загальних методи розв'язання функціонально-диференціальних рівнянь вигляду (163), (164), а також буде розглянуто два спеціальні методи, що не володіють загальністю (при використанні цих методів менший обсяг обчислень).

**Зауваження 20.** *На відміну від звичайних диференціальних рівнянь, в рівняння (163), (164) входять кілька функцій (та їх похідних), що залежать від різних аргументів.*

## 11.2 Спрощена схема побудови точних розв'язків, що ґрунтується на апріорному заданні одної системи координатних функцій

### 11.2.1 Опис спрощеної схеми побудови точних розв'язків

Для побудови точних розв'язків рівнянь вигляду (162) з квадратичною або степеневою нелінійністю, що не залежать явно від $x$ (тобто всі $f_i = \mathrm{const}$), можна використовувати наступний спрощений підхід. Розв'язок шукаємо у вигляді скінчених сум (161). Припустимо, що система координатних функцій $\varphi_i(x)$ описується лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. Найпоширеніші розв'язки таких рівнянь мають вигляд

$$\varphi_i(x) = x^i, \quad \varphi_i(x) = \mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad \varphi_i(x) = \sin(\alpha_i x), \quad \varphi_i(x) = \cos(\beta_i x). \tag{165}$$

Скінчені набори цих функцій (у різних комбінаціях) можна використовувати для пошуку точних розв'язків з узагальненим відокремленням змінних вигляду (161), де $\lambda_i$, $\alpha_i$, $\beta_i$ розглядаються як вільні параметри. Друга система функцій $g_i(y)$ визначається шляхом розв'язання відповідних нелінійних рівнянь, одержуваних підстановкою виразу (161) в розглядуване рівняння.

Зазначений підхід не має тієї загальності, якою володіють методи, описані далі. Однак явне завдання однієї системи координатних функцій $\varphi_i(x)$ різко спрощує процедуру побудови точних розв'язків [при цьому окремі розв'язки вигляду (161) можуть бути втрачені]. Важливо відмітити, що відомі до теперішнього часу точні розв'язки (з узагальненим відокремленням змінних) рівнянь з частинними похідними з квадратичною нелінійністю в переважній більшості задаються координатними функціями вигляду (165) (зазвичай при $n = 2$).

### 11.2.2 Приклади побудови розв'язків нелінійних рівнянь старших порядків

Розглянемо конкретні приклади використання спрощеної схеми побудови точних розв'язків з узагальненим відокремленням змінних нелінійних рівнянь старших порядків.

**Приклад 37.** *Рівняння ламінарного примежевого шару на плоскій пластині зводяться до одного нелінійного рівняння третього порядку для функції потоку [14, 15]:*

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}. \tag{166}$$

*Шукаємо точний розв'язок цього рівняння з узагальненим відокремленням змінних вигляду*

$$w(x, y) = x\psi(y) + \theta(y), \tag{167}$$

*яке відповідає найпростішим функціям $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 1$ при $n = 2$ у формулі (161). Підставивши (167) в (166), після перегрупування членів маємо*

$$x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy}] + [\psi'_y\theta'_y - \psi\theta''_{yy} - \nu\theta'''_{yyy}] = 0.$$

*Щоб задовольнити цій рівності при будь-яких значеннях $x$, треба прирівняти до нуля обидва вирази в квадратних дужках. В результаті отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь для визначення функцій $\psi = \psi(y)$ і $\theta = \theta(y)$:*

$$\begin{aligned} (\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy} &= 0, \\ \psi'_y\theta'_y - \psi\theta''_{yy} - \nu\theta'''_{yyy} &= 0. \end{aligned}$$

*Ця система має, наприклад, точний розв'язок*

$$\psi = \frac{6\nu}{y + C_1}, \quad \theta = \frac{C_2}{y + C_1} + \frac{C_3}{(y + C_1)^2} + C_4,$$

*де $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ – довільні сталі.*

**Приклад 38.** *Розглянемо нелінійне рівняння $n$-го порядку*

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\frac{\partial^n w}{\partial y^n}. \tag{168}$$

*де $f(x)$ – довільна функція. В частинному випадку $n = 3$, $f(x) = \nu = \text{const}$ воно збігається з рівнянням примежевого шару (166).*

*Шукаємо точний розв'язок рівняння (168) з узагальненим відокремленням змінних вигляду*

$$w(x, y) = \varphi(x)e^{\lambda y} + \theta(x), \tag{169}$$

*яке відповідає функціям $\psi_1(y) = e^{\lambda y}$, $\psi_2(y) = 1$ у формулі (161). Підставивши (169) в (168), після елементарних алгебраїчних дій отримаємо*

$$\lambda^2 e^{\lambda y}\varphi[\theta'_x + \lambda^{n-2} f(x)] = 0.$$

*Цій рівності можна задовольнити при*

$$\theta(x) = -\lambda^{n-2}\int f(x)dx + C, \quad \varphi(x)\ -\ \textit{довільна функція}, \tag{170}$$

*де $C$ – довільна стала. (Інший випадок, коли $\varphi = 0$, $\psi$ – будь-яка, малоцікавий.) Формули (169), (170) описують точний розв'язок рівняння (168):*

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)dx + C, \tag{171}$$

*що містить довільну функцію $\varphi(x)$ і дві довільні сталі $C$ і $\lambda$.*

**Приклад 39.** *Розглянемо нелінійне рівняння $n$-го порядку*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t)\frac{\partial^n w}{\partial x^n}, \tag{172}$$

*де $f(t)$ – довільна функція. В частинному випадку $n = 3$ і $f(t) = \mathrm{const}$ воно зустрічається в гідродинаміці (див., наприклад, [16]).*

*Шукаємо точний розв'язок рівняння (172) вигляду*

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t). \tag{173}$$

*Підставивши (173) в (172), маємо*

$$\varphi'_t - \lambda\varphi\psi = \lambda^{n-1}f(t)\varphi.$$

*Виразимо звідси $\psi$ і підставимо в (173). В результаті отримаємо розв'язок рівняння (172):*

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\varphi'_t(t)}{\varphi(t)} - \lambda^{n-2}f(t),$$

*де $\varphi(t)$ – довільна функція, $\lambda$ – довільна стала.*

# 12 Лекція 12. Розв'язання функціонально-диференціальних рівнянь методом диференціювання

## 12.1 Опис методу диференціювання

Процедура розв'язання отриманих на попередній лекції функціонально-диференціальних рівнянь

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \ldots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0, \tag{174}$$

$$\begin{aligned} \Phi_j(X) &\equiv \Phi_j\left(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_n, \varphi_n', \varphi_n''\right), \\ \Psi_j(Y) &\equiv \Psi_j\left(y, \psi_1, \psi_1', \psi_1'', \ldots, \psi_n, \psi_n', \psi_n''\right). \end{aligned} \tag{175}$$

складається з трьох послідовних етапів.
1°. Припустимо, що $\Psi_k \not\equiv 0$. Поділимо рівняння (174) на $\Psi_k$ і продиференціюємо по $y$. В результаті отримаємо рівняння такого ж вигляду, але з меншим числом членів:

$$\widetilde{\Phi}_1(X)\widetilde{\Psi}_1(Y) + \widetilde{\Phi}_2(X)\widetilde{\Psi}_2(Y) + \ldots + \widetilde{\Phi}_{k-1}(X)\widetilde{\Psi}_{k-1}(Y) = 0,$$

$$\widetilde{\Phi}_j(X) = \Phi_j(X), \quad \widetilde{\Psi}_j(Y) = [\Psi_j(Y)/\Psi_k(Y)]_y'.$$

Повторимо аналогічну процедуру ще $(k-3)$ разів. У підсумку приходимо до двочленного рівняння із відокремлюваними змінними

$$\widehat{\Phi}_1(X)\widehat{\Psi}_1(Y) + \widehat{\Phi}_2(X)\widehat{\Psi}_2(Y) = 0. \tag{176}$$

Тепер треба розглянути дві ситуації.

*Невироджений випадок*: $|\widehat{\Phi}_1(X)| + |\widehat{\Phi}_2(X)| \not\equiv 0$, $|\widehat{\Psi}_1(Y)| + |\widehat{\Psi}_2(Y)| \not\equiv 0$. Тоді розв'язки рівняння (176) визначаються зі звичайних диференціальних рівнянь:

$$\widehat{\Phi}_1(X) + C\widehat{\Phi}_2(X) = 0, \quad C\widehat{\Psi}_1(Y) - \widehat{\Psi}_2(Y) = 0,$$

де $C$ – довільна стала. Граничному випадку $C = \infty$ відповідають рівняння $\widehat{\Phi}_2 = 0$, $\widehat{\Psi}_1 = 0$.

*Два вироджених випадки*:

$$\widehat{\Phi}_1(X) \equiv 0, \quad \widehat{\Phi}_2(X) \equiv 0 \Longrightarrow \widehat{\Psi}_{1,2}(Y) - \text{будь-які};$$

$$\widehat{\Psi}_1(Y) \equiv 0, \quad \widehat{\Psi}_2(Y) \equiv 0 \Longrightarrow \widehat{\Phi}_{1,2}(X) - \text{будь-які}.$$

2°. Отримані розв'язки двочленного рівняння (176) треба підставити у вихідне функціонально-диференціальне рівняння (174), щоб прибрати «зайві» сталі інтегрування [вони з'являються через те, що рівняння (176) отримано з (174) шляхом диференціювання].
3°. Випадок $\Psi_k = 0$ треба розглянути окремо (оскільки рівняння на першому етапі ділилося на $\Psi_k$). Аналогічно слід досліджувати всі інші випадки тотожного обернення в нуль функціоналів, на які ділилися проміжні функціонально-диференціальні рівняння.

**Зауваження 21.** *Функціонально-диференціальне рівняння (174), (175) може не мати розв'язків.*

**Зауваження 22.** *На кожному етапі число членів даного функціонально-диференціального рівняння можна знижувати шляхом диференціювання як по змінній $y$, так і по змінній $x$. На першому етапі, наприклад, можна припустити, що $\Phi_k \neq 0$. Поділивши рівняння (174) на $\Phi_k$ і продиференціювавши по $x$, отримаємо рівняння такого ж вигляду, але з меншим числом членів.*

## 12.2 Приклади побудови розв'язків з узагальненим відокремленням змінних

Нижче подано конкретні приклади використання описаного методу для побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь з узагальненими відокремленням змінних.

**Приклад 40.** *Розглянемо нелінійне рівняння n-го порядку*

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\frac{\partial^n w}{\partial y^n}. \tag{177}$$

*де $f(x)$ – довільна функція. В частинному випадку $n = 3$, $f(x) = \text{const}$ воно збігається з рівнянням стаціонарного примежевого шару на плоскій пластині для функції потоку.*

*Шукаємо точний розв'язок рівняння (177) з узагальненим відокремленням змінних вигляду*

$$w(x, y) = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x). \tag{178}$$

*Підставивши (178) в (177) і скоротивши на $\varphi$, отримаємо функціонально-диференціальне рівняння*

$$\varphi'_x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy}] - \chi'_x\psi''_{yy} = f(x)\psi_y^{(n)}. \tag{179}$$

*Поділимо обидві частини рівняння (179) на $f(x)$, потім продиференціюємо по $x$. В результаті маємо*

$$(\varphi'_x/f)'_x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy}] - (\chi'_x/f)'_x\psi''_{yy} = 0. \tag{180}$$

*Невироджений випадок. Відокремлюючи в (180) змінні, отримаємо*

$$(\chi'_x/f)'_x = C_1(\varphi'_x/f)'_x,$$

$$(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - C_1\psi''_{yy} = 0.$$

*Інтегруючи, приходимо до наступних виразів:*

$$\psi(y) = C_4 \mathrm{e}^{\lambda y} - C_1, \quad \varphi(x) - \textit{будь-яка}, \quad \chi(x) = C_1\varphi(x) + C_2\int f(x)dx + C_3, \tag{181}$$

*де $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $\lambda$ – сталі інтегрування. Підставивши (181) в (179), знаходимо зв'язок між константами: $C_2 = -\lambda^{n-2}$. З огляду на сказане, а також формули (178) і (181), в результаті маємо розв'язки рівняння (177) вигляду (178):*

$$w(x, y) = \varphi(x)\mathrm{e}^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)dx + C,$$

*де $\varphi(x)$ – довільна функція, $C$, $\lambda$ – довільні сталі ($C = C_3$, $C_4 = 1$).*

*Вироджений випадок. З рівняння (180) маємо*

$$(\varphi'_x/f)'_x = 0 \quad (\chi'_x/f)'_x = 0, \quad \psi(y) - \textit{будь-яка}. \tag{182}$$

*Інтегруючи двічі перші два рівняння (182), отримаємо*

$$\varphi(x) = C_1\int f(x)dx + C_2, \quad \chi(x) = C_3\int f(x)dx + C_4, \tag{183}$$

*де $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ – довільні сталі.*

*Підставивши вирази (183) в (179), приходимо до звичайного диференціального рівняння для визначення функції $\psi = \psi(y)$:*

$$C_1(\psi'_y)^2 - (C_1\psi + C_3)\psi''_{yy} = \psi_y^{(n)}. \tag{184}$$

*Формули (178), (183) і рівняння (184) описують точний розв'язок рівняння (177).*

**Приклад 41.** *Двовимірні стаціонарні рівняння руху в'язкої нестискуваної рідини зводяться до одного нелінійного рівняння четвертого порядку для функції потоку [14]:*

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{185}$$

*Будемо шукати точні розв'язки рівняння (185) з відокремлюваними змінними вигляду*

$$w = \varphi(x) + \psi(y). \tag{186}$$

*Підставивши (186) в (185), маємо*

$$\psi'_y\varphi'''_{xxx} - \varphi'_x\psi'''_{yyy} = \nu\varphi''''_{xxxx} + \nu\psi''''_{yyyy}. \tag{187}$$

*Продиференціюємо обидві частини (187) по $x$ і $y$. В результаті отримаємо*

$$\psi''_{yy}\varphi''''_{xxxx} - \varphi''_{xx}\psi''''_{yyyy} = 0. \tag{188}$$

*Невироджених випадок. При $\varphi''_{xx} \not\equiv 0$ і $\psi''_{yy} \not\equiv 0$, відокремлюючи в (188) змінні, приходимо до лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*

$$\varphi''''_{xxxx} = C\varphi''_{xx}, \tag{189}$$

$$\psi''''_{yyyy} = C\psi''_{yy}, \tag{190}$$

*які мають розв'язки різного вигляду в залежності від величини константи інтегрування $C$.*

*$1^\circ$. Розв'язки рівнянь (189), (190) при $C = 0$:*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3, \\ \psi(y) &= B_1 + B_2y + B_3y^2 + B_4y^3. \end{aligned} \tag{191}$$

*де $A_k$, $B_k$ – довільні сталі ($k = 1, 2, 3, 4$). Підставивши (191) в (187), знаходимо значення сталих:*

$$\begin{array}{lll} A_4 = B_4 = 0, & A_n,\, B_n - \textit{будь-які} & (n = 1, 2, 3); \\ A_k = 0, & B_k - \textit{будь-які} & (k = 1, 2, 3, 4); \\ B_k = 0, & A_k - \textit{будь-які} & (k = 1, 2, 3, 4). \end{array}$$

*Перші два набори сталих визначають два відомі поліноміальні розв'язки рівняння (185) другої і третьої степені відносно незалежних змінних [14]:*

$$\begin{aligned} w &= C_1x^2 + C_2x + C_3y^2 + C_4y + C_5, \\ w &= C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4, \end{aligned}$$

*де $C_1$, ..., $C_5$ – довільні сталі.*
*2°. Розв'язки рівнянь (189), (190) при $C = \lambda^2 > 0$:*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= A_1 + A_2x + A_3e^{\lambda x} + A_4e^{-\lambda x},\\ \psi(y) &= B_1 + B_2y + B_3e^{\lambda y} + B_4e^{-\lambda y}.\end{aligned} \tag{192}$$

*Підставимо (192) в (187). Після скорочення на $\lambda^3$ і зведення подібних членів отримаємо*

$$A_3(\nu\lambda - B_2)e^{\lambda x} + A_4(\nu\lambda + B_2)e^{-\lambda x} + B_3(\nu\lambda + A_2)e^{\lambda y} + B_4(\nu\lambda - A_2)e^{-\lambda y} = 0.$$

*Прирівнюючи коефіцієнти при експонентах до нуля, знаходимо значення сталих:*

$$\begin{array}{ll} A_3 = A_4 = B_3 = 0,\ A_2 = \nu\lambda & \textit{випадок 1},\\ A_3 = B_3 = 0,\ A_2 = \nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda & \textit{випадок 2},\\ A_3 = B_4 = 0,\ A_2 = -\nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda & \textit{випадок 3}, \end{array}$$

*(Решта сталих можуть набувати довільних значень.) Зазначені набори сталих визначають три розв'язки рівняння (185) вигляду (186):*

$$\begin{aligned} w &= C_1e^{-\lambda y} + C_2y + C_3 + \nu\lambda x,\\ w &= C_1e^{-\lambda x} + \nu\lambda x + C_2e^{-\lambda y} - \nu\lambda y + C_3,\\ w &= C_1e^{-\lambda x} - \nu\lambda x + C_2e^{\lambda y} - \nu\lambda y + C_3, \end{aligned}$$

*де $C_1$, $C_2$, $C_3$, $\lambda$ – довільні сталі.*
*3°. Розв'язки рівнянь (189), (190) при $C = -\lambda^2 < 0$:*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= A_1 + A_2x + A_3\cos(\lambda x) + A_4\sin(\lambda x),\\ \psi(y) &= B_1 + B_2y + B_3\cos(\lambda y) + B_4\sin(\lambda y).\end{aligned} \tag{193}$$

*Підстановка виразів (193) в (187) не дає нових дійсних розв'язків.*

*Вироджені випадки. У випадках $\varphi''_{xx} \equiv 0$ і $\psi''_{yy} \equiv 0$ рівняння (188) обертається в тотожність відповідно для будь-якої функції $\psi = \psi(y)$ і будь-якої функції $\varphi = \varphi(x)$. Ці випадки треба розглядати окремо. Наприклад, при $\varphi''_{xx} = 0$ маємо $\varphi = Ax + B$, де $A$, $B$ – будь-які. Підставивши цю функцію в (187), приходимо до рівняння $-A\psi'''_{yyy} = \nu\psi''''_{yyyy}$. Його загальний розв'язок описується формулою $\psi(y) = C_1\exp(-Ay/\nu) + C_2y^2 + C_3y + C_4$. У підсумку маємо ще один розв'язок рівняння (185) вигляду (186):*

$$w = C_1e^{-\lambda y} + C_2y^2 + C_3y + C_4 + \nu\lambda x \quad (A = \nu\lambda,\ B = 0),$$

*яке за допомогою групового аналізу було отримано В. В. Пухначовим [17].*

*У випадку $\psi''_{yy} \equiv 0$ отримуємо наступний розв'язок:*

$$w = C_1e^{\lambda x} + C_2x^2 + C_3x + C_4 + \nu\lambda y \quad (A = \nu\lambda,\ B = 0).$$

# 13 Лекція 13. Розв'язання функціонально-диференціальних рівнянь методом розщеплення

## 13.1 Попередні зауваження. Опис методу розщеплення

При зменшенні числа членів функціонально-диференціального рівняння

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \ldots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0, \tag{194}$$

$$\begin{aligned} \Phi_j(X) &\equiv \Phi_j\left(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_n, \varphi_n', \varphi_n''\right), \\ \Psi_j(Y) &\equiv \Psi_j\left(y, \psi_1, \psi_1', \psi_1'', \ldots, \psi_n, \psi_n', \psi_n''\right). \end{aligned} \tag{195}$$

за допомогою диференціювання виникають «зайві» сталі інтегрування, які треба прибирати на заключному етапі. Крім того, порядок отриманого рівняння може бути вище порядку вихідного. Щоб уникнути цих труднощів, розв'язки функціонально-диференціального рівняння зручно звести до послідовного розв'язування білінійного функціонального рівняння стандартного вигляду і розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь (тобто вихідна задача розщеплюється на дві простіші задачі). Нижче подано короткий опис основних етапів цього методу.

1°. На першому етапі розглянемо рівняння (194) як білінійне функціональне рівняння, залежне від двох змінних $X$ і $Y$, де $\Phi_n = \Phi_n(X)$ і $\Psi_n = \Psi_n(Y)$ – шукані величини ($n = 1, ..., k$). Можна довести (наприклад, шляхом диференціювання за схемою, описаною на попередній лекції, використовуючи індукцію), що білінійному функціональному рівнянню (194) можна задовольнити тільки у випадку, коли величини $\Phi_n = \Phi_n(X)$ ($n = 1, ..., k$) пов'язані лінійними залежностями. Враховуючи цю обставину, неважко показати, що білінійне функціональне рівняння (194) має $(k-1)$ різних розв'язків:

$$\begin{aligned} &\Phi_i(X) = C_{i,1}\Phi_{m+1}(X) + C_{i,2}\Phi_{m+2}(X) + \ldots + C_{i,k-m}\Phi_k(X), \\ &\Psi_{m+j}(Y) = -C_{1,j}\Psi_1(Y) - C_{2,j}\Psi_2(Y) - \ldots - C_{m,j}\Psi_m(Y), \\ &i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, k-m; \quad m = 1, \ldots, k-1; \end{aligned} \tag{196}$$

де $C_{i,j}$ – довільні сталі. Функції $\Phi_{m+1}(X)$, ..., $\Phi_k(X)$, $\Psi_1(Y)$, ..., $\Psi_m(Y)$, що фігурують в правих частинах рівностей (196), задаються довільним чином. Видно, що при фіксованому $m$ розв'язок (196) містить $m(k-m)$ довільних сталих.

2°. На другому етапі послідовно підставляємо функціонали $\Phi_i(X)$ і $\Psi_j(Y)$ з (195) в усі розв'язки (196). В результаті отримуємо системи звичайних диференціальних рівнянь[4] для визначення шуканих функцій $\varphi_p(x)$ і $\psi_q(y)$. Розв'язуючи ці системи, знаходимо розв'язки з узагальненим відокремленням змінних вигляду

$$w(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_n(x)\psi_n(y). \tag{197}$$

**Зауваження 23.** *Важливо підкреслити, що використовуване в методі розщеплення білінійне функціональне рівняння (194) при фіксованому $k$ є одним і тим же для різних класів вихідних нелінійних рівнянь математичної фізики.*

[4]Зазвичай ці системи є переозначені

**Зауваження 24.** *При фіксованому* $m$ *розв'язок (196) містить* $m(k-m)$ *довільних сталих* $C_{i,j}$. *При заданому* $k$ *найбільше число довільних сталих мають наступні розв'язки:*

| *Номер розв'язку* | *Число довільних сталих* | *Умови на* $k$ |
|---|---|---|
| $m = \frac{1}{2}k$ | $\frac{1}{4}k^2$ | $k$ *– парне число,* |
| $m = \frac{1}{2}(k \pm 1)$ | $\frac{1}{4}(k^2 - 1)$ | $k$ *– непарне число.* |

*Саме ці розв'язки білінійного функціонального рівняння найчастіше призводять до нетривіальних розв'язків з узагальненим відокремленням змінних в нелінійних рівняннях з частинними похідними.*

**Зауваження 25.** *Білінійне функціональне рівняння (194) і його розв'язок (196) відіграють важливу роль в методі функціонального відокремлення змінних, який буде розглянуто нами пізніше.*

Для наочності наведемо основні етапи побудови розв'язків з узагальненим відокремленням змінних методом розщеплення.

**Загальна схема побудови розв'язків з узагальненим відокремленням змінних методом розщеплення.**

1. Підставляємо у вихідне рівняння

$$F(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, \ldots) = 0$$

розв'язок з узагальненим відокремленням змінних вигляду (197)

$$w(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_n(x)\psi_n(y).$$

2. Приходимо до функціонально-диференціального рівняння (194)

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \ldots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0.$$

3. Використовуємо процедуру розщеплення і отримуємо: (i) функціональне рівняння та (ii) визначальну систему звичайних диференціальних рівнянь.

4. Розв'язуємо рівняння (i)

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \ldots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0.$$

5. Знайдені функції $\Phi_m$, $\Psi_m$ $(1 \leqslant m \leqslant k)$ підставляємо в систему (ii).

6. Розв'язуємо визначальну систему звичайних диференціальних рівнянь і знаходимо функції $\varphi_m(x)$, $\psi_m(y)$.

## 13.2 Розв'язання найпростіших функціональних рівнянь та їх застосування

Наведемо розв'язання кількох найпростіших функціональних рівнянь вигляду (194), які знадобляться далі для розв'язання конкретних нелінійних рівнянь з частинними похідними.

1°. Функціональне рівняння

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 = 0, \tag{198}$$

де всі $\Phi_i$ – функції одного і того ж аргументу, а всі $\Psi_i$ – функції іншого аргументу, має два розв'язки:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_3, \quad \Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2; \\ &\Psi_1 = A_1\Psi_3, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_3, \quad \Phi_3 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2, \end{aligned} \tag{199}$$

де $A_1$, $A_2$ – довільні сталі. Функції в правих частинах рівностей (199) вважаються довільними. У першому розв'язку зроблено перепозначення: $A_1 = C_{1,1}$, $A_2 = C_{2,1}$, а в другому розв'язку – перепозначення: $A_1 = -1/C_{1,2}$, $A_2 = C_{1,1}/C_{1,2}$ [порівняйте з розв'язками (196) при $k = 3$].

2°. Функціональне рівняння

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0, \tag{200}$$

де всі $\Phi_i$ – функції одного і того ж аргументу, а всі $\Psi_i$ – функції іншого аргументу, має два розв'язок:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3 + A_2\Phi_4, \qquad \Phi_2 = A_3\Phi_3 + A_4\Phi_4, \\ &\Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_3\Psi_2, \quad \Psi_4 = -A_2\Psi_1 - A_4\Psi_2, \end{aligned} \tag{201}$$

залежний від чотирьох довільних сталих $A_m$ [див. розв'язок (196) при $k = 4$, $m = 2$, $C_{1,1} = A_1$, $C_{1,2} = A_2$, $C_{2,1} = A_3$, $C_{2,2} = A_4$]. Функції в правих частинах рівностей (201) вважаються довільними.

Рівняння (200) має також два інших розв'язки, що залежать від трьох довільних сталих:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_4, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_4, \quad \Phi_3 = A_3\Phi_4, \quad \Psi_4 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2 - A_3\Psi_3; \\ &\Psi_1 = A_1\Psi_4, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_4, \quad \Psi_3 = A_3\Psi_4, \quad \Phi_4 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2 - A_3\Phi_3. \end{aligned} \tag{202}$$

У першому розв'язку зроблено перепозначення: $A_1 = C_{1,1}$, $A_2 = C_{2,1}$, $A_3 = C_{3,1}$, а в другому розв'язку – перепозначення: $A_1 = -1/C_{1,3}$, $A_2 = C_{1,1}/C_{1,3}$, $A_3 = C_{1,2}/C_{1,3}$.

3°. Розв'язки функціонального рівняння

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 + \Phi_5\Psi_5 = 0 \tag{203}$$

можна знайти за формулами (196) при $k = 5$. Покажемо простий спосіб отримання розв'язків, який зручно використовувати на практиці, виходячи безпосередньо з рівняння (203). Будемо вважати, що функціональні коефіцієнти $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ є лінійними комбінаціями коефіцієнтів $\Phi_4$ і $\Phi_5$:

$$\Phi_1 = A_1\Phi_4 + B_1\Phi_5, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_4 + B_2\Phi_5, \quad \Phi_3 = A_3\Phi_4 + B_3\Phi_5, \tag{204}$$

де $A_n$, $B_n$ – довільні сталі. Підставимо вирази (204) в (203) і зберемо члени, пропорційні $\Phi_4$ і $\Phi_5$:

$$(A_1\Psi_1 + A_2\Psi_2 + A_3\Psi_3 + \Psi_4)\Phi_4 + (B_1\Psi_1 + B_2\Psi_2 + B_3\Psi_3 + \Psi_5)\Phi_5 = 0.$$

Прирівнюючи вирази в дужках нулю, отримаємо

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2 - A_3\Psi_3, \\ \Psi_5 &= -B_1\Psi_1 - B_2\Psi_2 - B_3\Psi_3. \end{aligned} \tag{205}$$

Формули (204), (205) дають один з розв'язків рівняння (203). Аналогічним чином знаходяться і інші розв'язки.

# 14 Лекція 14. Метод Тітова-Галактіонова

## 14.1 Опис методу. Підпростори, інваріантні відносно нелінійного оператора

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F[w], \tag{206}$$

де $F[w]$ – нелінійний диференціальний оператор вигляду

$$F[w] \equiv F\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right). \tag{207}$$

**Означення 8.** *Скінченновимірний лінійний підпростір*

$$\mathcal{L}_k = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)\}, \tag{208}$$

*елементами якого є всеможливі лінійні комбінації лінійно-незалежних функцій $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_k(x)$, називається інваріантним відносно оператора $F$, якщо $F[\mathcal{L}_k] \subseteq \mathcal{L}_k$. Це означає, що існують функції $f_1$, ..., $f_k$, такі що*

$$F\left[\sum_{i=1}^{k} C_i \varphi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} f_i(C_1, \ldots, C_k)\varphi_i(x) \tag{209}$$

*для довільних сталих $C_1$, ..., $C_k$.*

Нехай лінійний підпростір (208) інваріантний відносно оператора $F$. Тоді рівняння (206) має розв'язок з узагальненим відокремленням змінних вигляду

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(t)\varphi_i(x), \tag{210}$$

де функції $\psi_1(t)$, ..., $\psi_k(t)$ описуються автономною системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\psi_i' = f_i(\psi_1, \ldots, \psi_k), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{211}$$

Тут штрих означає похідну по $t$.

Наступний приклад ілюструє описаний метод побудови розв'язків з узагальненим відокремленням змінних.

**Приклад 42.** *Розглянемо нелінійне параболічне рівняння*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + kw^2 + bw + c. \tag{212}$$

*Покажемо, що при $k > 0$ диференціальний оператор $F[w] = aw_{xx} + (w_x)^2 + kw^2 + bw + c$ (який визначає праву частину рівняння) має двовимірний інваріантний підпростір $\mathcal{L}_2 = \{1, \cos(x\sqrt{k})\}$. Дійсно, для довільних $C_1$ і $C_2$ справедлива рівність*

$$F[C_1 + C_2\cos(x\sqrt{k})] = k(C_1^2 + C_2^2) + bC_1 + c + C_2(2kC_1 - ak + b)\cos(x\sqrt{k}).$$

*Тому рівняння* (212) *допускає розв'язок з узагальненим відокремленням змінних вигляду*

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(x\sqrt{k}), \tag{213}$$

*де функції* $\psi_1(t)$ *і* $\psi_2(t)$ *описуються автономною системою звичайних диференціальних рівнянь*

$$\begin{aligned} \psi_1' &= k(\psi_1^2 + \psi_2^2) + b\psi_1 + c, \\ \psi_2' &= \psi_2(2k\psi_1 - ak + b). \end{aligned} \tag{214}$$

**Зауваження 26.** *При* $k > 0$ *диференціальний оператор* $F[w]$ *має тривимірний інваріантний підпростір* $\mathcal{L}_3 = \{1, \sin(x\sqrt{k}), \cos(x\sqrt{k})\}$.

**Зауваження 27.** *При* $k < 0$ *диференціальний оператор* $F[w]$ *має тривимірний інваріантний підпростір* $\mathcal{L}_3 = \{1, \mathrm{sh}(x\sqrt{k}), \mathrm{ch}(x\sqrt{k})\}$.

**Зауваження 28.** *Загальніше рівняння* (212), *де* $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ *– довільні функції і* $k = \mathrm{const} < 0$, *також має розв'язок з узагальненим відокремленням змінних вигляду* (213), *де функції* $\psi_1(t)$ *і* $\psi_2(t)$ *описуються автономною системою звичайних диференціальних рівнянь* (214).

## 14.2 Деякі узагальнення

Аналогічним чином розглядається загальніше рівняння вигляду

$$L_1[w] = L_2[U], \quad U = F[w], \tag{215}$$

де $L_1[w]$ та $L_2[U]$ – лінійні диференціальні оператори по змінній $t$ вигляду

$$L_1[w] \equiv \sum_{i=0}^{m_1} a_i(t)\frac{\partial^i w}{\partial t^i}, \quad L_2[U] \equiv \sum_{j=0}^{m_2} b_j(t)\frac{\partial^j U}{\partial t^j}, \tag{216}$$

а $F[w]$ – нелінійний диференціальний оператор по змінній $x$

$$F[w] \equiv F\left(t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right), \tag{217}$$

який може залежати параметричним чином від $t$.

Нехай лінійний підпростір (208) інваріантний відносно оператора $F$, тобто для довільних сталих $C_1$, ..., $C_k$ має місце рівність

$$F\left[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} f_i(t, C_1, \dots, C_k)\varphi_i(x). \tag{218}$$

Тоді рівняння (215) має розв'язок з узагальненим відокремленням змінних вигляду (210), де функції $\psi_1(t)$, ..., $\psi_k(t)$ описуються системою звичайних диференціальних рівнянь

$$L_1[\psi_i(t)] = L_2[f_i(t, \psi_1, \dots, \psi_k)], \quad i = 1, \dots, k. \tag{219}$$

**Приклад 43.** *Розглянемо рівняння*

$$a_2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{220}$$

*яке при* $a_2(t) = k_2$, $a_1(t) = k_1/t$ *використовується для опису трансзвукових газових потоків ($t$ відіграє роль просторової змінної).*

*Рівняння (220) є окремим випадком рівняння (215), де* $L_1[w] = a_2(t)w_{tt} + a_1(t)w_t$, $L_2[U] = U$, $F[w] = w_x w_{xx}$. *Можна показати, що нелінійний диференціальний оператор* $F[w]$ *допускає тривимірний інваріантний підпростір* $\mathcal{L}_3 = \{1, x^{3/2}, x^3\}$. *Тому рівняння (220) має розв'язок з узагальненим відокремленням змінних вигляду*

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x^{3/2} + \psi_3(t)x^3,$$

*де функції* $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ *описуються системою звичайних диференціальних рівнянь*

$$\begin{aligned} a_2(t)\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' &= \frac{9}{8}\psi_2^2, \\ a_2(t)\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' &= \frac{45}{4}\psi_2\psi_3, \\ a_2(t)\psi_3'' + a_1(t)\psi_3' &= 18\psi_3^2. \end{aligned}$$

**Зауваження 29.** *Оператор* $F[w]$ *допускає також чотиривимірний інваріантний підпростір* $\mathcal{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$, *якому відповідав би розв'язок з узагальненим відокремленням змінних вигляду*

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2 + \psi_4(t)x^3.$$

*Див. також приклад 44 при* $a_0(t) = 0$, $k = 1$, $n = 2$.

**Приклад 44.** *Розглянемо загальніше рівняння $n$-го порядку*

$$a_2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial w}{\partial t} + a_0(t)w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k \frac{\partial^n w}{\partial x^n}. \tag{221}$$

*Нелінійний оператор* $F[w] = (w_x)^k w_x^{(n)}$ *допускає двовимірний інваріантний підпростір* $\mathcal{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$, *де функція* $\varphi(x)$ *описується звичайним диференціальним рівнянням* $(\varphi_x')^k \varphi_x^{(n)} = \varphi$. *Тому рівняння (221) має розв'язок з узагальненим відокремленням змінних вигляду*

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\varphi(x),$$

*де функції* $\psi_1(t)$ *і* $\psi_2(t)$ *описуються двома незалежними звичайними диференціальними рівняннями*

$$\begin{aligned} a_2(t)\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' + a_0(t)\psi_1 &= 0, \\ a_2(t)\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' + a_0(t)\psi_2 &= \psi_2^{k+1}. \end{aligned}$$

Багато інших прикладів подібного роду, а також деякі деталізації і узагальнення описуваного методу, можна знайти у цитованій нижче літературі. Основні труднощі, що виникають при використанні методу Тітова-Галактіонова для побудови точних розв'язків конкретних рівнянь, полягають у знаходженні лінійних підпросторів, інваріантних відносно заданого нелінійного оператора. Крім того, вихідне рівняння може відрізнятися від рівнянь розглянутого типу (не завжди можна виділити відповідний нелінійний оператор $F[w]$).

# 15 Лекція 15. Метод функціонального відокремлення змінних

## 15.1 Структура розв'язків з функціональним відокремленням змінних

Нелінійні рівняння, отримані заміною $w = F(z)$ з лінійних рівнянь математичної фізики з відокремлюваними змінними для функції $z = z(x, y)$, будуть мати точні розв'язки вигляду

$$w(x, y) = F(z), \quad z = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x)\psi_m(y). \tag{222}$$

Багато нелінійних рівнянь з частинними похідними, які не зводяться до лінійних, також мають точні розв'язки вигляду (222). Такі розв'язки будемо називати *розв'язками з функціональним відокремленням змінних.* У загальному випадку функції $\varphi_m(x)$, $\psi_m(y)$, $F(z)$ в (222) заздалегідь не відомі і підлягають визначенню.

*Основна ідея:* диференціально-функціональне рівняння, отримане в результаті підстановки виразу (222) в розглядуване рівняння з частинними похідними, треба привести до стандартного білінійного функціонального рівняння

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \ldots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0$$

або до диференціально-функціонального рівняння вигляду

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \ldots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0,$$

$$\Phi_j(X) \equiv \Phi_j\left(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_n, \varphi_n', \varphi_n''\right),$$
$$\Psi_j(Y) \equiv \Psi_j\left(y, \psi_1, \psi_1', \psi_1'', \ldots, \psi_n, \psi_n', \psi_n''\right).$$

.

**Зауваження 30.** *При функціональному відокремленні змінних пошук розв'язків найпростішого вигляду $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ і $w = F(\varphi(x)\psi(y))$ призводить до однакових результатів, оскільки справедливе представлення $F(\varphi(x)\psi(y)) = F_1(\varphi(x) + \psi(y))$, де $F_1(z) = F(\mathrm{e}^z)$, $\varphi_1(x) = \ln\varphi(x)$, $\psi_1(y) = \ln\psi(y)$.*

**Зауваження 31.** *При побудові розв'язків з функціональним відокремленням змінних вигляду $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ вважається, що $\varphi \neq \mathrm{const}$ і $\psi \neq \mathrm{const}$.*

**Зауваження 32.** *Функція $F(z)$ може описуватися як одним звичайним диференціальним рівнянням, так і переозначеною системою рівнянь (при аналізі треба враховувати обидві ці можливості).*

## 15.2 Розв'язки з функціональним відокремленням змінних спеціального вигляду

### 15.2.1 Розв'язки типу узагальненої біжучої хвилі. Приклади

Для спрощення аналізу деякі функції в (222) можна задавати апріорно, а інші визначати в процесі розв'язання. Такі розв'язки будемо називати *розв'язами з функціональним відокремленням змінних спеціального вигляду.*

Нижче вказано найпростіші розв'язки з функціональним відокремленням змінних спеціального вигляду ($x$ і $y$ можна поміняти місцями):

$$
\begin{array}{lll}
w = F(z), & z = \psi_1(y)x + \psi_2(y) & \text{(аргумент } z \text{ лінійний по } x\text{);} \\
w = F(z), & z = \psi_1(y)x^2 + \psi_2(y) & \text{(аргумент } z \text{ квадратичний по } x\text{);} \\
w = F(z), & z = \psi_1(y)\mathrm{e}^{\lambda x} + \psi_2(y) & \text{(аргумент } z \text{ містить експонентціальну функцію } x\text{).}
\end{array}
$$

Перший розв'язок будемо називати розв'язком типу узагальненої біжучої хвилі. В останній формулі замість $\mathrm{e}^{\lambda x}$ можуть стояти також функції $\mathrm{ch}(ax+b)$, $\mathrm{sh}(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, $\sin(ax+b)$.

Після підстановки будь-якого із зазначених виразів в розглядуване рівняння треба виключити $x$ за допомогою виразу для $z$. В результаті отримаємо функціонально-диференціальне рівняння з двома аргументами $y$ і $z$. Його розв'язок у низці випадків можна отримати за допомогою методів, описаних у лекціях 10-14.

Для наочності приведемо загальну схему побудови розв'язків типу узагальненої біжучої хвилі для еволюційних рівнянь.

1. У вихідне рівняння $w_t = H(t, w, w_x, w_x x, \ldots, w_x^{(n)})$ підставляємо розв'язок у вигляді узагальненої біжучої хвилі $w = F(z)$, де $z = \varphi(t)x + \psi(t)$.

2. Замінюємо $x$ на $(z - \psi)/\varphi$ і отримуємо функціонально-диференціальне рівняння з двома аргументами.

3. Використовуючи процедуру розщеплення, отримуємо: (i) функціональне рівняння та (ii) визначальну систему звичайних диференціальних рівнянь.

4. Розв'язуємо функціональне рівняння $\Phi_1(z)\Psi_1(t) + \ldots + \Phi_k(z)\Psi_k(t) = 0$.

5. Функції $\Phi_m$, $\Psi_m$ $(1 \leqslant m \leqslant k)$ підставляємо в систему (ii).

6. Розв'язуємо визначальну систему звичайних диференціальних рівнянь і знаходимо функції $\varphi$, $\psi$, $F$.

**Зауваження 33.** *Приведений вище алгоритм, може використовуватися також для побудови точних розв'язків загальнішого вигляду*[5] $w = \sigma(t)F(z) + \varphi_1(t)x + \psi_2(t)$, *де* $z = \varphi_1(t)x + \psi_2(t)$.

**Зауваження 34.** *Розв'язок з узагальненим відокремленням змінних (див. лекції 10-14) є розв'язком з функціональним відокремленням змінних частинного вигляду, що відповідає випадку* $F(z) = z$.

Розглянемо приклади нелінійних рівнянь, що допускають точні розв'язки з функціональним відокремленням змінних частинного вигляду, коли складний аргумент $z$ є лінійним або квадратичним по одній із незалежних змінних.

[5]Зазначений розв'язок містить в собі, як частинні випадки, всі найпоширеніші розв'язки: розв'язки типу біжучої хвилі, автомодельні розв'язки, узагальнені автомодельні розв'язки, розв'язки з адитивним і мультиплікативним відокремленням змінних (а також багато інваріантних розв'язків).

**Приклад 45.** *Розглянемо нестаціонарне рівняння теплопровідності з нелінійним джерелом*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mathcal{F}(w). \tag{223}$$

*Шукаємо точні розв'язки рівняння* (223) *з функціональним відокремленням змінних спеціального вигляду*

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t). \tag{224}$$

*Потрібно знайти функції* $w(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *і праву частину рівняння* $\mathcal{F}(w)$.

*Підставивши вираз* (224) *в* (223) *і поділивши на* $w'_z$, *маємо*

$$\varphi'_t x + \psi'_t = \varphi^2 \frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}. \tag{225}$$

*Виразимо в* (224) $x$ *через* $z$ *і підставимо його в* (223). *В результаті приходимо до функціонально-диференціального рівняння з двома змінними* $t$ *і* $z$:

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t - \frac{\varphi'_t}{\varphi} z + \varphi^2 \frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z} = 0,$$

*яке можна розглядати як функціональне рівняння (7) з лекції 13, а саме:*

$$\Phi_1(t)\Psi_1(z) + \Phi_2(t)\Psi_2(z) + \Phi_3(t)\Psi_3(z) + \Phi_4(t)\Psi_4(z) = 0,$$

*де*

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t, && \Phi_2 = -\frac{\varphi'_t}{\varphi}, && \Phi_3 = \varphi^2, && \Phi_4 = 1, \\ &\Psi_1 = 1, && \Psi_2 = z, && \Psi_3 = \frac{w''_{zz}}{w'_z}, && \Psi_4 = \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}. \end{aligned}$$

*Підставляючи ці вирази в формули (8) з лекції 13, отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь*

$$\begin{aligned} &-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t = A_1\varphi^2 + A_2, && -\frac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3\varphi^2 + A_4, \\ &\frac{w''_{zz}}{w'_z} = -A_1 - A_3 z, && \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z} = -A_2 - A_4 z, \end{aligned} \tag{226}$$

*де* $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ *– довільні сталі.*

Випадок 1. *При* $A_4 \neq 0$ *розв'язок системи* (226) *має вигляд*

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = \pm\left(C_1 \mathrm{e}^{2A_4 t} - \frac{A_3}{A_4}\right)^{-1/2}, \\ &\psi(t) = -\varphi(t)\left[A_1 \int \varphi(t)dt + A_2 \int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\right], \\ &w(z) = C_3 \int \exp\left(-\frac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\right) dz + C_4, \\ &\mathcal{F}(w) = -C_3\left(A_4 z + A_2\right) \exp\left(-\frac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\right), \end{aligned} \tag{227}$$

*де $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ – довільні сталі. Залежність $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w)$ задається двома останніми виразами в параметричному вигляді ($z$ відіграє роль параметра). При $A_3 \neq 0$ функцію джерела $\mathcal{F}(w)$ в* (227) *можна виразити через елементарні функції і функцію, обернену до інтеграла ймовірностей.*

*В частинному випадку $A_3 = C_4 = 0$, $A_1 = -1$, $C_3 = 1$ функцію джерела можна подати в явному вигляді:*

$$\mathcal{F}(w) = -w(A_4 \ln w + A_2). \tag{228}$$

*Розв'язки рівняння* (223) *в цьому випадку можна отримати також за допомогою групового аналізу [24].*

Випадок 2. *При $A_4 = 0$ розв'язки перших двох рівнянь* (226) *мають вигляд*

$$\varphi(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2A_3t + C_1}}, \quad \psi(t) = \frac{C_2}{\sqrt{2A_3t + C_1}} - \frac{A_1}{A_3} - \frac{A_2}{3A_3}(2A_3t + C_1),$$

*а розв'язки інших рівнянь описуються двома останніми формулами* (227) *при $A_4 = 0$.*

**Приклад 46.** *Розглянемо загальніше рівняння*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(t)\frac{\partial w}{\partial x} + c(t)\mathcal{F}(w),$$

*що містить довільні функції $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$.*

*Розв'язки шукаємо у вигляді* (224). *В цьому випадку в системі* (226) *зміняться тільки перші два рівняння, а функції $w(z)$ і $\mathcal{F}(w)$ будуть описуватися двома останніми формулами* (227).

### 15.2.2 Розв'язання шляхом зведення до рівнянь з квадратичною нелінійністю

У низці випадків пошук розв'язку у вигляді (222) вдається провести в два етапи. Спочатку шукається перетворення, що зводить вихідне рівняння до рівняння з квадратичною (іноді степеневою) нелінійністю. Потім розв'язок отриманого рівняння шукається методами, описаними в лекціях 11-14.

Рівняння з квадратичною нелінійністю іноді вдається отримати за допомогою підстановок вигляду $w = F(z)$. Найбільш поширені підстановки мають вигляд:

$$\begin{array}{ll} w = z^\lambda & \text{(для рівнянь зі степеневою нелінійністю),} \\ w = \lambda \ln z & \text{(для рівнянь з експоненціальною нелінійністю),} \\ w = \mathrm{e}^{\lambda z} & \text{(для рівнянь з логарифмічною нелінійністю),} \end{array}$$

де $\lambda$ – стала, що підлягає визначенню. Зазначений підхід еквівалентний апріорному завданню вигляду функції $F(z)$ у виразі (222).

**Приклад 47.** *Нелінійне рівняння теплопровідності з джерелом логарифмічного типу*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t) w \ln w$$

*заміною $w = \mathrm{e}^z$ зводиться до рівняння з квадратичною нелінійністю, яке допускає точний розв'язок з узагальненим відокремленням змінних вигляду*

$$z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \psi_3(t),$$

*де* $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$, *а функції* $\psi_k(t)$ *описуються відповідною системою звичайних диференціальних рівнянь.*

Багато нелінійних рівнянь різного типу, що зводяться за допомогою відповідних перетворень до рівнянь з квадратичною нелінійністю, описано в цитованій нижче літературі.

# Література


[1] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. – М.: Физматлит, 2003. – 416 с.

[2] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматлит, 1959. – 468 с.

[3] Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

[4] Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. – М.: Наука, 1966. – 260 с.

[5] Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Наука, 1970. – 400 с.

[6] Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

[7] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1989. – 472 с.

[8] Zauderer E. Partial Differential Equations of Applied Mathematics. – New York: John Wiley & Sons, 1998. – 910 p.

[9] Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. – Boston: Academic Press, 1998. – 801 p.

[10] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

[11] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

[12] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.

[13] Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – М.: Издательство «ИПМех РАН», 2020. – 384 с.

[14] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е, переработанное. – М.: Наука, 1978. – 736 с.

[15] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.

[16] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.

[17] Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье-Стокса в плоском случае. // Прикл. мех. и техн. физика. – 1960. – № 1. – С. 83-90.

[18] Титов С. С. Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики. // Аэродинамика. – Саратов: Саратовский ун-т. – 1988. – С. 104-110.

[19] Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1994. – Т. 34, № 3. – С. 374-383.

[20] Galaktionov V. A. Invariant subspace and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1995. – Vol. 125A, No 2. – P. 225-246.

[21] Galaktionov V. A., Posashkov S. A., Svirshchevskii S. R. On invariant sets and explicit solutions of nonlinear equations with quadratic nonlinearities. // Differential and Integral Equations. – 1995. – Vol. 8, No 8. – P. 1997-2024.

[22] Svirshchevskii S. R. Lie-B'acklund symmetries of linear ODEs and generalized separation of variables in nonlinear equations. // Phys. Lett. A. – 1995. – Vol. 199, No 5-6. – P. 344-348.

[23] Svirshchevskii S. R. Invariant linear subspaces and exact solutions of nonlinear evolutions equations. // Nonlinear Math. Phys. – 1996. – Vol. 3, No 1-2. – P. 164-169.

[24] Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1982. – Т. 22, №6. – С. 1393-1400.

[25] Галактионов В. А., Посашков С. А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1989. – Т. 29, № 4. – С. 497-506.

[26] Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1994. – Т. 34, № 3. – С. 374-383.

[27] Galaktionov V. A., Posashkov S. A., Svirshchevskii S. R. On invariant sets and explicit solutions of nonlinear equations with quadratic nonlinearities. // Differential and Integral Equations. – 1995. – Vol. 8, No 8. – P. 1997-2024.