КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ "ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА". Частина 2. Динаміка матеріальної точки

доц. Рейтій О.К.

01.10.2019 р.

1 Лекція 1(8). Основні закони і поняття динаміки точки. Дві основні задачі динаміки. Способи інтегрування найпростіших диференціальних рівнянь прямолінійного руху

1.1 Основні закони і поняття динаміки точки

1.1.1 Предмет і задачі динаміки

Два попередні розділи курсу механіки – статика і кінематика – по суті, мало пов'язані між собою. Кожному з них відповідає своє особливе коло понять, задач і методів їх розв'язання. У статиці розглядаються задачі про рівновагу, а також задачі про еквівалентні перетворення систем сил; при таких перетвореннях навіть не ставиться питання про те, який рух тіла викликають прикладені сили. У кінематиці вивчається рух «сам по собі», поза зв'язку з тими силами, під дією яких він відбувається.

Ізольований розгляд двох зазначених проблем викликається чисто методичними міркуваннями побудови курсу механіки і, строго кажучи, не випливає із суті задач механіки. Справа в тому, що між діючими силами і рухом існує глибокий внутрішній зв'язок, який відмічається вже в самому означенні поняття сили. Цей зв'язок береться до уваги в динаміці, предметом якої є вивчення руху з урахуванням діючих сил.

Серед практичних задач механіки лише невелике число допускає чисто статичне або чисто кінематичне дослідження: в більшості випадків необхідно повне, тобто динамічне вивчення тих чи інших механічних явищ. При цьому використовуються встановлені в статиці способи приведення сил, а також розроблені в кінематиці методи опису і вивчення руху; тому статику і кінематику можна розглядати як вступ до динаміки, хоча вони мають і самостійне значення.

1.1.2 Інерціальні системи відліку. Основне рівняння динаміки точки

В основі динаміки лежать закони, вперше в найбільш повному і закінченому вигляді сформульовані Ісааком Ньютоном в книзі «Математичні начала натуральної філософії» (1687 р.).

В якості першого закону Ньютон прийняв принцип (закон) інерції, відкритий Галілеєм, який можна сформулювати наступним чином: *ізольована матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху.*

Під *ізольованою матеріальною точкою* розуміється матеріальна точка, яка не взаємодіє з іншими тілами або коли сили, що діють на точку, взаємно компенсуються.

Найважливішою обставиною при вивченні руху тіл відносно одне одного є вибір системи відліку, що в свою чергу пов'язано з прийнятим уявленням про простір і час. Природно поставити питання: по відношенню до якої ж системи відліку справедливий принцип інерції?

Ньютон, формулюючи закони динаміки, ввів в розгляд модель простору і часу, яка передбачає наявність абсолютного нерухомого евклидового тривимірного простору і абсолютного часу, тобто часу, який однаково протікає для всіх спостерігачів, де б вони не знаходилися і який би не був їх рух.

Виходячи з цього уявлення про простір та час, Ньютон і припускав можливість існування абсолютної, нерухомої системи відліку (системи координат), не пов'язаної з матеріальними тілами; для такої системи відліку він і вважав справедливим принцип інерції.

Подальший розвиток уявлень про простір призвів до повного заперечення поняття абсолютного простору. Тому поняття «спокій», «стала швидкість» тощо позбавлені об'єктивного сенсу: користуючись цим терміном, необхідно вказати в якій системі відліку розглядається рух. Але рух, що відбувається зі сталою швидкістю в одній системі відліку, може виявитися прискореним в іншій системі відліку; тому принцип інерції не володіє універсальністю, хоча, як показують спостереження, в деяких системах відліку принцип інерції виявляється справедливим.

Введемо означення: системи відліку, в яких справедливий принцип інерції, називаються *інерціальними системами відліку* (інерціальними системами координат). Підкреслимо, що про інерціальність або неінерціальність тієї чи іншої системи відліку можна судити тільки на основі досліду. Зокрема, встановлено, що геліоцентрична система координат (тобто система координат з початком в центрі Сонця і осями, направленими на «нерухомі» зірки) дуже близька до інерціальної системи.

Легко бачити, що система відліку A_1, яка рухається відносно системи відліку A_0 поступально і початок якої має сталу за модулем і напрямком швидкість, також є інерціальною. Це випливає з того, що прискорення точки в системі A_1 не відрізняється від прискорення точки в системі A_0. У цьому твердженні полягає *принцип відносності Галілея.*

Навпаки, в системах відліку, що рухаються відносно інерціальної системи відліку не поступально або не рівномірно, принцип інерції не має місця; такі системи називаються *неінерціальними.* Якщо рух деякої системи відліку відбувається з відносно малими прискореннями відносно інерціальної системи відліку, то при розв'язанні практичних задач іноді можна знехтувати малою неінерціальністю (наприклад, неінерціальністю геоцентричної системи, пов'язаної з Землею); при цьому наближено приймають, що принцип інерції виконується і в такій системі відліку.

Розвиток фізики призвів до кінця XIX і початку XX століття до необхідності створення інших моделей простору і часу. Так, наприклад, в спеціальній теорії відносності, в якій розглядаються тільки інерціальні системи відліку, моделлю простору і часу є чотиривимірний простір-час, тобто простір і час вже не вважаються незалежними один від одного.

Ще складніша модель простору і часу використовується в загальній теорії відносності (теорії тяжіння), в якій розглядаються неінерційні системи відліку. Ця модель вже передбачає залежність простору і часу від взаємодіючих мас і полів.

Висновки як спеціальної, так і загальної теорії відносності при швидкостях тіл, значно менших швидкості світла, збігаються з висновками класичної механіки, а це значить, що класична механіка (механіка Ньютона) є граничним випадком механіки, заснованої на принципах теорії відносності.

Слід відмітити, що всі закони Ньютона справедливі тільки в інерціальних системах відліку. Однак, звідси зовсім не випливає, що в динаміці вивчаються рухи, що відбуваються тільки в інерціальних системах. Пізніше ми будемо розглядати рух в неінерціальних системах, проте таких, рух яких відносно інерціальної системи задано (відносний рух); на мові кінематики задання зведеться до вираження відносних прискорень через абсолютні прискорення.

Із закону інерції випливає, що спонтанна зміна руху матеріальної точки неможлива. Рух точки може змінитися лише внаслідок її взаємодії з іншими тілами, причому мірою цієї взаємодії, як вже відмічалося, є сила. Зв'язок між зміною руху і силою дає наступний закон, який називається *основний закон динаміки* (*другий закон Ньютона*) і має фундаментальне значення для всієї динаміки: *в інерціальних системах відліку похідна кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку::*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{F}, \tag{1}$$

де $\vec{L} = m\vec{v}$ – кількість руху матеріальної точки, m – маса матеріальної точки, $\vec{v}$ – її швидкість, $\vec{F}$ – сила, що діє на точку.

Якщо вважати масу точки сталою, можна подати рівняння (1) у вигляді *основного рівняння динаміки точки*

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{або} \quad m\vec{w} = \vec{F}, \tag{2}$$

де $\vec{w}$ – прискорення точки. Звідси друге формулювання: *сила, що діє на матеріальну точку, надає їй прискорення, яке в інерціальній системі відліку пропорційне величині сили і має напрямок сили.*

Відмітимо, що *рівність дії і протидії двох матеріальних точок* (третій закон Ньютона), про який вже говорилося на початку курсу, є загальним законом механіки.

Наведемо ще одне фундаментальне положення механіки - закон незалежності дії сил (або принцип суперпозиції): *якщо на матеріальну точку діє кілька сил, то прискорення точки є сумою прискорень, які мала б точка під дією кожної з цих сил окремо*. Це означає, що при дії на матеріальну точку маси m сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, кожна з яких надає точці відповідно прискорення $\vec{w}_1 = \vec{F}_1/m$, $\vec{w}_2 = \vec{F}_2/m$, ..., $\vec{w}_n = \vec{F}_n/m$, прискорення матеріальної точки буде

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \ldots + \vec{w}_n = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n}{m} = \frac{\vec{F}}{m},$$

де $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$ – рівнодійна всіх сил, прикладених до точки.

Ще один важливий закон, який сформулював Ньютон у своєму знаменитому трактаті «Математичні начала натуральної філософії», це закон всесвітнього тяжіння: *два тіла притягуються із силою, що прямо пропорційна добутку їх мас і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:*

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

де $G \approx 6,67\dot{1}0^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравітаційна стала, $m_{1,2}$ – маси тіл, r – відстань між тілами.

1.2 Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Положення матеріальної точки M в інерціальній системі відліку будемо визначати її радіусом-вектором $\vec{r}$. Сила $\vec{F}$, що діє на точку, може залежати від положення точки, тобто від радіуса-вектора $\vec{r}$ (наприклад, сила тяжіння), швидкості $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ точки (наприклад, сила опору) і часу t. Отже, в загальному випадку $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t)$ і основне рівняння динаміки точки (2) можна записати в такій формі:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right), \tag{3}$$

Цю рівність, що виражає собою фізичний закон, який встановлює зв'язок між масою точки, її прискоренням і діючою на точку силою, можна розглядати одночасно як диференціальне рівняння, в якому радіус-вектор $\vec{r}$ є функцією, а час t – аргументом. Це рівняння називається *диференціальним рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі.*

Диференціальне рівняння у векторній формі, як зазвичай, еквівалентно трьом скалярним рівнянням. Залежно від вибору осей координат, на які проектується основне рівняння динаміки (2), можна отримати різні форми скалярних диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

Так, наприклад, якщо спроектувати обидві частини рівняння (2) на нерухомі осі декартових координат, то матимемо

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \tag{4}$$

де $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ – проекції прискорення точки на координатні осі, F_x, F_y, F_z – проекції сили, прикладеної до точки, на ті ж осі.

Якщо користуватися описом руху в натуральній формі, то потрібно спроектувати основне рівняння динаміки (2) на осі натурального тригранника; в результаті отримаємо співвідношення

$$mw_\tau = F_\tau(t, \sigma, \dot{\sigma}), \quad mw_n = F_n(t, \sigma, \dot{\sigma}), \quad 0 = F_b, \tag{5}$$

де F_τ, F_n і F_b – проекції сили на дотичну, головну нормаль і бінормаль. Згадуючи відомі з кінематики вирази для проекцій прискорення w_τ, w_n і w_b на ті ж напрямки, отримаємо

$$m\frac{d^2\sigma}{dt^2} = F_\tau(t, \sigma, \dot{\sigma}), \quad \frac{m}{\rho}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = F_n(t, \sigma, \dot{\sigma}), \quad 0 = F_b, \tag{6}$$

де ρ – радіус кривизни в даній точці траєкторії. З останнього рівняння випливає, що сила $\vec{F}$, під дією якої рухається матеріальна точка, лежить у стичній до траєкторії точки площині.

У випадку плоского руху точки, розглядуваного в полярних координатах r, φ, маємо

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(t, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}), \quad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = F_\varphi(t, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}),$$

де F_r і F_φ – проекції сили на напрямок радіуса-вектора й перпендикулярний до нього трансверсальний напрямок (у бік збільшення полярного кута φ).

Ми обмежилися найбільш уживаними випадками; аналогічно можна одержати диференціальні рівняння руху матеріальної точки в інших системах криволінійних координат (циліндричній, сферичній тощо).

1.3 Основні задачі динаміки точки

При дослідженні руху матеріальної точки зустрічаються дві основні задачі динаміки (пряма і обернена).

Перша (пряма) основна задача динаміки: *визначити рівнодійну $\vec{F}$ сил, що діють на матеріальну точку, якщо задано її масу і кінематичні рівняння руху.*

Ця задача розв'язується наступним чином.

1. Якщо рух матеріальної точки масою m задано координатним способом

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

то, двічі диференціюючи ці співвідношення за часом і підставляючи їх в рівності (4), визначимо проекції сили

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Отже, модуль рівнодійної сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Напрям сили визначається напрямними косинусами

$$\cos\left(\vec{F}, Ox\right) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\left(\vec{F}, Oy\right) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\left(\vec{F}, Oz\right) = \frac{F_z}{F}.$$

2. Якщо рух матеріальної точки масою m задано в натуральній формі, то за рівняннями (6) знайдемо проекції рівнодійної сил, що діють на матеріальну точку, на натуральні осі. Модуль сили і напрям визначимо за формулами

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{w_\tau}{w_n},$$

де α – кут між силою $\vec{F}$ і нормальною складовою сили $\vec{F}_n$.

Друга (обернена) основна задача динаміки: *визначити кінематичні рівняння руху вільної матеріальної точки, якщо задано її масу m, прикладену до неї силу і початкові умови руху.* Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. Знайдемо проекції сили на осі координат, тобто F_x, F_y, F_z, потім зінтегруємо систему диференціальних рівнянь (4). Розв'язком цієї системи будуть три функції:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \tag{7}$$

Щоб розв'язати конкретну динамічну задачу, потрібно задати початкові умови руху матеріальної точки для визначення сталих інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. Під початковими умовами слід розуміти значення координат точки і проекції її швидкості в початковий момент часу $t = t_0$, тобто

$$\begin{aligned} x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Аналогічно початкові умови руху точки можна задати у векторній $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$ і в натуральній $\sigma(t_0) = \sigma_0$, $\dot{\sigma}(t_0) = \dot{\sigma}_0$ формах. Диференціюючи (7) за часом, знайдемо ще три співвідношення

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \end{aligned} \tag{9}$$

що мають сталі інтегрування. Якщо в (7) і в (9) підставити початкові умови руху точки (8), то одержимо систему шести алгебраїчних рівнянь з шістьма невідомими сталими інтегрування, розв'язуючи яку, знайдемо

$$C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \quad i = \overline{1, 6}. \tag{10}$$

Нарешті, підставивши знайдені значення сталих інтегрування у співвідношення (7), одержимо закон руху точки

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{11}$$

Розглядаючи рух у натуральній формі для розв'язання оберненої задачі динаміки застосовують рівняння (6). Початковими умовами в цьому випадку є значення дугової координати при $t = t_0$ $\sigma(t_0) = \sigma_0$ і початкової швидкості $\dot{\sigma}(t_0) = \dot{\sigma}_0$.

Загальний розв'язок першого з рівнянь (6) має вигляд $\sigma = \sigma(t, C_1, C_2)$. На основі початкових умов руху знаходимо сталі інтегрування $C_i = C_i(t_0, \sigma_0, \dot{\sigma}_0)$, $i = 1, 2$.

Обчислену таким чином дугову координату $\sigma = \sigma(t)$ підставимо в друге рівняння (6)) і одержимо значення радіуса кривизни ρ траєкторії рухомої точки.

1.4 Способи інтегрування найпростіших диференціальних рівнянь прямолінійного руху

Нижче розглядаються деякі задачі про прямолінійний рух матеріальної точки, причому у всіх випадках координатну вісь x ми будемо суміщати з прямою, вздовж якої відбувається рух. У таких завданнях вектор діючої на точку сили повністю визначається його єдиною проекцією F_x.

Розглянемо кілька випадків прямолінійного руху матеріальної точки, в яких можна заздалегідь вказати методи інтегрування диференціальних рівнянь руху, кожен з випадків відноситься до певного характеру діючої сили.

1. Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, яка залежить тільки від часу. Диференціальне рівняння руху в цьому випадку має вигляд

$$m\ddot{x} = F_x(t), \tag{12}$$

звідки

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m}F_x(t).$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\int F_x(t)dt + C_1,$$

де під $\int F_x(t)dt$ розуміється первісна функція. Інтегруючи далі, будемо мати

$$x = \frac{1}{m}\int\left[\int F_x(t)dt\right]dt + C_1t + C_2.$$

2. Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, яка залежить тільки від положення точки. В цьому випадку диференціальне рівняння руху буде

$$m\ddot{x} = F_x(x). \tag{13}$$

Вводячи $v_x = \dot{x}$, отримаємо

$$\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{dv_x}{dx}$$

і, отже, диференціальне рівняння набуде вигляду

$$v_x dv_x = \frac{1}{m}F_x(x)dx.$$

Після інтегрування знайдемо

$$v_x^2 = \frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1,$$

звідки

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1}$$

або, переходячи до проекції швидкості,

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1} \quad\Longrightarrow\quad dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1}}.$$

Інтегруючи це рівняння, матимемо

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1}} + C_2 = \Phi(x, C_1, C_2).$$

Якщо вдається розв'язати це рівняння відносно x, то знайдемо залежність x від часу і сталих інтегрування:

$$x = x(t, C_1, C_2). \tag{14}$$

Таким чином, задача розв'язується за допомогою двох квадратур.

3. Прямолінійний рух точки під дією сили, залежної тільки від швидкості точки. Тут існує 2 способи інтегрування диференціального рівняння руху.

1 спосіб. Диференціальне рівняння руху

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}) \tag{15}$$

за допомогою заміни $v_x = \dot{x}$ перетворюється до вигляду

$$m\frac{dv_x}{F_x(v_x)} = dt.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$t = m\int \frac{dv_x}{F_x(v_x)} + C_1 = \Phi(v_x, C_1).$$

Якщо вдається розв'язати це рівняння відносно v_x, то знайдемо залежність v_x від часу і сталої інтегрування:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f(t, C_1),$$

звідки

$$x = \int f(t, C_1)dt + C_2.$$

2 спосіб. Ввівши перетворення

$$\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{dv_x}{dx}$$

перепишемо диференціальне рівняння (15) у вигляді

$$m\frac{v_x dv_x}{F_x(v_x)} = dx,$$

звідки

$$x = m\int \frac{v_x dv_x}{F_x(v_x)} + C_1'.$$

Якщо вдається розв'язати це рівняння відносно v_x, то знайдемо залежність v_x від координати x і сталої інтегрування:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \varphi(x, C_1')$$

і після інтегрування матимемо

$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x, C_1')} + C_2'.$$

Якщо вдається розв'язати це рівняння відносно x, то знайдемо залежність x від часу t і сталих інтегрування:

$$x = x(t, C_1', C_2').$$

2 Лекція 2(9). Коливальний рух матеріальної точки

Серед різноманітних сил, які можуть діяти на матеріальну точку, особливе місце займають *відновлювальні сили*, тобто *сили, які намагаються повернути точку в положення рівноваги.* Такі сили залежать від відхилення точки від положення рівноваги і напрямлені до нього.

Як ми побачимо нижче, відновлювальні сили часто надають руху матеріальної точки коливальний характер.

Однак, крім відновлювальних сил одночасно діють, як правило, залежні від швидкості руху *сили опору* $R_x(\dot{x})$ (наприклад, сила тертя ковзання чи кочення, опір повітря, рідини тощо), а також *збурювальні сили* $Q_x(t)$, які залежать від часу.

Даний розділ присвячено вивченню всіх варіантів поєднання вказаних типів сил у випадку прямолінійного руху матеріальної точки. Хоча ця задача представляє інтерес і сама по собі, але ще більш важливо, що її розв'язок можна майже без змін використовувати для багатьох випадків коливань (коливання вантажу на пружині, малі коливання математичного і фізичного маятника, електромагнітні коливання тощо).

Річ у тім, що різні за своїм фізичним змістом коливальні явища описуються однаковими диференціальними рівняннями, тому висновки, отримані при вивченні коливального руху в якійсь одній області, можуть бути використані і в інших областях.

Найбільш простими для вивчення є ті випадки коливальних рухів, коли відновлювальна сила пропорційна відхиленню точки від положення рівноваги, а сила опору пропорційна швидкості точки. Відповідно проекції відновлювальної сили і сили опору на вісь x мають вигляд

$$F_x = -cx, \quad R_x = -b\dot{x}. \tag{16}$$

В цих випадках диференціальні рівняння руху лінійні; відповідно такі коливання також називаються *лінійними*.

В залежності від того, яка комбінація сил $F_x(x)$, $R_x(\dot{x})$ і $Q_x(t)$ діє на матеріальну точку, коливальний рух набуває тих чи інших типових особливостей.

Можливі і більш складні випадки, коли сила, що діє на точку, залежить одночасно від координати x і часу t та не може бути зображена у вигляді суми $F_x(x)$ і $Q_x(t)$, а також коли сила залежить від координати x і швидкості $\dot{x}$, причому силу не можна подати як суму $F_x(x)$ і $R_x(\dot{x})$. Ці випадки тут не розглядаються.

2.1 Вільні коливання

Нехай на матеріальну точку діє тільки відновлювальна сила, модуль якої пропорційний відхиленню від положення рівноваги:

$$F_x = -cx, \tag{17}$$

де c – коефіцієнт пропорційності, а диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Поклавши $c/m = \omega^2$, отримаємо

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{18}$$

Таким чином, рух матеріальної точки під дією відновлювальної сили описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння цього диференціального рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Оскільки його корені – чисто уявні числа: $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega$, то загальним розв'язком диференціального рівняння (18) буде

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{19}$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Для зручності аналізу цього рівняння введемо нові сталі інтегрування a і ε, поклавши

$$C_1 = a \sin \varepsilon, \qquad C_2 = a \cos \varepsilon. \tag{20}$$

Тоді сталі a і ε визначаються через C_1 і C_2 за допомогою формул

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = C_1/C_2,$$

а розв'язок має вигляд

$$x = a \cos \varepsilon \sin \omega t + a \sin \varepsilon \cos \omega t$$

або

$$x = a \sin(\omega t + \varepsilon). \tag{21}$$

Сталі a і ε (або C_1 і C_2) визначаються заданими початковими умовами – початковим положенням і початковою швидкістю рухомої точки.

Таким чином, під дією відновлювальної сили матеріальна точка здійснює рух за синусоїдальним законом, тобто гармонічний коливальний рух. Такі коливання називаються *вільними коливаннями.*

З рівняння (21) видно, що найбільше відхилення матеріальної точки від положення рівноваги (*амплітуда коливань*) дорівнює a.

Аргумент $(\omega t + \varepsilon)$ називається *фазою коливань*, а величина ε – *початковою фазою.*

Величина ω називається *коловою (кутовою) частотою* коливань і визначає число коливань, які здійснює точка за 2π секунд. Надалі величину ω для спрощення будемо називати просто *частотою.* Частота коливань ω не залежить від початкових умов і визначається тільки параметрами системи (величинами c і m). За цією ознакою частоту вільних коливань називають також *власною частотою.*

Для визначення амплітуди й початкової фази коливань скористаємося *початковими умовами*, які повинні бути задані (у протилежному випадку коливальний процес не повністю визначений). Нехай у початковий момент $t = 0$ відомі початкове положення матеріальної точки $x = x_0$ і початкова швидкість $\dot{x} = \dot{x}_0$. Тоді, підставивши в рівняння руху (21) і у вираз для швидкості

$$\dot{x} = a\omega \cos(\omega t + \varepsilon) \tag{22}$$

$t = 0$, $x = x_0$ і $\dot{x} = \dot{x}_0$, одержимо для визначення a і ε два рівняння:

$$x_0 = a \sin \varepsilon, \quad \dot{x}_0 = a\omega \cos \varepsilon.$$

Звідси знаходимо[1]

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0},$$

і закон руху точки визначається наступним рівнянням:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \sin\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\omega x_0}{\dot{x}_0}\right). \tag{23}$$

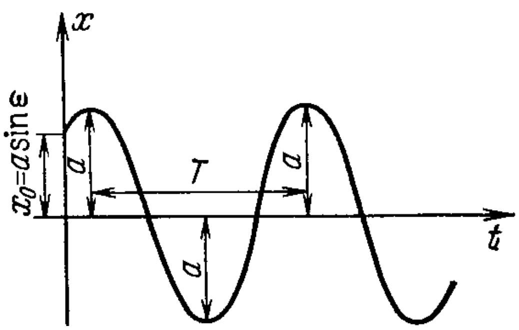

Рис. 1

Графік вільних коливань матеріальної точки для випадку $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 > 0$ зображено на рис. 1; тут вказано початкове відхилення x_0, амплітуда коливань a, а також проміжок часу T протягом якого відбувається одне повне коливання. Цей найменший проміжок часу, після закінчення якого рух точки повністю повторюється, називається *періодом коливань*. Залежність між періодом коливань і частотою визначається з умови періодичності руху

$$\omega(t + T) + \varepsilon = \omega t + \varepsilon + 2\pi,$$

звідки $T = 2\pi/\omega$, або

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{24}$$

Таким чином, період коливань, так само як і частота, не залежить від початкових умов. Ця властивість коливань називається *ізохронністю*. Як видно з (24), період і частота коливань визначаються величиною маси m матеріальної точки і коефіцієнтом пропорційності c, причому зі збільшенням маси й зменшенням коефіцієнта c період коливань збільшується.

2.2 Рух точки під дією в'язкого опору

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки під дією лінійної відновлювальної сили і лінійної сили опору. Виберемо за початок координат положення рівноваги точки. Проекція відновлювальної сили $\vec{F}$ на вісь x дорівнює $-cx$. Оскільки сила опору $\vec{R}$ завжди напрямлена у бік, протилежний напрямку швидкості точки, то проекція сили опору на вісь x дорівнює $-b\dot{x}$, де b – коефіцієнт пропорційності, що характеризує опір середовища.

Отже, диференціальне рівняння руху точки запишеться наступним чином:

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x}. \tag{25}$$

Увівши позначення $c/m = \omega^2$, $b/m = 2h$, одержимо

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{26}$$

[1] Якщо $x_0 > 0$, то при $\dot{x}_0 > 0$ $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \pi/2$, а при $\dot{x}_0 < 0$ $\pi/2 \leqslant \varepsilon \leqslant \pi$. Якщо $x_0 < 0$, то при $\dot{x}_0 > 0$ $3\pi/2 \leqslant \varepsilon \leqslant 2\pi$, а при $\dot{x}_0 < 0$ $\pi \leqslant \varepsilon \leqslant 3\pi/2$.

Це – лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0$, і його корені рівні

$$\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega^2}.$$

Характер руху точки істотно залежить від співвідношення величин h і ω. Розглянемо різні випадки.

2.2.1 Випадок малого опору ($h < \omega$)

Корені характеристичного рівняння будуть комплексно спряжені

$$\lambda_1 = -h + i\sqrt{\omega^2 - h^2}, \quad \lambda_2 = -h - i\sqrt{\omega^2 - h^2}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (26) має вигляд

$$x(t) = \mathrm{e}^{-ht} \left(C_1 \cos \omega^* t + C_2 \sin \omega^* t \right), \tag{27}$$

де $\omega^* = \sqrt{\omega^2 - h^2}$, C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Для більшої наочності введемо нові сталі A і ε за допомогою формул (20). Тоді одержимо

$$x(t) = a\mathrm{e}^{-ht} \sin(\omega^* t + \varepsilon). \tag{28}$$

Із цього рівняння видно, що $x \to 0$ при $t \to \infty$ (тому що $\mathrm{e}^{-ht} \to 0$), тобто рух є *згасаючим.* Цей згасаючий рух носить коливальний характер, тому що, наближаючись (при $t \to \infty$) до стану рівноваги, система буде проходити через цей стан нескінченне число раз у моменти часу, рівні

$$t_n = \frac{\pi n - \varepsilon}{\omega^*},$$

де $n = 1, 2, 3, ...$ (рис. 2).

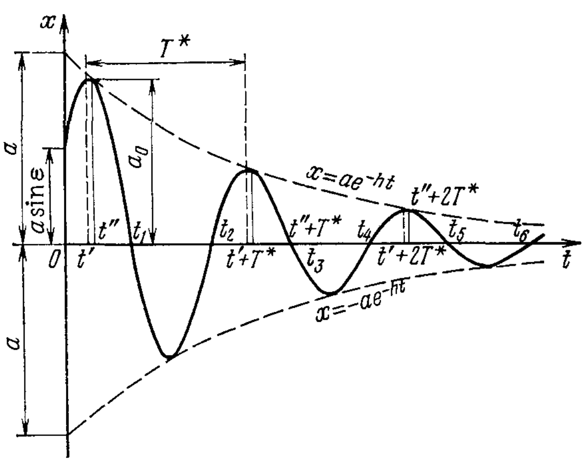

Рис. 2

Рух, описуваний формулою (28), не є періодичним, тому що із часом послідовні максимальні відхилення точки від положення рівноваги зменшуються. Однак, проміжок часу між двома будь-якими наступними відхиленнями (наприклад, у бік додатного напрямку осі x) є сталою величиною, рівною

$$T^* = 2\pi/\omega^* = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - h^2}. \tag{29}$$

Цю величину умовно називають *періодом згасаючих коливань.*

Розглянемо докладніше графік руху (див. рис. 2). На цьому рисунку криві $x = a\mathrm{e}^{-ht}$ і $x = -a\mathrm{e}^{-ht}$ є межами області, усередині якої розташовується графік руху.

Обчислимо моменти часу, що відповідають максимальним відхиленням точки від положення рівноваги. Із цією метою знайдемо швидкість точки

$$\dot{x}(t) = -ha\mathrm{e}^{-ht} \sin(\omega^* t + \varepsilon) + a\omega^* \mathrm{e}^{-ht} \cos(\omega^* t + \varepsilon) \tag{30}$$

і прирівняємо її до нуля. Матимемо

$$\operatorname{tg}(\omega^* t + \varepsilon) = \omega^*/h.$$

Звідси випливає, що якщо t' (найменший корінь отриманого рівняння) відповідає першому максимальному відхиленню в додатному напрямку осі x, то наступні максимальні відхилення в додатному напрямку осі x будуть досягатися в моменти часу $t'_n = t' + (n-1)T^*$, де $n = 1, 2, ...$.

Із формули (29) видно, що при в'язкому терті період згасаючих коливань T^* більший за період незатухаючих коливань $T = 2\pi/\omega$. Максимальні відхилення a_0, a_1,..., a_n,..., що відповідають моментам часу t', $t' + T^*$, $t' + 2T^*$, ..., $t' + nT^*$, ..., рівні

$$a_0 = a\mathrm{e}^{-ht'} \sin(\omega^* t' + \varepsilon), \quad a_1 = a\mathrm{e}^{-h(t'+T^*)} \sin(\omega^* t' + \varepsilon), ...,$$
$$a_n = a\mathrm{e}^{-h(t'+nT^*)} \sin(\omega^* t' + \varepsilon), ...$$

і утворюють спадну геометричну прогресію. Її знаменник

$$\eta = \frac{a_m}{a_{m-1}} = \mathrm{e}^{-hT^*}$$

називається *декрементом коливань* (або *фактором згасань*), а модуль натурального логарифма величини η

$$\Lambda = hT^*$$

– *логарифмічним декрементом коливань*.

Відмітимо, що якщо $t = t''$ є додатним коренем рівняння $\sin(\omega^* t + \varepsilon) = 1$, то моменти часу, в які графік дотикається кривої $x = a\mathrm{e}^{-ht}$, будуть: t'', $t'' + T^*$, $t'' + 2T^*$, ...

Декремент коливань можна визначити як відношення відхилення при $t = t'' + nT^*$ до відхилення при $t = t'' + (n-1)T^*$.

Для визначення сталих інтегрування використаємо початкові умови: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$.

Підставляючи ці умови в рівняння (28) і (30), одержимо рівняння для визначення сталих a і ε:

$$x_0 = a \sin \varepsilon, \quad \dot{x}_0 = -ha \sin \varepsilon + a\omega^* \cos \varepsilon,$$

звідки

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + hx_0)^2}{\omega^{*2}}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\omega^* x_0}{\dot{x}_0 + hx_0}.$$

2.2.2 Граничний випадок ($h = \omega$)

Корені характеристичного рівняння в цьому випадку будуть дійсними й кратними: $\lambda_1 = \lambda_2 = -h$ і, отже, загальний розв'язок рівняння руху (26) має вигляд

$$x = \mathrm{e}^{-ht}(C_1 + C_2 t), \tag{31}$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування. Беручи до уваги, що $\dot{x} = -h\mathrm{e}^{-ht}(C_1 + C_2 t) + C_2 \mathrm{e}^{-ht}$, одержимо при початкових умовах $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ наступні рівняння для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2: $x_0 = C_1$, $\dot{x}_0 = -hC_1 + C_2$. Звідси $C_1 = x_0$, $C_2 = \dot{x}_0 + hx_0$.

Таким чином, для заданих початкових умов рівняння руху точки запишеться у вигляді

$$x = e^{-ht}[x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0)t]. \tag{32}$$

Із цієї залежності випливає, що в розглянутому випадку рух точки вже не носить коливальний характер, але залишається згасаючим рухом, тому що $x \to 0$ при $t \to \infty$.

Такий рух називається *аперіодичним* (див. рис. 3).

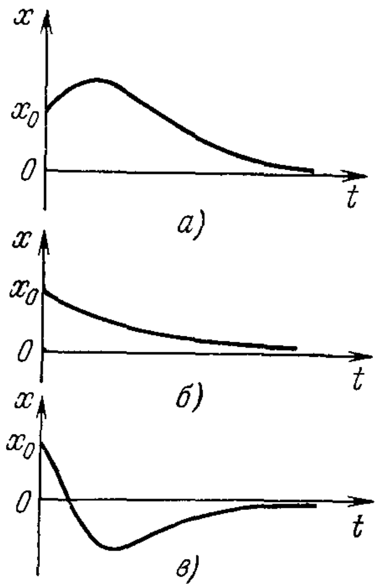

Рис. 3

2.2.3 Випадок великого опору ($h > \omega$)

У цьому випадку корені характеристичного рівняння

$$\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega^2}$$

є дійсними і від'ємними. Загальний розв'язок рівняння руху (26) має вигляд

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{33}$$

Оскільки $\dot{x} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}$, то при початкових умовах: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, при $t = 0$ рівняння для визначення сталих інтегрування будуть $x_0 = C_1 + C_2$, $\dot{x}_0 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$. Знайшовши звідси

$$C_1 = \frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

та підставивши ці C_1 і C_2 у вираз (33), одержимо

$$x = \frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}. \tag{34}$$

Це рівняння теж описує аперіодичний згасаючий рух ($x \to 0$ при $t \to \infty$, оскільки λ_1 і λ_2 від'ємні). Графіки такого руху будуть подібні до тих, що зображені на рис. 3.

2.3 Змушені коливання

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки під дією відновлювальної сили і зовнішньої збурювальної сили. Збурювальна сила може бути довільною функцією часу, однак ми обмежимося найпростішим, але вельми важливим з практичної точки зору випадком, коли сила змінюється за гармонічним законом. Нехай проекція збурювальної сили на вісь x дорівнює $Q_x(t) = H_0 \sin(pt + \delta)$, де H_0 – амплітуда і p – частота збурювальної сили, δ – початкова фаза. Тоді диференціальне рівняння руху матеріальної точки уздовж осі x має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx + H_0 \sin(pt + \delta),$$

або

$$\ddot{x} + \omega^2 x = H \sin(pt + \delta), \tag{35}$$

де

$$\omega^2 = c/m, \quad H = H_0/m.$$

Розв'язавши диференціальне рівняння (35), ми визначимо закон руху матеріальної точки. Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння (35) дорівнює сумі частинного розв'язку рівняння (35) і загального розв'язку однорідного рівняння

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Загальний розв'язок останнього рівняння ми вже знаємо:

$$x_{\text{з.о.}} = a \sin(\omega t + \varepsilon),$$

де a і ε – сталі інтегрування. Якщо $p \neq \omega$, то частинний розв'язок рівняння (35) будемо шукати у вигляді

$$x_{\text{ч.н.}} = A \sin(pt + \delta),$$

де A – невідома стала. Для її визначення підставимо вираз для $x_{\text{ч.н.}}$ в рівняння (35):

$$-Ap^2 \sin(pt + \delta) + A\omega^2 \sin(pt + \delta) = H \sin(pt + \delta).$$

Для тотожного виконання цієї рівності повинно бути, щоб

$$A = \frac{H}{\omega^2 - p^2}.$$

Частинний розв'язок має вигляд

$$x_{\text{ч.н.}} = \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \tag{36}$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (35) запишеться у формі

$$x = a \sin(\omega t + \varepsilon) + \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \tag{37}$$

Сталі a і ε залежать від початкових умов. Таким чином, шуканий рух матеріальної точки є сумою гармонічних коливань, що відбуваються із власною частотою ω, і гармонічних коливань, що відбуваються із частотою збурювальної сили p. Докладно вивчимо другий доданок в (37), що описує чисто змушені коливання й не залежить від початкових умов.

Амплітуда чисто змушених коливань дорівнює

$$A* = \frac{H}{|\omega^2 - p^2|}. \tag{38}$$

Перепишемо розв'язок (36), використовуючи формулу (38):

$$\begin{aligned} x_{\text{ч.н.}} &= A^* \sin(pt + \delta) & (p < \omega), \\ x_{\text{ч.н.}} &= -A^* \sin(pt + \delta) = A^* \sin(pt + \delta - \pi) & (p > \omega). \end{aligned}$$

З отриманих співвідношень випливає, що при $p < \omega$ фаза змушених коливань збігається з фазою збурювальної сили; при $p > \omega$ змушені коливання зсунуті по фазі від збурювальної сили на π.

Прослідкуємо залежність амплітуди змушених коливань від відношення частот p/ω. Для цього перетворимо вираз амплітуди змушених коливань

$$A^* = \frac{H}{|\omega^2 - p^2|} = \frac{H}{c\,|1 - p^2/\omega^2|} = \frac{x_{\text{ст}}}{|1 - p^2/\omega^2|},$$

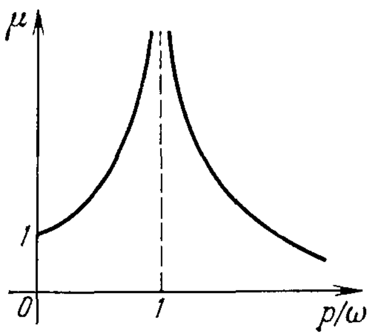

Рис. 4

де $x_{\text{ст}} = H/c$ – величина *статичного відхилення*[2] від положення рівноваги при дії сили, яка дорівнює максимальному значенню збурювальної сили. Позначимо

$$\mu = \frac{A^*}{x_{\text{ст}}} = \frac{1}{|1 - p^2/\omega^2|}.$$

Величина μ являє собою *коефіцієнт динамічності*, який показує в скільки разів амплітуда коливань переважає статичне відхилення. Із графіка (рис. 4) видно, що при $p/\omega \to 1$ коефіцієнт динамічності різко зростає.

Повернемося тепер до загального розв'язку (37). Записавши його у вигляді

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \delta), \tag{39}$$

визначимо сталі інтегрування, якщо $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$.

Підставивши початкові умови в рівняння (39) і у вираз для швидкості руху

$$\dot{x} = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t + \frac{pH}{\omega^2 - p^2} \cos(pt + \delta), \tag{40}$$

одержимо

$$C_1 = x_0 - \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin \delta, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} - \frac{p}{\omega} \frac{H}{\omega^2 - p^2} \cos \delta.$$

Підставляючи C_1 і C_2 у співвідношення (39), матимемо

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t - \frac{H}{\omega^2 - p^2} \left(\sin \delta \cos \omega t + \frac{p}{\omega} \cos \delta \sin \omega t \right) + \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \tag{41}$$

Такий запис розв'язку дозволяє встановити, що навіть при нульових початкових умовах ($x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$) точка буде здійснювати коливання, що відбуваються із власною частотою і визначаються членом $-H(\omega^2 - p^2)^{-1} [\sin \delta \cos \omega t + (p/\omega) \cos \delta \sin \omega t]$, причому амплітуда цих коливань не залежить від початкових умов.

При частоті p, близькій до власної частоти ω, завдяки додаванню двох коливань близької частоти, однакової амплітуди й протилежних за фазою, наступає своєрідне явище, яке називається *биттям.*

Нехай $p \approx \omega$, тоді вираз (41) при $x_0 = 0$ і $\dot{x}_0 = 0$ матиме вигляд (приблизно вважаємо, що $p/\omega = 1$, але $\omega^2 - p^2 \neq 0$)

$$x \approx \frac{H}{\omega^2 - p^2} \left[\sin(pt + \delta) - \sin(\omega t + \delta) \right]$$

або

$$x \approx \frac{2H}{\omega^2 - p^2} \sin \frac{p - \omega}{2} t \cos(pt + \delta).$$

Графік цього руху зображений на рис. 5.

[2] У випадку руху матеріальної точки під дією сили пружності цю величину ще називають *статичною деформацією.*

Показані тут биття являють собою коливання, що відбуваються із частотою p збурювальної сили, причому амплітуда цих коливань повільно змінюється також за періодичним законом.

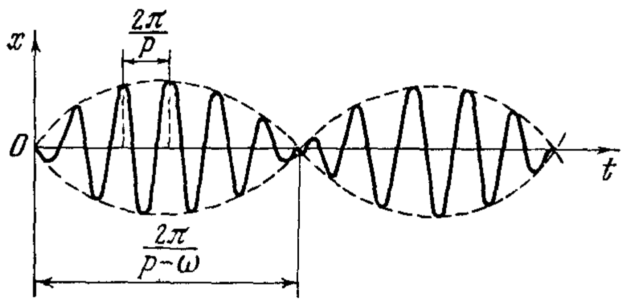

Рис. 5

Розглянемо тепер випадок, коли власна частота збігається із частотою збурювальної сили, тобто $p = \omega$. Частинний розв'язок рівняння (35) у цьому випадку потрібно шукати у вигляді

$$x_{\text{ч.н.}} = At\sin(pt+\gamma). \tag{42}$$

Підставивши вираз (42) у диференціальне рівняння (35), одержимо

$$2Ap\cos(pt+\gamma) = H\sin(pt+\delta).$$

Увівши позначення $\varphi = pt + \gamma$, перепишемо це співвідношення у вигляді

$$2Ap\cos\varphi = H\sin\varphi\cos(\delta-\gamma) + H\cos\varphi\sin(\delta-\gamma).$$

Цю рівність можна тотожно задовольнити, якщо взяти

$$H\cos(\delta-\gamma) = 0, \quad H\sin(\delta-\gamma) = 2Ap.$$

Звідси $A = H/(2p)$, $\gamma = \delta - \pi/2$ і, отже,

$$x_{\text{ч.н.}} = \frac{Ht}{2p}\sin\left(pt+\gamma-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{Ht}{2p}\cos\left(pt+\gamma\right).$$

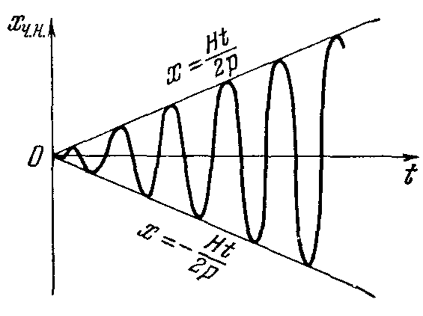

Рис. 6

Загальний розв'язок має вигляд

$$x = a\sin\left(\omega t+\varepsilon\right) - \frac{Ht}{2p}\cos\left(pt+\gamma\right).$$

При початкових умовах $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ маємо[3]

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{H}{2p^2}\left[\cos\delta\sin pt - pt\cos\left(pt+\delta\right)\right]. \tag{43}$$

На рис. 6 показано графік функції $x_{\text{ч.н.}}$. Як видно, при $p = \omega$ відбувається необмежене зростання амплітуди коливань, причому зростання амплітуди лінійне за часом. Це явище називається *резонансом.*

[3]Цей розв'язок можна отримати із (41), розкриваючи невизначеність, яка виникає при $p \to \omega$.

2.4 Змушені коливання при наявності в'язкого опору

Розглянемо рух матеріальної точки уздовж осі x під дією лінійної відновлювальної сили, в'язкої сили опору і збурювальної сили, проекція якої на вісь x дорівнює $H_0 \sin(pt + \delta)$.

Диференціальне рівняння руху має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x} + H_0 \sin(pt + \delta).$$

Поклавши $c/m = \omega^2$, $b/m = 2h$, $H_0/m = H$, одержимо

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = H \sin(pt + \delta). \tag{44}$$

Розв'язок диференціального рівняння (44) складається із двох розв'язків: загального розв'язку $x_{\text{з.о.}}$ відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку $x_{\text{ч.н.}}$ рівняння (44).

Як показано в підрозділі 2.2.1, при $h < \omega$ розв'язок загальний однорідного рівняння записується у вигляді

$$x_{\text{з.о.}} = \mathrm{e}^{-ht} \left(C_1 \cos \omega^* t + C_2 \sin \omega^* t \right),$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, а $\omega^* = \sqrt{\omega^2 - h^2}$. Частинний розв'язок рівняння (44) будемо шукати у вигляді

$$x_{\text{ч.н.}} = A \sin(pt + \gamma),$$

де A і γ – невизначені сталі величини. Таким чином, ми припускаємо, що частинний розв'язок описує коливання сталої амплітуди, що відбуваються із частотою збурювальної сили.

Знаходячи $\dot{x}_{\text{ч.н.}} = pA\cos(pt+\gamma)$ і $\ddot{x}_{\text{ч.н.}} = -p^2 A \sin(pt+\gamma)$ і підставляючи значення $x_{\text{ч.н.}}$, $\dot{x}_{\text{ч.н.}}$ і $\ddot{x}_{\text{ч.н.}}$ у рівняння (44), одержимо

$$-p^2 A \sin(pt + \gamma) + 2hpA \cos(pt + \gamma) + \omega^2 A \sin(pt + \gamma) = H \sin(pt + \delta).$$

Поклавши $pt + \gamma = \varphi$ і скориставшись співвідношенням

$$\sin(pt + \delta) = \sin(\varphi + \delta - \gamma) = \sin\varphi \cos(\delta - \gamma) + \cos\varphi \sin(\delta - \gamma),$$

для визначення A і γ матимемо наступні рівняння:

$$A(\omega^2 - p^2) = H \cos(\delta - \gamma), \quad 2phA = H \sin(\delta - \gamma),$$

звідки

$$A = \frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}}, \quad \mathrm{tg}(\delta - \gamma) = \frac{2hp}{\omega^2 - p^2}. \tag{45}$$

Підставивши знайдені значення A і γ у частинний розв'язок, одержимо

$$x_{\text{ч.н.}} = \frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}} \sin(pt + \delta + \gamma'),$$

де $\gamma' = \gamma - \delta$.

Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння (44) має наступний вигляд:

$$x = e^{-ht}\left(C_1\cos\omega^* t + C_2\sin\omega^* t\right) + \frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4h^2p^2}}\sin(pt+\delta+\gamma'). \tag{46}$$

Для визначення закону руху матеріальної точки потрібно знайти сталі C_1 і C_2. Користуючись початковими умовами: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$, одержимо значення сталих

$$C_1 = x_0 - A\sin(\delta+\gamma'), \quad C_2 = \frac{1}{\omega^*}\left[\dot{x}_0 + hx_0 - hA\sin(\delta+\gamma') - Ap\cos(\delta+\gamma')\right],$$

де A – *амплітуда змушених коливань*.

Підставивши значення C_1 і C_2 в рівняння (46), знайдемо закон руху матеріальної точки в розглядуваному випадку:

$$\begin{aligned} x = &\mathrm{e}^{-ht}\left[x_0\cos\omega^* t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega^*}\sin\omega^* t\right] - \\ &- \mathrm{e}^{-ht}\left\{A\sin(\delta+\gamma')\cos\omega^* t + \frac{A}{\omega^*}\left[h\sin(\delta+\gamma') + p\cos(\delta+\gamma')\right]\sin\omega^* t\right\} + \\ &+ A\sin(pt+\delta+\gamma'). \end{aligned}$$

Отже, рух матеріальної точки складається: з вільних згасаючих коливань (перший доданок), обумовлених початковими умовами, зі згасаючих коливань (другий доданок), що мають власну частоту, але викликані дією збурювальної сили, і чисто змушених коливань (третій доданок). Оскільки перші два рухи із часом згасають, то основним коливанням, що визначає характер руху матеріальної точки, є чисто змушене коливання з амплітудою A і частотою p. Варто помітити, що при наявності опору змушені коливання зсунуті по фазі відносно збурювальної сили на γ'.

3 Лекція 3(10). Основні теореми динаміки матеріальної точки

3.1 Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

При інтегруванні диференціальних рівнянь руху в конкретних задачах ці рівняння піддаються різним однотипним перетворенням, що залежать від характеру діючих сил. Тому доцільно пророблити такі перетворення в загальному вигляді. Загальні теореми динаміки точки і являють собою перетворення диференціальних рівнянь руху, причому в різних теоремах виділені й пов'язані між собою ті чи інші характеристики рухів. У результаті отримуються зручні залежності, які широко використовуються для розв'язання конкретних задач динаміки.

З основного закону динаміки

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$$

випливає, що

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt. \tag{47}$$

Вектор $\vec{Q} = m\vec{v}$, який дорівнює добутку маси точки на її швидкість, називається *кількістю руху матеріальної точки.*

Добуток сили на елементарний проміжок часу її дії, тобто $\vec{F}dt$, називається *елементарним імпульсом сили.*

Рівняння (47) виражає теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі: *елементарна зміна кількості руху матеріальної точки дорівнює елементарному імпульсу сили, прикладеної до цієї точки.*

Розглянемо тепер рух матеріальної точки на скінченому проміжку часу. Нехай у момент $t = t_0$ швидкість точки дорівнює $\vec{v}_0$, а в момент t дорівнює $\vec{v}$. Тоді, інтегруючи рівняння (47), можна записати

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt. \tag{48}$$

Інтеграл $\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt$, що входить у праву частину цього співвідношення, називається *імпульсом сили за проміжок часу* $[t_0, t]$. Таким чином, ми отримали формулювання теореми про зміну кількості руху в інтегральній формі: *зміна кількості руху матеріальної точки за скінчений проміжок часу дорівнює імпульсу сили, прикладеної до точки, за той же проміжок часу.*

Якщо скористатися декартовою системою координат, то матимемо

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \int_{t_0}^{t} F_x dt, \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = \int_{t_0}^{t} F_y dt, \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = \int_{t_0}^{t} F_z dt, \tag{49}$$

де $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ – проекції швидкості матеріальної точки на осі координат у момент часу t, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ – ті ж проекції в момент t_0, F_x, F_y, F_z – проекції сили $\vec{F}$.

Як відмічалося в лекції 8, у загальному випадку сила $\vec{F}$ (а, отже, і її проекції) може бути функцією часу, координат точки і швидкості:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_y &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_z &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \tag{50}$$

Тому для фактичного обчислення інтегралів у правих частинах рівнянь (49) потрібно знати координати матеріальної точки як функції часу. Але визначення x, y і z як функцій часу і є те, до чого ми прагнемо, розв'язуючи другу задачу динаміки. Якщо ці функції звідкись відомі, то відпадає необхідність користуватися рівняннями (49). Таким чином, у загальному випадку теорема про зміну кількості руху нових можливостей для розв'язання оберненої задачі динаміки не відкриває.

Однак, якщо сила є функцією тільки часу, інтеграли в правих частинах рівнянь (49) можуть бути обчислені й можна знайти $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, а зінтегрувавши ще раз – рівняння руху $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

3.2 Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки

Знову повернемося до основного рівняння динаміки, записаного тепер у вигляді $m\vec{w} = \vec{F}$, і помножимо його векторно зліва на радіус-вектор точки $\vec{r}$, що визначає положення матеріальної точки відносно деякої точки O, яку будемо називати центром:

$$\vec{r} \times m\vec{w} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{51}$$

Беручи до уваги, що $\vec{w} = d\vec{v}/dt$, перетворимо ліву частину цього рівняння в наступним чином:

$$\vec{r} \times m\vec{w} = \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}. \tag{52}$$

Але $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, і векторний добуток паралельних векторів $\vec{v} \times m\vec{v}$ дорівнює нулю. Тому $\vec{r} \times m\vec{w} = d\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right)/dt$ і рівняння (51) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{53}$$

Вектор $\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$ називається *моментом кількості руху матеріальної точки* відносно центра (точки O), а вектор $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ – *моментом сили*, прикладеної до точки, відносно центра.

Таким чином,

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O. \tag{54}$$

Це рівняння виражає собою теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки: *похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно деякого центра дорівнює моменту сили, прикладеної до точки, відносно того ж центра.*

Векторне рівняння (54) еквівалентно трьом скалярним рівностям.

Приймаючи точку O за початок системи координат $Oxyz$ і записуючи векторні добутки у вигляді визначників третього порядку, замість (54) одержуємо

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \tag{55}$$

звідки

$$\begin{aligned} m\frac{d}{dt}\left(y\dot{z} - z\dot{y}\right) &= yF_z - zF_y, \\ m\frac{d}{dt}\left(z\dot{x} - x\dot{z}\right) &= zF_x - xF_z, \\ m\frac{d}{dt}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \tag{56}$$

Отриманий результат можна сформулювати в такий спосіб: *похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно якої-небудь осі дорівнює моменту сили, прикладеної до точки, відносно тієї ж самої осі.*

Як видно з рівнянь (56), при їхньому інтегруванні необхідне обчислення інтегралів від правих частин. Однак обчислення цих інтегралів можливо тільки тоді, коли x, y і z відомі як функції часу, але тоді відпадає взагалі потреба в застосуванні рівностей (56).

Проте існують випадки, коли теорема про зміну моменту кількості руху дає можливість ефективно розв'язувати задачі динаміки.

До них належить, насамперед, випадок дії *центральної сили*, яка буде розглянута нами на наступній лекції. Цим терміном ми будемо користуватися стосовно будь-якої сили, лінія дії якої проходить через деяку фіксовану точку простору (полюс). Так, наприклад, при вивченні руху Землі в Сонячній системі на Землю діє сила притягання Сонця, увесь час спрямована до центра Сонця.

Вивчимо дію центральної сили. Момент сили відносно точки, через яку проходить лінія дії, тотожно дорівнює нулю. Отже, відповідно до рівності (56) момент кількості руху матеріальної точки відносно полюса є сталою величиною:

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \overrightarrow{\text{const}}. \tag{57}$$

Таким чином, ми одержимо відразу три перших інтеграли руху:

$$m\left(y\dot{z} - z\dot{y}\right) = C_1, \quad m\left(z\dot{x} - x\dot{z}\right) = C_2, \quad m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) = C_3. \tag{58}$$

На підставі цих результатів можна зробити деякі загальні висновки про характер руху матеріальної точки.

Якщо порівняти вираз для для $\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$ з виразом введеного в лекції 3 вектора секторної швидкості

$$\vec{v}_S = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}, \tag{59}$$

то можна написати інтеграл (57) в наступній формі:

$$\vec{K}_O = 2m\vec{v}_S = \overrightarrow{\text{const}}. \tag{60}$$

Отже, у випадку центральної сили секторна швидкість є сталою величиною, тобто *радіус-вектор точки описує рівні площі за однакові проміжки часу*. Цей результат називається *законом площ*. Крім того, із (60) випливає, що траєкторія точки є плоскою кривою. Справді, вектор $\vec{v}_S$ зберігає сталий напрямок в просторі, тому на основі формули (59) можна стверджувати, що вектор $\vec{r}$ увесь час розташований в площині, перпендикулярній до вектора $\vec{v}_S$, тобто траєкторія точки лежить в цій площині.

3.3 Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Знайдемо зв'язок між роботою сил, прикладених до матеріальної точки, і зміною швидкості точки. Для цього скористаємося основним рівнянням динаміки

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

де $\vec{F}$ – рівнодійна всіх сил, прикладених до матеріальної точки. Помножимо обидві частини цієї рівності скалярно на диференціал радіуса-вектора $d\vec{r}$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{61}$$

У правій частині знаходиться *елементарна робота*[4] $d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ рівнодійної всіх сил, прикладених до матеріальної точки; ліву частину можна представити в наступній формі:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right);$$

при цьому враховано, що скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля ($\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$). Тепер рівність (61) матиме вигляд

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d'A. \tag{62}$$

Половина добутку маси точки на квадрат її швидкості називається *кінетичною енергією* матеріальної точки

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{63}$$

Рівняння (62) дає диференціальний зв'язок між кінетичною енергією й елементарною роботою: *повний диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі всіх сил, що діють на цю точку.*

Нехай тепер матеріальна точка M переміщується по кривій BC від положення M_1 до положення M_2 (див. рис. 7).

---

[4] Штрих означає, що $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ не є, як правило, повним диференціалом деякої функції координат $A(x, y, z)$.

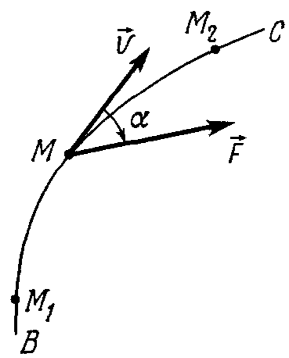

Рис. 7

Робота сили на скінченому переміщенні M_1M_2 визначається як сума відповідних елементарних робіт, тобто як криволінійний інтеграл від елементарної роботи, взятий вздовж дуги $\overset{\frown}{M_1M_2}$ траєкторії:

$$A = \int\limits_{M_1M_2} d'A = \int\limits_{M_1M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{64}$$

Позначимо через $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ швидкість точки M у положеннях M_1 і M_2 відповідно та зінтегруємо обидві частини рівності (62) по дузі $\overset{\frown}{M_1M_2}$:

$$\int\limits_{M_1M_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int\limits_{M_1M_2} d'A.$$

Права частина цієї рівності дорівнює роботі $A_{M_1M_2}$ сили $\vec{F}$ на шляху M_1M_2; при обчисленні лівої частини варто мати на увазі, що криволінійний інтеграл від повного диференціала деякої функції дорівнює самій функції. Таким чином, матимемо

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{M_1M_2}, \tag{65}$$

тобто *зміна кінетичної енергії матеріальної точки при її скінченому переміщенні дорівнює сумі робіт на цьому переміщенні всіх сил, прикладених до точки.*

За допомогою тільки що доведеної теореми про зміну кінетичної енергії можна розв'язувати наступні дві задачі. У першій визначається швидкість матеріальної точки наприкінці або на початку руху. Розв'язання цієї задачі за допомогою рівності (65) має сенс, звичайно, тільки в тому випадку, якщо роботу всіх сил, прикладених до матеріальної точки, можна обчислити, не знаючи закону руху, тобто не інтегруючи рівняння руху. До задач другого типу належить обчислення роботи сили за заданою швидкістю. Використання формули (65) для розв'язання задач такого роду особливо корисно в тих випадках, коли існують труднощі, пов'язані з визначенням закону руху й обчисленням інтеграла (64), або коли невідома аналітична залежність сили.

3.4 Робота сили. Потужність

Елементарна робота сили є скалярною мірою дії сили, що дорівнює скалярному добутку $d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ сили на елементарне переміщення точки її прикладення. У випадку натурального задання руху $d\vec{r} = \vec{\tau} d\sigma$. Тоді елементарна робота визначатиметься з виразу

$$d'A = \vec{F} \cdot \vec{\tau} d\sigma = F \cos\left(\widehat{\vec{F}, \vec{\tau}}\right) d\sigma = F \cos\alpha \, d\sigma.$$

Повна робота при цьому задаватиметься криволінійним інтегралом першого роду по дузі $\overset{\frown}{M_1M_2}$

$$A = \int\limits_{M_1M_2} F \cos\alpha \, d\sigma. \tag{66}$$

При координатному способі задання руху вираз (66) для повної роботи має вигляд

$$A = \int\limits_{M_1M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \qquad (67)$$

Права частина цієї рівності є криволінійним інтегралом другого роду (всі функції F_x, F_y, F_z обчислюються на кривій M_1M_2, а диференціали координат dx, dy, dz пов'язані між собою через її рівняння).

Якщо сила $\vec{F}$ залежить тільки від положення точки, тобто від координат x, y, z точки M прикладення сили, то робота обчислюється безпосередньо за формулою (67) і при цьому зовсім не потрібно знати закон руху точки M по кривій. Якщо ж сила $\vec{F}$ залежить не тільки від координат точки прикладення, але й від її швидкості і часу t, то для обчислення роботи слід знати рівняння руху точки

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Якщо врахувати, що $dx = \dot{x}dt$, $dy = \dot{y}dt$, $dz = \dot{z}dt$, тоді від криволінійного інтеграла (67) можна перейти до визначеного інтеграла

$$A = \int\limits_{t_1}^{t_2} (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})\, dt, \qquad (68)$$

де t_1 і t_2 – моменти часу, в які точка M проходить положення M_1 і M_2 відповідно.

Якщо на матеріальну точку M діє кілька сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,..., $\vec{F}_n$, то легко показати, що *робота рівнодійної цих сил на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт складових сил на цьому ж переміщенні*

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n.$$

Поряд з поняттям роботи вводять також поняття *потужності сили*:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}.$$

Обчислимо роботу сили $\vec{F}$ від деякої фіксованої точки M_1 до точки M (див. рис. 7), яку точка досягає в момент часу t:

$$A(t) = \int\limits_{t_1}^{t} (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})\, dt.$$

Якщо продиференціювати останню рівність за часом, то одержимо, що $N = dA/dt$. Отже, *потужність характеризує швидкість виконання роботи силою, яка прикладена до матеріальної точки.*

Одиницею вимірювання роботи в системі СІ є джоуль (1 Дж = 1 Н·м), в CGS – ерг, у МКГСС – кілограм-сили-метр (кгс·м). Для вимірювання потужності в цих системах використовують відповідно ват (1 Вт = Дж/с = 1 Н·м/с $\approx 0,102$ кгс·м/с), ерг за секунду (ерг/с), кілограм-сили-метр за секунду (кгс·м/с). У техніці за одиницю роботи беруть кіловат-годину (1 кВт·год = 3600 Дж), за одиницю потужності – 1 кВт = 1000 Вт, а також так звану кінську силу (1 к.с. = 75 кгс·м/с =736 Вт).

3.5 Потенціальні сили

3.5.1 Умови потенціальності сили

Сила, для якої існує двічі неперервно диференційовна функція $U(x, y, z)$ така, що $\vec{F}d\vec{r} = dU$, називається *потенціальною*, а $U(x, y, z)$ – потенціальною (силовою) функцією.

З означення випливає, що $dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$. З іншого боку, повний диференціал функції трьох змінних (x, y, z) рівний

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

Прирівнюючи ці дві формули, отримаємо співвідношення

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{69}$$

які ще можна записати коротко у векторній формі

$$\vec{F} = \operatorname{grad} U = \vec{\nabla} U, \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Продиференціюємо першу з рівностей (69) по y, а другу – по x. В результаті отримаємо,що

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \tag{70}$$

Оскільки функція U – двічі неперервно диференційовна, то в її мішаних похідних можна змінювати порядок диференціювання. Тоді праві частини рівностей (70) будуть рівні, а це означає, що

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \tag{71}$$

Аналогічним чином можна показати на основі рівностей (69), що

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}. \tag{72}$$

Формули (71), (72), які ми отримали, виражають собою *умови потенціальності* сили $\vec{F}$. Ці умови можна подати однією векторною рівністю. Для цього обчислимо $\operatorname{rot} \vec{F}$:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 0.$$

Таким чином, маємо умову потенціальності $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

3.5.2 Робота потенціальної сили. Потенціальна енергія

Обчислимо роботу потенціальної сили:

$$A_{M_1M_2} = \int\limits_{M_1M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{M_1M_2} dU = U_{M_2} - U_{M_1}, \quad U_M = \int\limits_{M_0M} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{73}$$

де M_0 – довільна точка. Отже, робота потенціальної сили дорівнює різниці значень силової функції в кінцевій та початковій точках і не залежить від вигляду траєкторії точки. Якщо переміщення відбувається по замкнутому контуру, то робота на ньому буде рівна

$$A = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Поверхня $U(x, y, z) = \text{const}$ називається *еквіпотенціальною* або *поверхнею рівня*. Запас роботи V, яку може виконати сила при переміщенні точки із даного положення M на якусь поверхню рівня M_0, яка умовно приймається за нульову, називається *потенціальною енергією*. Згідно означення та виразу для роботи потенціальної сили (73) потенціальна енергія рівна

$$V \equiv V_M = -U_M = \int\limits_{MM_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \text{де} \quad V_{M_0} = 0. \tag{74}$$

Враховуючи (74), формулу (73) можна записати у вигляді

$$A_{M_1M_2} = V_{M_1} - V_{M_2}. \tag{75}$$

3.5.3 Обчислення роботи деяких потенціальних сил

Обчислимо роботу, виконувану деякими конкретними потенціальними силами.

Робота сили тяжіння (ваги). Нехай матеріальна точка M маси m рухається по деякій траєкторії з положення M_1 в положення M_2 (див. рис. 8). На неї діє напрямлена вертикально вниз сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$, проекції якої на координатні осі запишемо у вигляді

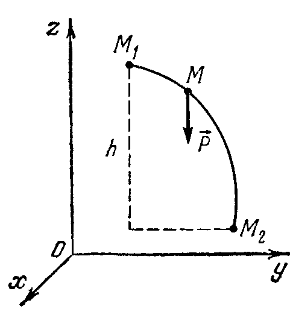

Рис. 8

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg.$$

Згідно (74) потенціальна енергія сили тяжіння дорівнює

$$V = \int\limits_z^{z_0} F_z dz = \int\limits_z^{z_0} (-mg) dz = mgz.$$

Тут $z_0 = 0$ задає площину xOy, у будь-якій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ якої потенціальна енергія рівна нулю ($V_{M_0} = 0$).

Тоді згідно (75) робота, виконана силою ваги підчас переміщення точки M із положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положення $M_2(x_2, y_2, z_2)$, дорівнює

$$A = V_{M_1} - V_{M_2} = mg(z_1 - z_2).$$

Отже, робота сили ваги дорівнює добутку сили ваги P на різницю висот початкового і кінцевого положень та, як і для будь-якої іншої потенціальної сили, не залежить від форми траєкторії точки.

Оскільки різниця $z_1 - z_2$ може бути як додатною, так і від'ємною, то, позначивши $z_1 - z_2 = \pm h$ $(h > 0)$, дістанемо

$$A = \pm Ph = \pm mgh. \tag{76}$$

Робота буде додатною ($A = mgh$), якщо точка зменшує свою висоту підчас руху (саме цей випадок зображено на рис. 8), і, навпаки, від'ємною ($A = -mgh$), якщо збільшує її.

Робота сили пружності. Обчислимо роботу, здійснену силою $\vec{F}$, що прикладена до точки M пружини при її деформації вздовж осі Ox. Початкове положення точки $x = 0$ відповідає недеформованій пружині. За законом Гука сила пружності (як при розтягненні, так і при стисненні) пропорційна зміщенню x кінця пружини відносно положення рівноваги:

$$F_x = -cx,$$

де $c > 0$ – коефіцієнт жорсткості пружини.

Згідно (74) потенціальна енергія сили пружності дорівнює

$$V = \int\limits_x^{x_0} F_x dx = -c\int\limits_x^{x_0} x dx = -\frac{c}{2}\left(x^2 - x_0^2\right) = -\frac{cx^2}{2}.$$

Тут положення рівноваги $x_0 = 0$ відіграє роль точки M_0, в якій потенціальна енергія рівна нулю ($V_{M_0} = 0$).

Тоді згідно (75) робота при переході точки з положення M_1 в положення M_2 дорівнює

$$A = -\frac{c}{2}(x_1^2 - x_2^2) = \frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2). \tag{77}$$

Якщо положення рівноваги знаходиться в точці $x_0 \neq 0$, то у всіх виразах слід зробити заміну $x \to x - x_0$. Зокрема, формула (77) набуде тоді наступного вигляду (див. рис. 9):

$$A = \frac{c}{2}\left[(x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2\right] = -\frac{c}{2}\left[(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2\right]. \tag{78}$$

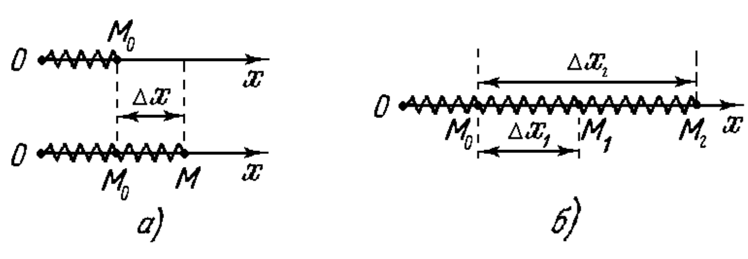

Рис. 9

Як видно з формули (77) сила пружності виконуватиме додатну роботу при зменшенні деформації пружини ($|\Delta x_2| < |\Delta x_1|$) і від'ємну – при збільшенні деформації ($|\Delta x_2| > |\Delta x_1|$).

Робота центральних сил. Якщо центр сили вибрати в якості початку координат, то всі центральні сили можна представити у вигляді

$$\vec{F} = F_r(r)\frac{\vec{r}}{r},$$

причому всі вони – потенціальні. Знайдемо їх потенціальну енергію. Диференціюючи вираз $\vec{r}^2 = r^2$ зліва і справа, отримаємо $2\vec{r} \cdot d\vec{r} = 2rdr$ або $\vec{r} \cdot d\vec{r} = rdr$. Тоді

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_r \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r} = F_r \frac{rdr}{r} = F_r dr.$$

Відповідно, потенціальна енергія буде рівна

$$V(r) = \int\limits_{MM_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{r}^{r_0} F_r dr,$$

де r_0 – стала така, що $V(r_0) = 0$.

Робота гравітаційної сили. Прикладом центральних сил гравітаційна сила притягання, для якої згідно закону всесвітнього тяжіння

$$F_r = -G\frac{mM}{r^2}.$$

Її потенціальна енергія рівна

$$V = -GmM \int\limits_{r}^{r_0} \frac{dr}{r^2} = GmM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) = -\frac{GmM}{r}.$$

Тут $r_0 = \infty$, тобто поверхнею нульового рівня є сфера нескінченного радіуса.

Робота гравітаційної сили при переміщенні зі сфери радіуса r_1 на сферу радіус r_2 буде мати вигляд:

$$A = -GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = GmM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Це означає, що при наближенні точки до силового центра $(r_1 > r_2)$ сила виконує додатну роботу, а при віддаленні $(r_1 < r_2)$ – від'ємну.

3.6 Закон збереження та розсіювання повної механічної енергії

Нехай на точку діють тільки потенціальні сили з рівнодійною $\vec{F}$, якій відповідає потенціальна енергія V. Тоді за теоремою про зміну кінетичної енергії у диференціальній формі (62)

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -dV. \tag{79}$$

Переносячи $-dV$ з правої частини рівняння в ліву і інтегруючи, отримаємо

$$\frac{mv^2}{2} + V = E = \text{const}. \tag{80}$$

Суму кінетичної $T = mv^2/2$ і потенціальної V енергій називають *повною механічною енергією*. Формула (80) виражає собою *закон збереження повної механічної енергії*, який формулюється наступним чином: *при дії на точку потенціальних сил повна механічна енергія зберігається.*

Припустимо, що серед сил є хоча б одна не потенціальна (дисипативна). Тоді

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT = \vec{F}_{pot} \cdot d\vec{r} + \vec{F}_{dis} \cdot d\vec{r} = -dV + \vec{F}_{dis} \cdot d\vec{r}.$$

Поділимо це рівняння на dt:

$$\frac{d(T+V)}{dt} = \vec{F}_{dis} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}_{dis} \cdot \vec{v}.$$

Як відомо дисипативні сили (сили тертя, в'язкого опору, тощо) напрямлені завжди проти руху, тому для них $\vec{F}_{dis} \cdot \vec{v} = -F_{dis}v < 0$. Таким чином маємо, що

$$\frac{d(T+V)}{dt} < 0, \tag{81}$$

а це означає, що в цьому випадку має місце *закон розсіювання повної механічної енергії*: *за наявності хоча б одної дисипативної сили повна механічна енергія точки розсіюється (тобто зменшується з часом).*

4 Лекція 4(11). Рух матеріальної точки в полі центральної сили

4.1 Основні властивості руху точки під дією центральної сили

Сила, яка діє на матеріальну точку, називається центральною, якщо лінія її дії проходить через деяку нерухому точку простору – центр сили.

Якщо центр сили вибрати в якості початку координат, то всі центральні сили можна представити у вигляді

$$\vec{F} = F_r(r)\frac{\vec{r}}{r}, \tag{82}$$

причому при $F_r < 0$ сила буде притягуюча, а при $F_r > 0$ – відштовхувальна.

Як вже відмічалося на попередній лекції, момент центральної сили відносно точки O рівний $\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F} = 0$, звідки за теоремою про зміну момента кількості руху ми знайшли, що момент кількості руху точки під дією сили (82) $\vec{K}_O = \vec{r}\times m\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$, звідки ($m = \mathrm{const}$)

$$\vec{r}\times\vec{v} = \vec{C} = 2\vec{v}_S = \overrightarrow{\mathrm{const}}, \tag{83}$$

де, нагадуємо, $\vec{v}_S$ – секторна швидкість, а сталий вектор $\vec{C}$ визначається із початкових умов. З рівності (83) випливають два важливі наслідки.

1. Вектори $\vec{r}$ і $\vec{v}$ лежать в деякій нерухомій площині, а, значить, і траєкторія руху точки є плоскою кривою.

2. Оскільки секторна швидкість $v_S = dS/dt = C/2$ стала ($C = \pm|\vec{C}| = \mathrm{const}$), то, інтегруючи, знаходимо, що

$$S = v_S t + S_0. \tag{84}$$

Формула (84) виражає собою так званий *закон площ*, який формулюється наступним чином: *при русі матеріальної точки під дією центральної сили за однакові проміжки часу радіус-вектор описує (або, ще кажуть, "замітає") однакові площі.*

З іншого боку, відомо, що $v_S = r^2\dot{\varphi}/2 = C/2$, звідки отримуємо ще одне важливе співвідношення:

$$r^2\dot{\varphi} = C, \tag{85}$$

де стала C називається *інтегралом площ.*

4.2 Диференціальне рівняння траєкторії точки у полі центральної сили. Формули Біне

Оскільки, як ми показали, траєкторія точки під дією центральної сили – плоска крива, то її рух зручно описувати в полярній системі координат з полюсом в центрі силового поля. Спроектувавши диференціальне рівняння руху на радіальний $\vec{r}^0$ і трансверсальний $\vec{p}^0$ напрямки, отримаємо два рівняння

$$mw_r = F_r(r), \quad mw_p = 0, \tag{86}$$

де

$$w_r = \ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2, \quad w_p = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) \tag{87}$$

– радіальне та трансверсальне прискорення (див. лекцію 3). Якщо в трансверсальне прискорення підставити (85), то отримаємо $w_p = 0$. Це означає. що ми тільки підтвердили друге з рівнянь (86).

Розглянемо тепер перше з рівнянь (86), яке з урахуванням (87) запишеться у вигляді:

$$m(\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2) = F_r(r). \tag{88}$$

Перерахуємо в ньому похідні $\dot{r}$ та $\ddot{r}$, враховуючи рівність $\dot{\varphi} = C/r^2$, яка випливає з інтеграла площ (85):

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{89}$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{90}$$

Підставляючи отримані вирази в рівняння (88), отримуємо *другу формулу Біне*

$$F_r(r) = -\frac{mC^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right], \tag{91}$$

яка дозволяє знайти силу $\vec{F}(r)$, якщо відоме рівняння траєкторії $r = r(\varphi)$.

Якщо ввести невідому функцію $u(\varphi) = 1/r$, то формулу (91) можна записати у вигляді диференціального рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{F_r\left(\frac{1}{r}\right)}{mC^2u^2}. \tag{92}$$

Рівняння (92) є *диференціальним рівнянням траєкторії матеріальної точки, що рухається під дією центральної сили*, яке ще називають *рівнянням Біне*.

Знайдемо тепер квадрат швидкості точки, яка має теж радіальну $v_r = \dot{r}$ і трансверсальну $v_p = r\dot{\varphi}$ складові:

$$v^2 = v_r^2 + v_p^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = C^2\left\{\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\}. \tag{93}$$

Формулу (93) називають *першою формулою Біне*.

Розглянемо два частинні випадки центральних сил і застосуємо до них отримані формули Біне.

4.2.1 Рух точки по колу

Розглянемо рух точки по колу радіуса $R = \text{const}$. Рівнянням траєкторії такого руху відоме і має вигляд $r = R$. Знайдемо силу, під дією якої такий рух відбувається. Для цього врахуємо рівняння траєкторії $r = R$ у формулах (91) і (93):

$$v^2 = \frac{C^2}{R^2} \Rightarrow C^2 = v^2R^2, \quad F_r = -\frac{mC^2}{R^3}.$$

Поєднуючи останні дві формули, отримаємо добре відомий вираз для доцентрової (про це свідчить знак мінус) сили:

$$F_r = -\frac{mv^2}{R}. \tag{94}$$

Це означає, що рух по колу може відбуватися тільки під дією доцентрової сили, рівної mv^2/R.

4.2.2 Рух точки під дією сили гравітаційного притягання

В цій задачі навпаки, сила, яка діє на точку, відома і рівна згідно закону всесвітнього тяжіння

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{95}$$

де, нагадаємо, G – гравітаційна стала, m – маса матеріальної точки, M – маса планети, r – відстань від точки до центра планети.

Можна позбутися добутку GM, якщо відомо силу тяжіння на поверхні планети, тобто при $r = R$, де R – радіус планети. Для Землі ця сила притягання рівна mg, де g – прискорення вільного падіння відносно нерухомої Землі. Аналогічно визначається g і для інших планет чи зірок.

Таким чином, при $r = R$ з рівності (95) отримаємо

$$mg = \frac{GmM}{R^2}, \quad GM = gR^2,$$

після чого (95) набуває вигляду

$$\vec{F} = -\frac{mgR^2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{96}$$

Отже, в даному випадку

$$F_r(r) = F_r\left(\frac{1}{u}\right) = -mgR^2u^2.$$

При русі точки поза межами земної атмосфери, але в достатній близькості до її поверхні, можна знехтувати дією гравітаційних сил з боку інших небесних тіл і вважати, що на точку діє тільки сила (96). В цьому випадку диференціальне рівняння траєкторії (92) набуде вигляду

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}, \quad p = \frac{C^2}{gR^2} = \text{const}. \tag{97}$$

4.3 Види траєкторій. Колова та параболічна швидкості

Дослідимо розв'язок рівняння (97), яке є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Відповідне однорідне рівняння нагадує диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань з одиничною власною частотою, загальний розв'язок якого можна подати у вигляді

$$u_{\text{з.о.}} = a\cos(\varphi - \varepsilon),$$

де a та ε – довільні сталі. Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння буде:

$$u_{\text{ч.н.}} = A = \text{const},$$

якbq при підстановці в рівняння дає $A = 1/p$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (97) має вигляд:

$$u = a\cos(\varphi - \varepsilon) + \frac{1}{p}. \tag{98}$$

Згадуючи, що $u = 1/r$, перепишемо рівняння (98) у вигляді

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varepsilon)}, \tag{99}$$

де $e = ap$ –стала величина.

Рівняння (99) визначає траєкторію матеріальної точки, що рухається під дією ньютонівської сили тяжіння. Для спрощення аналізу введемо нову змінну $\psi = \varphi - \varepsilon$. Очевидно, що тепер кут ψ буде відраховуватися не від початково взятого фіксованого напрямку, а від деякого нового напрямку Ox_1, повернутого відносно першого на кут ε (рис. 10). Звичайно, вигляд траєкторії від такої формальної заміни змінних не може змінитися.

Тепер рівняння (99) набуде вигляду

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\psi}. \tag{100}$$

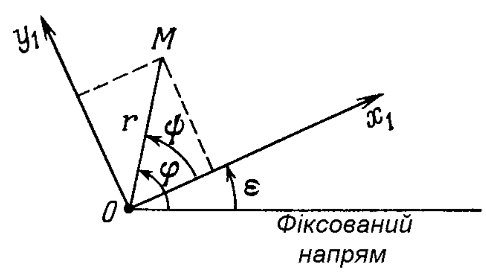

Рис. 10

Таким чином, вигляд траєкторії визначається єдиним чином через сталі p та e. Трохи далі буде показано, як визначити ці сталі за початковими умовами.

З курсу аналітичної геометрії відомо, що криві (100) являють собою конічні перерізи[5].

Тип траєкторії визначається значенням величини e, яку називають *ексцентриситетом конічного перерізу.*

При $e = 0$ $r = p = \text{const}$, що відповідає коловій орбіті.

Надалі приймемо, що $e > 0$; це відповідає вибору додатного напряму полярної осі Ox_1 ($\psi = 0$) від центра O на найближчу до O точку траєкторії, яка називається *перицентром* (для земних супутників – *перигеєм*).

Якщо $e < 1$, то знаменник у правій частині (100) ніколи не обертається в нуль, отже, крива другого порядку не має нескінченно віддалених точок. Це може бути тільки еліпс. В частинному випадку, коли $e = 0$ еліпс перетворюється в коло.

При $e = 1$ знаменник обертається в нуль при $\psi = \pi$. Кривою другого порядку, що має нескінченно віддалену точку тільки при одному значенні полярного кута ψ, є парабола.

Якщо $e > 1$, то з'являються нескінченно віддалені точки при двох значеннях кута ψ, отриманих з рівняння

$$1 + e\cos\psi = 0,$$

[5] У декартовій системі координат, для якої $x_1 = r\cos\psi$, $y_1 = r\sin\psi$, рівняння (100) приводиться до вигляду $x_1^2 + y_1^2 = (p - ex_1)^2$, тобто всі траєкторії можуть бути тільки кривими другого порядку.

тобто при

$$\psi = \pm \arccos\left(-\frac{1}{e}\right).$$

Такою властивістю володіє тільки гіпербола.

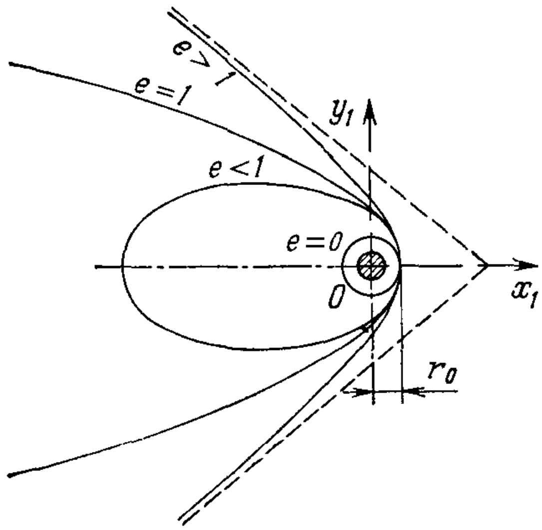

Рис. 11

На рис. 11 зображено можливі траєкторії при $e \geqslant 0$ і однаковій для всіх траєкторій відстані від центра O до перицентра. Ця відстань відповідно до рівняння (100) рівна $r_{min} = r_0 = \frac{p}{1+e}$.

Встановивши, що тип траєкторії визначається значенням ексцентриситету e, знайдемо залежність ексцентриситету від початкових умов.

Спочатку зробимо це, віднісши початкові умови до того моменту часу, коли точка перетинає вісь x_1 (див. рис. 10), тобто при $\psi = 0$.

Відповідно до формули (100) маємо

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{pe\sin\psi}{(1 + e\cos\psi)^2}.$$

Отже, при $\psi = 0$ полярний радіус r досягає мінімуму ($dr/d\psi = 0$). Це означає, що при $\psi = 0$ і будь-якому e радіальна швидкість $v_r = \dot{r} \sim dr/d\psi = 0$ і швидкість точки перпендикулярна до радіуса-вектора $\vec{r}_0$, який визначає положення точки.

Маючи на увазі, що $\dot{\varphi} = \dot{\psi}$ і поперечна швидкість $v_p = r\dot{\psi}$, перепишемо інтеграл площ у вигляді

$$rv_p = C.$$

Нехай тепер $r = r_0$, $v = v_0$ при $\psi = 0$. Для цих початкових умов відповідно до рівняння (100) буде

$$r_0 = \frac{p}{1+e}.$$

Звідси знаходимо

$$e = \frac{p}{r_0} - 1. \tag{101}$$

Так як для розглянутих початкових умов $v_p = v_0$, то $C = r_0 v_0$ і, з огляду на те, що $p = C^2/gR^2$, отримаємо

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{gR^2} - 1. \tag{102}$$

Це співвідношення є основним і дозволяє знайти інтервали швидкостей, яким відповідають ті чи інші види траєкторій.

Зокрема, якщо $e = 0$, то траєкторією буде коло; при цьому початкова швидкість v_0 має значення

$$v_0 = v_{\text{кол}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}$$

і називається *коловою швидкістю*. Колова швидкість, обчислена з умов руху поблизу Землі ($r_0 = R$), називається *першою космічною швидкістю*:

$$v_{\text{кол}} = v_1 = \sqrt{gR} \approx 7,9\,\text{км/с}.$$

Еліптичні траєкторії ($e < 1$) визначаються нерівністю

$$v_0 < \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}}.$$

Параболічній траєкторії відповідає значення $e = 1$, тобто за формулою (102) швидкість

$$v_0 = v_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}}.$$

Знайдене значення швидкості називається *параболічної швидкістю*. Якщо початкова швидкість задана поблизу Землі, то параболічна швидкість

$$v_{\text{пар}} = v_2 = \sqrt{2gR} \approx 11,2\,\text{км/с}.$$

називається *другою космічною швидкістю*.

При наданні такої початкової швидкості точка необмежено віддалялася б від Землі.

Гіперболічні траєкторії характеризуються нерівністю $e > 1$, якому відповідають початкові швидкості

$$v_0 > \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}}.$$

4.4 Закони Кеплера

На основі отриманих у попередніх підрозділах теоретичних відомостей можна сформулювати три відомі закони Кеплера, які були отримані ним на основі астрономічних спостережень за планетами Сонячної системи. Насправді ж, ці закони мають, як ми побачимо нижче, значно ширшу область застосування, ніж Сонячна система.

Перший закон Кеплера. *Планети рухаються по еліптичних орбітах, в одному з фокусів, яких знаходиться Сонце.*

Дійсно, як ми показали вище, при $0 < e < 1$ планета (яку тут можна вважати матеріальною точкою) рухатиметься у силовому полі Сонця (тут ми вважаємо, що Сонце є нерухомим, оскільки $M_C \gg m_{\text{пл}}$) по еліптичній траєкторії

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\psi},$$

де e – ексцентриситет еліпса, $p = b^2/a$ – параметр еліпса, a і b – тут велика і мала півосі еліпса, відповідно.

Другий закон Кеплера. *За однакові проміжки часу радіус-вектор планети “замітає” однакові площі.*

Насправді, ми довели загальніший закон площ, справедливий для будь-якої центральної сили, а не тільки для гравітаційної сили. Тобто другий закон Кеплера є тільки частинним випадком закону площ.

Третій закон Кеплера. *Відношення кубів великих півосей орбіт до квадратів періодів обертання для всіх планет однакові:*

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const}.$$

Доведемо це. Площа еліпса, як відомо, $S = \pi ab$. Тоді інтеграл площ

$$C = 2v_S = \frac{2S}{T} = \frac{2\pi ab}{T},$$

де T – період обертання планети, тобто час, за який планета робить один повний оберт навколо Сонця. Підносячи останню формулу до квадрату і враховуючи, що $b^2 = pa$, маємо

$$C^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \frac{4\pi^2 pa^3}{T^2}.$$

Складаємо співвідношення a^3/T^2, враховуючи рівність $C^2 = pg_C R_C^2$, де g_C – прискорення вільного падіння на поверхні Сонця, R_C – радіус Сонця:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{C^2}{4\pi^2 p} = \frac{g_C R_C^2}{4\pi^2} = \text{const}.$$

5 Лекція 5(12). Невільний рух матеріальної точки

5.1 Означення невільного руху. В'язі. Принцип звільнення від в'язей

До цього часу ми, розглядаючи динаміку різних видів руху точки, припускали, що на її рух не накладено жодних обмежень, тобто всі її три координати можуть змінюватися будь-яким чином. Певним вибором закону зміни сили $\vec{F}$ та початкових умов можна заставити матеріальну точку рухатися по будь-якій траєкторії (прикладом може служити рух керованого космічного корабля). В таких випадках матеріальна точка називається *вільною*, а її рух – *вільним рухом.*

В інших випадках на рух можуть бути накладені ті чи інші обмеження. Розглянемо, наприклад, матеріальну точку, що знаходиться на кінці нерозтяжного стрижня довжини l, інший кінець якого за допомогою шарніра закріплений в нерухомій точці O (рис. 12). При будь-яких силах, прикладених до матеріальної точці, вона здійснює рух по поверхні сфери, радіус якої дорівнює довжині стрижня. Координати точки не будуть незалежними, так як вони повинні задовольняти рівняння сфери

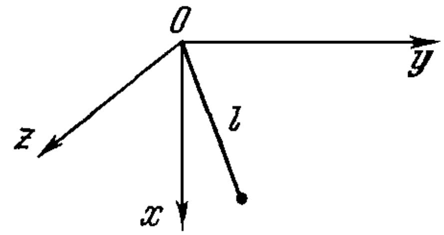

Рис. 12

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \tag{103}$$

З цього рівняння одна з координат, наприклад координата x, може бути виражена через інші дві:

$$x = \pm\sqrt{l^2 - y^2 - z^2}. \tag{104}$$

Швидкість точки завжди розташовується в дотичній площині, проведеній до сфери в точці, де знаходиться в даний момент матеріальна точка.

Таким чином, в розглянутому прикладі початкові умови не можуть бути обрані довільно, так як координати початкового положення повинні задовольняти рівнянню (103), а початкова швидкість повинна бути розташована в дотичній площині, проведеній до сфери в точці початкового положення матеріальної точки.

Отже, існують випадки руху матеріальної точки, коли деякі обмеження змушують точку здійснювати рух по строго фіксованій поверхні (в розглянутому прикладі таким обмеженням є стрижень). Можна навести приклади, коли обмеження примушують матеріальну точку рухатися по строго визначеній лінії (наприклад, кільце, насаджене на вигнутий дріт, буде рухатися тільки вздовж дроту). Обмеження також змушують матеріальну точку рухатися лише в деякій частині простору. У всіх цих випадках незалежно від діючих сил координати точки певним чином пов'язані між собою і вибір початкових умов не може бути довільним.

Будемо називати матеріальну точку *невільною*, якщо вона не може займати довільне положення в просторі. Рух такої точки називається *невільним рухом.* Обмеження, завдяки яким матеріальна точка змушена здійснювати невільний рух, називаються *в'язями.*

В механіці приймають наступне положення, яке має назву *принципу звільнення від в'язей: будь-яку невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо дію в'язей замінити* *їх реакціями, що прикладені до даного тіла.* Якщо позначити через $\vec{F}$ рівнодійну всіх активних сил, прикладених до точки, а через $\vec{N}$ – рівнодійну всіх реакцій в'язей, то основне рівняння динаміки набуде вигляду

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{N}. \tag{105}$$

Слід мати на увазі, що реакція в'язі невідома і може виникнути задача про визначення цієї сили.

У проекціях на осі системи координат $Oxyz$ відповідно до рівнянням (105) отримаємо

$$m\ddot{x} = F_x + N_x, \quad m\ddot{y} = F_y + N_y, \quad m\ddot{z} = F_z + N_z. \tag{106}$$

Ці рівняння дозволяють розв'язувати задачі, коли задано рух і активні сили і потрібно визначити реакції в'язей, а також коли задано активні сили і потрібно визначити закон руху і реакції в'язей.

5.2 Рівняння в'язей. Класифікація в'язей

Незалежно від фактичної реалізації тих чи інших в'язей, накладених на матеріальну точку, вони можуть бути задані аналітично *за допомогою рівнянь в'язей.* У загальному випадку ці рівняння встановлюють зв'язки між координатами точки, проекціями швидкості і часом.

Класифікація в'язей

1. В'язь називають *утримуючою*, якщо вона обмежує рух як у певному напрямі, так і в протилежному; її рівняння має вигляд рівності (рівностей), наприклад

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \tag{107}$$

2. В'язь називають *неутримуючою*, якщо вона обмежує рух в певному напрямі, але не обмежує в протилежному. Така в'язь визначається нерівністю (строгою чи нестрогою), наприклад,

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \leqslant 0. \tag{108}$$

3. Якщо в рівняння в'язі явно час не входить, то в'язь називають *стаціонарною (склерономною)*:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0, \quad f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \leqslant 0.$$

4. Якщо в рівняння в'язі явно час входить, то в'язь називають *нестаціонарною (реономною)* (див. (107), (108)).

5. Якщо в'язь не накладає обмеження на швидкість точки:

$$f(t, x, y, z) = 0, \quad f(t, x, y, z) \geqslant 0,$$

то вона називається *геометричною.*

6. Якщо в'язь накладає обмеження на її швидкість точки, то її називають *кінематичною* (див. (107), (108)).

7. *Голономними (інтегрованими)* називають кінематичні в'язі, рівняння яких можуть бути зінтегровані за часом.

8. *Неголономними*, або *неінтегрованими*, називають кінематичні в'язі, у диференціальні рівняння яких входять похідні за часом або диференціали координат так, що для них не існує інтегрувального множника.

9. Для точки *ідеальними* в'язями будемо називати в'язі без тертя, реакції яких не мають дотичних складових[6]. Всі інші, відповідно, називають *неідеальними.*

5.3 Рух точки по гладкій нерухомій поверхні

Для вивчення руху матеріальної точки по поверхні використаємо рівняння (106). Ці три рівняння містять шість невідомих: три координати точки $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ і три невідомі проекції R_x, R_y, R_z реакції в'язі. Але, як ми бачили, координати точки повинні також задовольняти рівняння поверхні, по якій рухається точка. Це дає четверте рівняння

$$f(x, y, z) = 0. \tag{109}$$

Звичайно, чотирьох рівнянь для визначення шести невідомих недостатньо. Для отримання двох відсутніх рівнянь використаємо умову ідеальності в'язі.

Так як поверхня, по якій рухається точка, ідеально гладка, то реакція напрямлена по нормалі до поверхні. Тоді, як відомо з диференціальної геометрії, напрямні косинуси вектора $\vec{N}$ матимуть вигляд:

$$\cos(\vec{N}, x) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \cos(\vec{N}, y) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \cos(\vec{N}, z) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z},$$

де

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

У цьому випадку проекції реакції в'язі на осі координат декартової системи можна подати у вигляді

$$N_x = N\cos(\vec{N}, x) = \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x}, \; N_y = N\cos(\vec{N}, y) = \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y}, \; N_z = N\cos(\vec{N}, x) = \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{110}$$

[6] Строгіше означення ідеальних в'язей дається за допомогою віртуальних переміщень (див., наприклад, [1, 5]).

де

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}.$$

Як видно з виразів (110), в усі три проекції входить коефіцієнт

$$\lambda = \frac{N}{\Delta f},$$

який називають *множником Лагранжа.*

Підставляючи формули (110) в рівняння (106), отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{111}$$

які називають *рівняннями Лагранжа 1-го роду.* Разом з рівнянням поверхні (109) вони визначають 4 невідомі функції: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ та $\lambda(t)$.

5.4 Рух точки по гладкій нерухомій кривій

При русі матеріальної точки по кривій рівняння в'язей мають вигляд

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \tag{112}$$

де $f_1(x, y, z) = 0$ та $f_2(x, y, z) = 0$ – рівняння поверхонь, лінія перетину яких є траєкторією точки (рис. 13).

В цьому випадку в рівнянні (105) реакцію $\vec{N}$ слід розглядати як суму реакцій, тобто

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2, \tag{113}$$

де $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ – реакції, що замінюють дію відповідно першої та другої в'язей, рівняння яких мають вигляд (112). Тому диференціальні рівняння руху запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_{1x} + N_{2x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + N_{1y} + N_{2y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + N_{1z} + N_{2z}. \end{aligned} \tag{114}$$

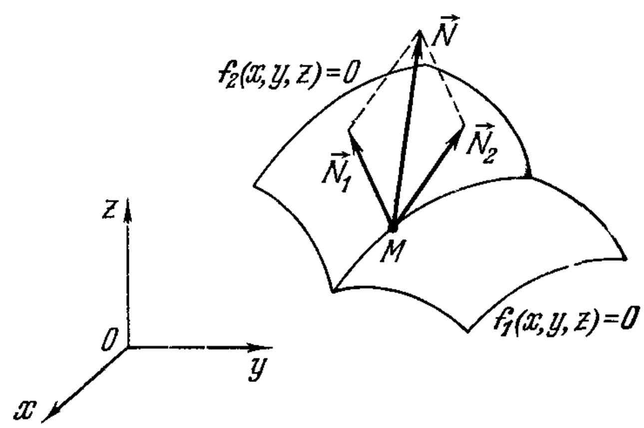

Рис. 13

Ці рівняння містять дев'ять невідомих: три координати і шість проекцій реакцій.

Напрямні косинуси векторів $\vec{N}_{1,2}$ матимуть вигляд:

$$\cos(\vec{N}_{1,2}, x) = \frac{1}{\Delta f_{1,2}}\frac{\partial f_{1,2}}{\partial x}, \quad \cos(\vec{N}_{1,2}, y) = \frac{1}{\Delta f_{1,2}}\frac{\partial f_{1,2}}{\partial y}, \quad \cos(\vec{N}_{1,2}, z) = \frac{1}{\Delta f_{1,2}}\frac{\partial f_{1,2}}{\partial z},$$

де

$$\Delta f_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_{1,2}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_{1,2}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_{1,2}}{\partial z}\right)^2}.$$

Тоді проекції реакцій в'язей на осі координат декартової системи можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} N_{1x} &= N_1 \cos(\vec{N}_1, x) = \frac{N_1}{\Delta f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x}, \\ N_{1y} &= N_1 \cos(\vec{N}_1, y) = \frac{N_1}{\Delta f_1}\frac{\partial f_1}{\partial y}, \\ N_{1z} &= N_1 \cos(\vec{N}_1, x) = \frac{N_1}{\Delta f_1}\frac{\partial f_1}{\partial z}, \end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned} N_{2x} &= N_2 \cos(\vec{N}_2, x) = \frac{N_2}{\Delta f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ N_{2y} &= N_2 \cos(\vec{N}_2, y) = \frac{N_2}{\Delta f_2}\frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ N_{2z} &= N_2 \cos(\vec{N}_2, x) = \frac{N_2}{\Delta f_2}\frac{\partial f_2}{\partial z}, \end{aligned} \tag{116}$$

де

$$N_1 = \sqrt{N_{1x}^2 + N_{1y}^2 + N_{1z}^2}, \quad N_2 = \sqrt{N_{2x}^2 + N_{2y}^2 + N_{2z}^2}.$$

У вирази (115), (116) входять два множники Лагранжа

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{\Delta f_1}, \quad \lambda_2 = \frac{N_2}{\Delta f_2}.$$

Підставляючи формули (115), (116) в рівняння (114), отримаємо рівняннями Лагранжа 1-го роду у випадку руху по гладкій нерухомій кривій

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = F_z + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}. \tag{117}$$

Разом з рівняннями кривої (112) вони визначають 5 невідомих функцій: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\lambda_1(t)$ та $\lambda_2(t)$.

5.5 Натуральні рівняння руху точки. Математичний маятник

При вивченні невільного руху матеріальної точки по нерухомій кривій іноді зручно використовувати рівняння (105) в проекціях на осі натурального тригранника.

Ці рівняння мають вигляд

$$mw_\tau = F_\tau + N_\tau, \quad mw_n = F_n + N_n, \quad mw_b = F_b + N_b. \tag{118}$$

Підставляючи сюди проекції прискорення

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0,$$

отримаємо

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau + N_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N_n, \quad 0 = F_b + N_b. \tag{119}$$

Рівняння (119) називаються *натуральними рівняннями руху*. З третього рівняння випливає, що бінормальна складова реакції визначається статично через бінормальну складову активної сили і від закону руху точки не залежить.

При заданих активних силах і відомих рівняннях в'язей рівняння (119) дозволяють визначити закон руху точки і реакції в'язей. Зауважимо, що між проекціями реакції N_τ, N_n, N_b зазвичай існує простий зв'язок.

Застосуємо тепер перші два рівняння (119) до вивчення руху математичного маятника.

Математичним маятником називається матеріальна точка, яка рухається під дією сили тяжіння по колу, розташованому у вертикальній площині. Практично це можна здійснити, наприклад підвісивши матеріальну точку до невагомої нерозтяжної нитки, інший кінець якої закріплений. При цьому початкова швидкість підвішеної точки повинна розташовуватися у вертикальній площині перпендикулярно до радіуса.

Положення точки будемо визначати кутом φ, утвореним ниткою з вертикаллю (рис. 14). Якщо m – маса точки, то діюча на точку сила тяжіння дорівнює mg. Нехай довжина нитки дорівнює l.

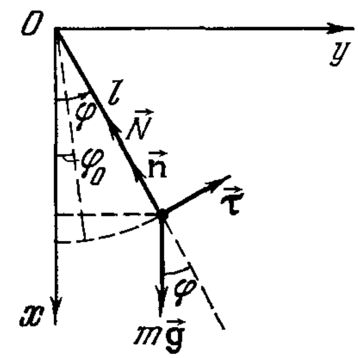

Рис. 14

Оскільки

$$v_\tau = l\dot\varphi, \quad F_\tau = -mg\sin\varphi, \quad F_n = -mg\cos\varphi,$$

то рівняння (119) матимуть вигляд

$$ml\ddot\varphi = -mg\sin\varphi, \quad ml\dot\varphi^2 = -mg\cos\varphi + N_n, \tag{120}$$

при цьому враховано, що реакція спрямована уздовж нитки і, отже, $N_\tau = 0$, а також, що $\rho = l$.

Перепишемо ці рівняння в наступній формі:

$$\ddot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \tag{121}$$

$$N_n = ml\dot\varphi^2 + mg\cos\varphi. \tag{122}$$

Рівняння (121) служить для визначення закону руху маятника, а рівняння (122) – для визначення реакції нитки.

Нехай в початковий момент ($t = 0$) нитка відхилена від вертикалі на кут $\varphi = \varphi_0$ і відпущена з початковою кутовою швидкістю $\dot\varphi = \dot\varphi_0$. Визначимо реакцію в залежності від кута φ, а також і закон руху точки $\varphi = \varphi(t)$.

Відповідно до рівняння (122) для визначення N_n в залежності від кута φ потрібно виразити величину $\dot\varphi^2$ через цей кут.

Представивши $\ddot\varphi$ в рівняння (121) у вигляді

$$\ddot\varphi = \frac{d\dot\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot\varphi\frac{d\dot\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d\dot\varphi^2}{d\varphi},$$

отримаємо

$$\frac{1}{2} l d\dot{\varphi}^2 = -g \sin\varphi d\varphi.$$

Згадуючи, що при $\varphi = \varphi_0$ $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, можемо записати так:

$$\frac{1}{2} l \int\limits_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi}^2 = -g \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \sin\varphi d\varphi,$$

звідки

$$l\dot{\varphi}^2 = 2g(\cos\varphi - \cos\varphi_0) + l\dot{\varphi}_0^2. \tag{123}$$

Підставляючи цей результат в рівняння (122), отримаємо

$$N_n = ml\dot{\varphi}_0^2 + mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0).$$

Нехай $v_0 = l\dot{\varphi}_0$ – початкова швидкість точки, тоді

$$N_n = \frac{mv_0^2}{l} + mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0). \tag{124}$$

Розглянемо далі дві задачі на застосування отриманих формул.

Задача 1. При якому мінімальному куті φ нитка втратить натяг?

Нитка втратить натяг, якщо в'язь перестане бути утримуючою, тобто при $N_n = 0$:

$$\frac{mv_0^2}{l} + mg(3\cos\varphi_1 - 2\cos\varphi_0) = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{3}\left(2\cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{gl}\right). \tag{125}$$

Задача 2. При якій мінімальній початковій швидкості v_0 нитка не втратить натяг навіть при $\varphi = \pi$?

Підставляючи $\varphi_1 = \pi$ в формулу (125), знаходимо

$$v_0 = \sqrt{(3 + 2\cos\varphi_0)gl},$$

при цьому маятник буде здійснювати коловий рух.

Перейдемо до визначення закону руху маятника. Вводячи позначення $\omega^2 = g/l$, перепишемо рівняння (121) у вигляді

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0, \tag{126}$$

Розглянемо випадок малих відхилень, коли можна прийняти $\sin\varphi \approx \varphi$. В цьому випадку диференціальне рівняння руху

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0,$$

співпадає за формою з диференціальним рівнянням вільних гармонічних коливань (див. лекцію 9). Отже, кут φ змінюється за законом

$$\varphi = a\sin(\omega t + \varepsilon), \quad a = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\omega^2}}, \quad \varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{\omega\varphi_0}{\dot{\varphi}_0}.$$

Період малих коливань маятника рівний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

тобто при малих кутах період не залежить від початкового відхилення φ_0 (коливання маятника *ізохронні*).

У випадку довільних кутів φ інтегрування нелінійного диференціального рівняння (121) приводить до *еліптичного інтегралу першого роду*.

6 Лекція 6(13). Динаміка відносного руху матеріальної точки

6.1 Переносна і коріолісова сили інерції

До тепер ми користувалися основним рівнянням динаміки точки (другим законом Ньютона), яке справедливе тільки в інерціальних системах відліку. Нагадаємо, що інерціальною називається така система відліку, у якій виконується принцип інерції (перший закон Ньютона). У багатьох випадках задачі динаміки зводяться до дослідження руху в тій чи іншій неінерціальній системі. По суті, неінерціальною є й звична для нас система відліку, пов'язана із Землею. Втім, тільки досить тонкі досліди (наприклад, спостереження за відхиленням падаючих тіл до сходу, за обертанням площини коливання маятника) можуть виявити неінерціальність геоцентричної системи відліку. У більшості застосувань систему координат, жорстко зв'язану із Землею, можна вважати інерціальною.

Значно помітніше проявляється неінерціальність систем відліку, пов'язаних із технічними об'єктами, які рухаються прискорено – від ліфта, що прискорено піднімається, до штучного супутника або космічного корабля, який злітає із поверхні Землі. Якщо пов'язати систему відліку з кораблем, автомобілем або літаком, що рухаються по криволінійних траєкторіях або тим більше з ротором швидкісної турбіни, то неінерціальність буде настільки сильною, що основне рівняння динаміки виявиться невірним.

Дана лекція присвячена вивченню руху матеріальної точки в неінерціальних системах відліку. Нижче буде дано метод побудови рівнянь руху матеріальної точки в неінерціальній системі відліку.

Припустимо, що відомо сили, які діють на матеріальну точку, а також задано рух рухомої системи координат відносно деякої інерціальної системи (надалі будемо називати її нерухомою системою).

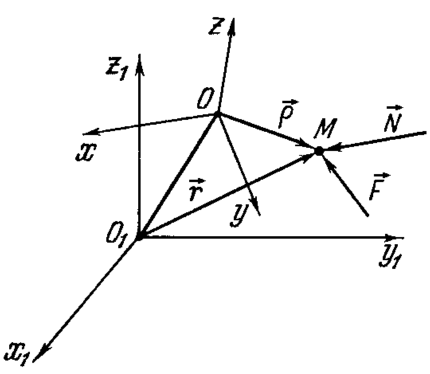

Рис. 15

Поставимо своїм завданням знайти відносний рух точки, тобто рух у неінерціальній системі відліку.

Нагадаємо, що задати рух рухомої системи координат можна за допомогою трьох координат її початку (рис. 15): $x_O(t)$, $y_O(t)$, $z_O(t)$ і трьох кутів Ейлера: ψ, θ, φ.

У нерухомій системі справедливе основне рівняння динаміки

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{N}. \tag{127}$$

Тут, як завжди, $\vec{F}$ – рівнодійна всіх активних сил, $\vec{N}$ – рівнодійна реакцій в'язей, m – маса матеріальної точки, $\vec{w}$ – її прискорення.

Використаємо тепер теорему Коріоліса (див. лекцію 7) і виразимо абсолютне прискорення через відносне, переносне й коріолісове:

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c. \tag{128}$$

Підставляючи (128) в (127), одержимо

$$m\vec{w}_r + m\vec{w}_e + m\vec{w}_c = \vec{F} + \vec{N}.$$

Переносячи частину членів у праву частину, прийдемо до векторного рівняння

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{N} + (-m\vec{w}_e) + (-m\vec{w}_c). \tag{129}$$

Звідси видно, що добуток маси матеріальної точки на її відносне прискорення не дорівнює сумі рівнодіючої всіх активних сил, що діють на неї, і рівнодійної реакцій в'язей.

Останні два вектори в правій частині рівняння (129) повинен увести спостерігач, що перебуває в неінерціальної системі відліку, для того, щоб у цій системі відліку основне рівняння динаміки зберегло форму другого закону Ньютона.

Вектори $-m\vec{w}_e$ та $-m\vec{w}_c$ називаються *силами інерції*. Перший називається *переносною силою інерції*, а другий – *коріолісовою силою інерції*.

Будемо надалі користуватися позначеннями

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{w}_e, \quad \vec{\Phi}_c = -m\vec{w}_c = -2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r), \tag{130}$$

де $\vec{\omega}_e$ – кутова швидкість переносного руху.

Таким чином, рівняння (129) набуває звичної форми основного рівняння динаміки (другого закону Ньютона):

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \tag{131}$$

Ми одержали наступне правило: *для того, щоб скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі координат у формі другого закону Ньютона, необхідно до діючих на точку активних сил і реакцій в'язей додати переносну та коріолісову сили інерції.*

У неінерціальній системі координат сили інерції проявляють себе як звичайні сили, з якими ми маємо справу в інерціальній системі відліку. Переносна й коріолісова сили інерції викликають відносне прискорення, вони можуть деформувати тіло й навіть руйнувати його, вони виконують роботу тощо. Разом з тим необхідно пам'ятати, що, на відміну від звичайних сил, наприклад сили тяжіння, величина й напрямок яких залежать тільки від характеру взаємодії тіл і не залежать від вибору неінерціальної системи відліку, переносна й коріолісова сили інерції визначаються вибором неінерціальної системи координат.

Крім того, ми не можемо вказати усередині Сонячної системи, з якою пов'язана геліоцентрична інерціальна система, тіла, у результаті взаємодії з якими виникають сили інерції.

У загальній теорії відносності відповідно до принципу еквівалентності, висунутому А. Ейнштейном, природа сил тяжіння й масових сил інерції у відносному русі тотожна.

Зупинімося на способах визначення сил інерції й нагадаємо правила обчислення відповідних прискорень.

Для того, щоб знайти переносне прискорення, необхідно знати рух рухомої системи координат. Формула для визначення переносного прискорення має вигляд (див. лекцію 7)

$$\vec{w}_e = \vec{w}_O + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}). \tag{132}$$

Тут $\vec{\omega}_e$, $\vec{\varepsilon}_e$ – кутова швидкість і кутове прискорення рухомої системи координат, $\vec{w}_O$ – прискорення її початку, $\vec{\rho}$ – радіус-вектор точки в рухомій системі координат (див. рис. 15).

У всіх випадках обчислення переносного прискорення й переносної сили інерції корисно представляти переносне прискорення як абсолютне прискорення точки, закріпленої в рухомій системі координат.

Для визначення коріолісового прискорення щоразу необхідно перемножувати два вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{v}_r$, оскільки
$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r.$$

При складанні рівнянь руху матеріальної точки відносно систем відліку, що поступально рухаються, варто мати на увазі, що коріолісові сили інерції відсутні ($\vec{\omega}_e = 0$); а переносні сили інерції не залежать від положення, яке займає точка в рухомій системі відліку.

6.2 Частинні випадки відносного руху

6.2.1 Відносний рух за інерцією

Відносний рух за інерцією відбувається, коли точка рухається відносно рухомої системи рівномірно і прямолінійно, тобто коли відносне прискорення $w_r = 0$. Рівняння відносного руху (131) набуває вигляду умови для сил:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c = 0. \tag{133}$$

6.2.2 Відносна рівновага

У цьому випадку точка буде нерухома відносно рухомої системи відліку, відносна швидкість і відносне прискорення точки дорівнюють нулю ($v_r = 0$, $w_r = 0$), отже, і коріолісова сила інерції обертається в нуль (оскільки $v_r = 0$). Рівняння відносного спокою має вигляд

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e = 0. \tag{134}$$

Тут варто відмітити, що якщо виконується умова рівноваги (134), то звідси зовсім не випливає, що після надання матеріальній точці початкової швидкості вона буде рухатися рівномірно й прямолінійно (тобто здійснювати відносний рух за інерцією, розглянутий вище), як це має місце в інерціальних системах. Справа в тому, що при наданні точці відносної швидкості, *по-перше*, з'являється коріолісове прискорення $\vec{\Phi}_c = -2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r) \neq 0$ і, *по-друге*, може змінитися переносне прискорення (воно залежить від положення точки в рухомій системі відліку) і, отже, зміниться переносна сила інерції.

6.2.3 Рух в інерціальних системах відліку

З рівняння (131) можна вивести ще один наслідок. Знайдемо такі системи координат, в яких виконується перший закон Ньютона. Для цього досить вимагати, щоб при відсутності сил точка рухалася рівномірно й прямолінійно. З (131) випливає, що

$$\vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c = 0. \tag{135}$$

Звідси зрозуміло, що умова (135) буде виконуватися, якщо переносна сила інерції в будь-якій точці дорівнює нулю:
$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{w}_e = 0.$$

Дійсно, у цьому випадку рухома система відліку повинна рухатися поступально рівномірно й прямолінійно, але тоді її кутова швидкість дорівнює нулю і коріолісова сила інерції також обертається в нуль. Рівняння (135) виконується.

Інакше кажучи, *для того, щоб рухома система координат була інерціальною, досить, щоб її початок рухався зі сталою швидкістю, а кутова швидкість системи увесь час дорівнювала нулю:* $\vec{w}_O = 0$, $\vec{\omega}_e = 0$.

У цьому випадку завжди дорівнюють нулю обидві сили інерції й основне рівняння (131) набуває вигляду

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{N}.$$

Отже, у цьому випадку справджується і другий закон Ньютона.

Таким чином, *якщо існує хоча б одна система відліку, у якій виконуються закони Ньютона, то існує нескінчена множина таких систем. Всі вони рухаються одна відносно іншої поступально рівномірно й прямолінійно.* Такі системи, згідно принципу відносності Галілея-Ньютона, називаються інерціальними, а рівняння руху в них – однакові.

6.3 Рух точки відносно Землі

Земля не є інерціальною системою відліку, оскільки відносно зірок вона здійснює обертання навколо своєї осі і рухається непрямолінійно навколо Сонця. Однак останній рух для проміжків часу, набагато менших одного року, мало відрізняється від рівномірного і прямолінійного. Тому ми розглянемо лише вплив добового обертання Землі навколо своєї осі на рух тіл, що знаходяться поблизу земної поверхні. Це порівняно повільне обертання відбувається (відносно зірок) зі швидкістю 1 оберт за 23 години 56 хвилин 4 секунди, тобто з кутовою швидкістю

$$\omega_e = \frac{2\pi}{86\,164} \approx 7 \cdot 10^{-5}\,c^{-1}.$$

Розглянемо різні випадки руху точки поблизу поверхні Землі.

6.3.1 Розмивання берегів річок

Помічено, що в північній півкулі праві береги річок обривисті, а ліві пологі. Це явище може бути пояснено за допомогою так званого *правила Бера*, зміст якого в наступному.

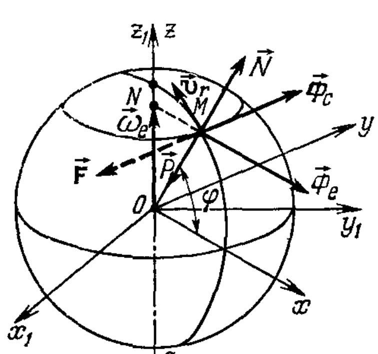

Рис. 16

На деякий об'єм води, розташований між двома перерізами річки, що тече з півдня на північ (рис. 16), діють три сили: сила тяжіння $\vec{P}$, реакція дна $\vec{N}$, реакція берега $\vec{F}$. Для запису рівняння динаміки в неінерціальній геоцентрической системі координат, яка рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω_e (один оборот в добу), необхідно ввести в рівняння переносну і коріолісову сили інерції. Тоді згідно (131) отримаємо рівняння руху

$$m\vec{w}_r = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \qquad (136)$$

Переносне прискорення напрямлено до осі обертання Землі. Отже, переносна сила інерції напрямлена в протилежний бік. Коріолісове прискорення знаходиться за правилом векторного добутку $2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ і тому напрямлено по паралелі на захід. Коріолісова сила інерції напрямлена в протилежний бік – на схід.

Якщо спроектувати (136) на напрямлену на захід дотичну до паралелі, то отримаємо

$$F - \Phi_c = 0. \tag{137}$$

Тут ми скористалися тим, що відносне прискорення розташоване в площині меридіана. Воно напрямлене при рівномірній течії ($v_r = \text{const}$) до центру Землі.

З (137) отримаємо (див. рис. 16)

$$F = 2m\omega_e v_r \sin\varphi, \tag{138}$$

де φ – геоцентрична широта місця (кут між радіусом і екваторіальною площиною).

Отже, реакція берега спрямована вліво, якщо дивитися за течією річки. Значить, сила тиску води на берег за третім законом Ньютона повинна бути напрямлена протилежно, тобто вона діє на правий берег річки.

Зауважимо, що це правило справедливо для всіх річок, що течуть у північній півкулі. Це пояснюється тим, що в північній півкулі при будь-якому русі точки по поверхні Землі горизонтальна складова коріолісового прискорення завжди напрямлена вліво від відносної швидкості.

У південній півкулі розмиваються ліві береги річок.

6.3.2 Відхилення падаючих тіл до Сходу

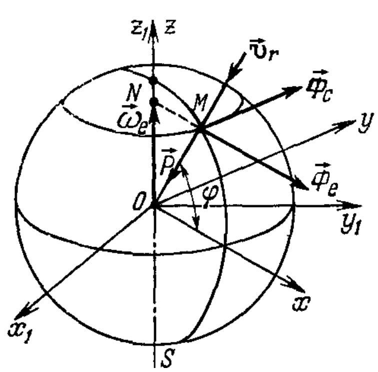

Рис. 17

Розглянемо матеріальну точку M, яка вільно падає на земну поверхню з невеликою (у порівнянні з радіусом Землі) висоти. Діючу на точку силу тяжіння P будемо вважати сталою, а опором повітря знехтуємо. Сили інерції матимуть тут такі ж напрямки, як і в попередньому випадку: переносна сила інерції напрямлена в протилежний бік від осі обертання Землі, коріолісова сила інерції напрямлена по паралелі на схід (див. рис. 17) і рівна $\Phi_c = 2m\omega_e v_r \sin\varphi$.

Якщо знехтувати впливом переносної сили інерції, яка дає вклад у відхилення траєкторії від напрямку на центр Землі порядку ω_e^2 (нагадуємо, що, як було показано вище, $\omega_e \approx 7 \cdot 10^{-5}\,c^{-1}$), у порівнянні з коріолісовою силою інерції, яка дає вклад $\sim \omega_e$, то розрахунки показують, що, наприклад, на широті $\varphi = 45°$ при падінні з висоти 100 м відхилення складе всього 1.4 см. Зі збільшенням висоти h відхилення росте пропорційно $h^{3/2}$ [2].

Література

[1] Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Д. Курс теоретической механики: в 2 Т. – М.: Наука, 1998. – 736 с.

[2] Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972, Т. 1. – 362 с., Т. 2. – 412 с.

[3] Кільчевський М.О. Курс теоретичної механіки, Т. 1. – К.: Вища школа, 1972. – 376 с.; Т. 2. – М.: Наука, 1977. – 544 с.

[4] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механіки, Т. 1. – М.: Наука, 1982. – 352 с.; Т. 2. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

[5] Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.

[6] Рейтій О.К. Теоретична механіка (методичний посібник з лабораторних робіт). Частина II. Динаміка матеріальної точки. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла”, 2006. – 76 с.