УДК 519.86
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).16-29

В. М. Петечук[1], Ю. В. Петечук[2]

[1] Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти, Ужгород,
доцент кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій, доцент,
кандидат фізико-математичних наук
vasil.petechuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5663-8789

[2] Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II, Берегово,
ддоцент кафедри математики та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук
yuliia.petechuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3670-9671

ЗОБРАЖЕННЯ ФОРМАЛЬНИМИ МАТРИЦЯМИ ЕЛЕМЕНТІВ МАТРИЧНИХ ГРУП НАД АСОЦІАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

В роботі обґрунтовується зображення формальними матрицями деяких елементів лінійних груп над асоціативними кільцями шляхом використання властивостей лишкових і нерухомих модулів. Показано вигляд образів елементів лінійних груп відносно їх гомоморфізмів у групу автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями з 1, в яких елементи 2 або 3 є оборотними.

За допомогою даного підходу авторами були описані гомоморфізми з умовою (*) матричних груп над асоціативними кільцями з 1. Зокрема, ізоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями є гомоморфізмами з умовою (*).

Ключові слова: нерухомі та лишкові модулі, розклад модулів, ідемпотенти, формальні матриці, трансвекції, комутатори, гомоморфізми лінійних груп над кільцями.

1. Вступ. Використання зображень елементів лінійних груп формальними матрицями до опису гомоморфізмів матричних груп вперше було застосовано одним з авторів в [1].

Зображення автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями формальними матрицями у загальному випадку є теоретично відомим і описаним у класичній літературі, зокрема, в [2].

У даній статті обґрунтовується зображення формальними матрицями деяких елементів лінійних груп над асоціативними кільцями шляхом використання властивостей лишкових і нерухомих модулів. Показано вигляд образів елементів лінійних груп відносно їх гомоморфізмів у групу автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями з 1, в яких елементи 2 або 3 є оборотними, а також поглиблюються і розширюються окремі твердження [3 – 4].

За допомогою даного підходу авторами були описані гомоморфізми з умовою (*) матричних груп над асоціативними кільцями [3 – 4]. Як відомо, ізоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями є гомоморфізмами з умовою (*) і були описані в [5].

Можливості опису гомоморфізмів шляхом використання зображення елементів формальними матрицями далеко не вичерпані. Тому розвиток техніки, яка дозволяє вивчати гомоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями є актуальним.

Інші підходи до вивчення матричних груп можна знайти в [6 – 8].

2. Нерухомі та лишкові модулі. Нехай V – довільний R-модуль над асоціативним кільцем R з 1, σ –довільний ендоморфізм модуля V.

Нерухомими та лишковими підмодулями модуля V ендоморфізма $\sigma : V \to V$ будемо називати підмодулі $R(\sigma) = (\sigma - 1)\,V$ *і* $P(\sigma) = \ker(\sigma - 1)$ відповідно.

Тоді

$$R(\sigma) = \{(\sigma - 1)\,v \mid v \in V\} \;\; i \; P(\sigma) = \{v \in V \mid \sigma v = v\},$$

а також $R(1 - \sigma) = \sigma V$ і $P(1 - \sigma) = \ker \sigma$.

Якщо σ – автоморфізм модуля V, то із рівності $\sigma^{-1} - 1 = (\sigma - 1)(-\sigma^{-1})$ випливає, що

$$R\left(\sigma^{-1}\right) = R(\sigma) \;\; i \; P\left(\sigma^{-1}\right) = P(\sigma).$$

Якщо W – підмодуль модуля V, то

$$\sigma W = (\sigma - 1 + 1)\,W \subseteq R(\sigma) + W, \;\; \sigma^{-1} W \subseteq R\left(\sigma^{-1}\right) + W = R(\sigma) + W.$$

Зокрема, якщо $R(\sigma) \subseteq W$, то $\sigma^{\pm 1} W \subseteq W$ і, як наслідок, $\sigma W = W$.

Якщо g – довільний ендоморфізм модуля V такий, що має місце один з випадків $g\sigma = \sigma^{\pm 1} g$, то відповідно $g(\sigma - 1) = (\sigma^{\pm 1} - 1)\,g$ і $(\sigma - 1)\,g = g(\sigma^{\pm 1} - 1)$. Тому

$$gR(\sigma) \subseteq R\left(\sigma^{\pm 1}\right) = R(\sigma) \;\; i \;\; gP(\sigma) \subseteq P\left(\sigma^{\pm 1}\right) = P(\sigma).$$

Зокрема, якщо g – автоморфізм модуля V такий, що $g\sigma g^{-1} = \sigma^{\pm 1}$, то

$$gR(\sigma) = R(\sigma) \;\; i \; gP(\sigma) = P(\sigma).$$

Цей же результат слідує також із загальних формул

$$gR(\sigma) = R\left(g\sigma g^{-1}\right) \;\; i \; gP(\sigma) = P\left(g\sigma g^{-1}\right),$$

які із-за рівності $g\sigma g^{-1} - 1 = g(\sigma - 1)\,g^{-1}$ вірні для будь-якого ендоморфізма σ і будь-якого автоморфізма g модуля V.

Мають місце включення

$$R(\sigma_1\sigma_2) \subseteq R(\sigma_1) + R(\sigma_2), \;\; P(\sigma_1\sigma_2) \supseteq P(\sigma_1) \cap P(\sigma_2),$$

які випливають із рівностей $\sigma_1\sigma_2 - 1 = (\sigma_1 - 1)\,\sigma_2 + \sigma_2 - 1 = \sigma_1(\sigma_2 - 1) + \sigma_1 - 1$.

Очевидно, що σ_1 і σ_2 комутують тоді і тільки тоді, коли комутують $\sigma_1 - 1$ і $\sigma_2 - 1$. Більше того, $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) = (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1) = 0$ тоді і тільки тоді, коли має місце система

$$\begin{cases} R(\sigma_1) \subseteq P(\sigma_2), \\ R(\sigma_2) \subseteq P(\sigma_1). \end{cases}$$

Зрозуміло, що із даної системи включень випливає комутативність σ_1 і σ_2. Навпаки не завжди вірно.

Виявляється, що нерухомі і лишкові підмодулі елементів скінченного порядку, який є оборотним в кільці, співпадають з пірсовим розкладом ідемпотентів, які вони визначають.

Лема 1. *Нехай R – асоціативне кільце з 1, V – лівий R-модуль (не обов'язково вільний), $\sigma \in GL(V)$, $\sigma^m = 1$, $m \in R^*$, $e = (1+\sigma+\cdots+\sigma^{m-1})\,m^{-1}$. Тоді $e^2 = e$ – ідемпотент і $V = R(\sigma) \oplus P(\sigma)$, де*

$$P(\sigma) = \{v \in V \,|(\sigma-1)\,v = 0\} = eV \;\; i$$
$$R(\sigma) = \left\{v \in V \,\middle|\left(1+\sigma+\cdots+\sigma^{m-1}\right) v = 0\right\} = (1-e)\,V.$$

Доведення. Оскільки $e\sigma^i = \sigma^i e = e$ для всіх $i \geq 0$, то $e^2 = e\,(1+\sigma+\cdots+\sigma^{m-1})\,m^{-1} = e$ – ідемпотент і має місце пірсовий розклад

$$V = eV \oplus (1-e)\,V, \;\; \text{де}\; v = ev + (1-e)\,v, \;\; v \in V.$$

З цього розкладу випливає, що

$$eV = \{v \in V \,|(1-e)\,v = 0\} = \ker(1-e) \;\; i \;\; (1-e)\,V = \{v \in V \,|ev = 0\} = \ker e.$$

Оскільки $e\,(1-\sigma) = (1-\sigma)\,e = 0$ і $1-e = (1-\sigma)\,t$, де $t \in EndV$ і $\sigma t = t\sigma$, то

$$eV \subseteq P(\sigma) \subseteq \ker(1-e) \subseteq eV \quad i \quad (1-e)\,V \subseteq R(\sigma) \subseteq \ker e \subseteq (1-e)\,V.$$

Тим самим доведено, що

$$P(\sigma) = eV = \ker(1-e) = \{v \in V \,|(\sigma-1)\,v = 0\},$$
$$R(\sigma) = (1-e)\,V = \ker e = \left\{v \in V \,\middle|\left(1+\sigma+\cdots+\sigma^{m-1}\right) v = 0\right\}.$$

Лема 2. *Нехай K – асоціативне кільце з 1, $m \in K^*$, $a, b \in EndV$, $a^m = b^m = 1$, $ab = ba$. Тоді*

$$P(a) \cap P(ab) = P(a) \cap P(b) = P(b) \cap P(ab)\,, P(a) \cap R(ab) = P(a) \cap R(b)\,,$$
$$P(b) \cap R(ab) = P(b) \cap R(a)\,, R(a) \cap P(ab) \subseteq R(a) \cap R(b)\,,$$
$$R(b) \cap P(ab) \subseteq R(b) \cap R(a)\,.$$

Зокрема, якщо $m = 2 \in K^*$, то $R(a) \cap R(b) = R(a) \cap P(ab) = R(b) \cap P(ab)$. Якщо $m = 3 \in K^*$, то $b = a$ на $R(a) \cap R(b) \cap R(ab)$ і $b = a^2$ на $R(a) \cap R(b) \cap P(ab)$.

Доведення. З властивостей нерухомих і лишкових підмодулів елементів скінченного порядку випливають рівності

$$\begin{cases} P(a) \cap P(ab) = P(a) \cap P(b) \\ P(b) \cap P(ab) = P(a) \cap P(b) \end{cases}, \quad \begin{cases} P(a) \cap R(ab) = P(a) \cap R(b) \\ P(b) \cap R(ab) = P(b) \cap R(a) \end{cases}.$$

Нехай $v \in P(ab)$. Тоді $abv = v$ і $av = b^{-1}v$, $bv = a^{-1}v$. За індукцією $a^l v = b^{-l}v$, $b^l v = a^{-l}v$ для всіх $l \geq 0$. Тому $R(a) \cap P(ab) \subseteq R(a) \cap R(b)$, $R(b) \cap P(ab) \subseteq R(b) \cap R(a)$.

Якщо $m = 2 \in K^*$, то включення леми перетворюються в рівності. Адже, в цьому випадку

$$R(a) \cap R(b) = \{v \in V \,|av = -v, bv = -v\} \subseteq \{v \in V \,|abv = v\} \subseteq P(ab)\,.$$

Тому $R(a) \cap R(b) = R(a) \cap P(ab) = R(b) \cap P(ab)$. Зокрема,

$$R(a) \cap R(b) \cap R(ab) = 0, R(a) \cap R(b) \cap P(ab) = R(a) \cap R(b).$$

У випадку $m = 3 \in K^*$ виявляється, що $bv = av$, якщо $v \in R(a) \cap R(b) \cap R(ab)$ і $bv = a^2 v$, якщо $v \in R(a) \cap R(b) \cap P(ab)$.

Дійсно, якщо $v \in R(a) \cap R(b) \cap R(ab)$, то

$$\left(a^2 + a + 1\right) v = (b^2 + b + 1)v = \left((ab)^2 + ab + 1\right) v = 0.$$

В такому разі

$$\left(a^2 + ab + a\right)(a - b) v = a(a + b + 1)(a - b) v = a\left(a^2 - b^2 + a - b\right) v = 0.$$

З отриманих рівностей випливає, що $(ab - 1)(a - b) v = 0$. Оскільки $0 = \left((ab)^2 + ab + 1\right)(a - b) v = 3(a - b) v$, то $bv = av$. Якщо $v \in R(a) \cap R(b) \cap P(ab)$, то $abv = v$ і $bv = a^2 v$.

3. Зображення ендоморфізмів формальними матрицями (загальний випадок). Нехай $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ – розклад лівого R-модуля V в пряму суму своїх підмодулів $V_1, \ldots, V_n$. Це означає, що будь-який елемент $v \in V$ однозначно зображається у вигляді суми $v = v_1 + \ldots + v_n$, де $v_i \in V_i$. Із однозначності розкладу модуля V випливає, що існує відображення e_i модуля V на модуль V_i, яке кожному елементу v модуля Vставить у відповідність його i-ту компоненту розкладу v_i. Отже, $v_i = e_i v$. Насправді e_i – ендоморфізм модуля V, який називають проектором модуля V на підмодуль V_i.

Адже, якщо $v = v_1 + \ldots + v_n$ і $v' = v'_1 + \ldots + v'_n$ – довільні елементи модуля V, а $r \in R$, то $v + v' = v_1 + v'_1 + \ldots + v_n + v'_n$, $rv = rv_1 + \ldots + rv_n$.

Тому мають місце рівності

$$e_i(v + v') = v_i + v'_i = e_i v + e_i v', e_i(rv) = rv_i = r(e_i v).$$

Більше того, $e_i v_j = \delta_{ij} v_i$, $e_i e_j v = e_i v_j = \delta_{ij} v_j = \delta_{ij} e_j v$.

Накінець, $(e_1 + \ldots + e_n) v = v$ для всіх $v \in V$.

Таким чином виконуються співвідношення

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_j, 1 = e_1 + \ldots + e_n,$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Тим самим доведено, що елементи $e_1, \ldots, e_n$ утворюють повну систему ідемпотентів кільця $EndV$. В такому разі виникає розклад

$$EndV = \bigoplus_{i,j} e_i EndV e_j.$$

Цей розклад називається пірсовим розкладом кільця $EndV$. Компоненти пірсового розкладу взагалі-то уже не є ні правими, ні лівими ідеалами. Але цей розклад дає зручну інтерпретацію кільця ендоморфізмв $EndV$ модуля V у вигляді формальних матриць. Дійсно, нехай σ – довільний елемент $EndV$. Позначимо через $A_\sigma = (\sigma_{ij})$ формальну матрицю, де $\sigma_{ij} = e_i \sigma e_j$ – гомоморфізми $V_j \to V_i$.

Якщо σ і σ' – довільні елементи кільця $EndV$, то

$$A_{\sigma+\sigma'} = (e_i\,(\sigma+\sigma')\,e_j) = A_\sigma + A_{\sigma'},$$

$$A_{\sigma\sigma'} = (e_i\,(\sigma\sigma')\,e_j) = (e_i\sigma 1\cdot 1\sigma' e_j) = (\sum_k e_i\sigma e_k\cdot e_k\sigma' e_j) = A_\sigma A_{\sigma'}.$$

Якщо $V = V_1\oplus\cdots\oplus V_n$, $e_i : V\to V_i$, то $1 = e_1+\cdots+e_n$, $e_ie_j = \delta_{ij}e_j$ і відображення $\sigma\to A_\sigma$ є кільцевим гомоморфізмом кільця $EndV$ у кільце формальних $n\times n$ матриць із елементами $\sigma_{ij} = e_i\sigma e_j$.

Дію ендоморфізма $\sigma : V\to V$ на підмодулях $V_1,\ldots,V_n$ можна визначити матрицею (a_{ij}) де a_{ij} – гомоморфізми $V_j\to V_i$ за правилом:

$$\sigma v_i = \sum_k a_{ki}\,(v_i), v_i\epsilon V_i, a_{ki}\in Hom(V_i,V_k).$$

Тоді $\sigma_{ij}v_j = e_i\sigma e_jv_j = e_i\sigma v_j = e_i(\sum_k a_{kj}(v_j)) = a_{ij}(v_j),\ \ \sigma_{ij} = a_{ij}$.

Це означає, що A_σ є формальною матрицею елемента σ на підмодулях $V_1,\ldots,V_n$. Матриця A_σ будується аналогічно до того, як будуються матриці ендоморфізмів у фіксованій базі шляхом запису у стовпці коефіцієнтів розкладу образів елементів бази відносно ендоморфізма σ. Таким чином, можна вважати, що підмодулі $V_1,\ldots,V_n$ виконують роль своєрідних базисних елементів, а елементами формальної матриці A_σ є гомоморфізми між ними.

Зокрема, якщо $V_1,\ldots,V_n$ вільні одномірні підмодулі, то елементи формальної матриці A_σ ототожнюються з елементами кільця R. У цьому випадку формальні матриці є звичайними матрицями над кільцем R.

Якщо $V_1=\cdots=V_n=V_0$, то $EndV\equiv(EndV_0)_n$, $GL(V)\equiv GL(n,EndV_0)$.

Це означає, що кільце $EndV$ можна ототожнювати з кільцем $n\times n$ матриць, а $GL(V)$ з повною лінійною (матричною) групою над кільцем $EndV_0$ шляхом ототожнення σ з A_σ. При цьому тотожні гомоморфізми зручно позначати 1, а нульові 0.

Якщо модулі $V_1,\ldots,V_n$ R-ізоморфні з деяким лівим $R-$модулем L і

$$g : V_1\oplus\cdots\oplus V_n\to L\oplus\cdots\oplus L(n\ \text{раз})$$

відповідний ізоморфізм, то має місце внутрішній ізоморфізм

$$i_g : EndV\to M(n,EndL)\ \textit{за правилом}\ i_g:\sigma\to g\sigma g^{-1},$$

який дає можливість кільце ендоморфізмів $EndV$ модуля V ототожнювати з кільцем квадратних $n\times n$ матриць $M(n,EndL)\equiv(EndL)_n$, а групу $GL(V)$ з групою $GL(n,EndL)$ над кільцем ендоморфізмів $EndL$.

Зокрема, якщо $V = L\oplus\sigma L$, де $\sigma\in GL(V)$, то ізоморфізми

$$g : L\oplus\sigma L\to L\oplus L\ \ i\ g^{-1} : L\oplus L\to L\oplus\sigma L$$

задаються за правилом: $g\,(l_1+\sigma l_2) = l_1+l_2$ (витирання σ), $g^{-1}\,(l_1+l_2) = l_1+\sigma l_2$ (дописування σ), де l_1, l_2 елементи L. Тому $i_g : GL(V)\to GL(L\oplus L)$,

$$i_g\sigma l_1 = g\sigma g^{-1}\,(l_1+0) = g\sigma\,(l_1+0) = g\,(\sigma l_1+0) = g\,(0+\sigma l_1) = 0\cdot l_1+1\cdot l_1.$$

Це означає, що $i_g\sigma = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$.

Нехай e_{ij} – стандартна матрична одиниця у якої на місці (i,j) знаходиться 1, а на решті місць знаходяться нулі. Матриці $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, де $0 \neq r \in R$ будемо називати елементарними трансвекціями,

$$t_{ij} = t_{ij}(-1)\,t_{ji}(1)\,t_{ij}(-1) = t_{ji}(1)t_{ij}(-1)t_{ji}(1).$$

У довільній групі G елемент $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ будемо називати комутатором елементів g_1, g_2, а елемент $[g_1, \ldots, g_t] = [[g_1, \ldots, g_{t-1}], g_t]$ – комутатором довжини t елементів $g_1, \ldots, g_t$ групи G, де $t > 2$.

Мають місце матричні комутаторні формули

$$[t_{ik}(r_1), t_{lj}(r_2)] = t_{ij}(\delta_{kl} r_1 r_2),$$

де $1 \leq k \neq i, i \neq j, l \neq j \leq n$ – довільні числа, δ_{kl} – символ Кронекера, r_1, r_2 – довільні елементи кільця R. Зокрема, $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$, *де* $1 \leq i, j, k \leq n$ – попарно різні довільні числа, $r \in R$.

4. Зображення ендоморфізмів формальними матрицями (випадок, коли 2 – оборотний елемент). Нехай K – асоціативне кільце з 1, W – лівий K-модуль, $EndW$ – кільце ендоморфізмів модуля W, $GL(W) = EndW^*$– група автоморфізмом модуля W.

Скористаємося розкладом модуля W у суму підмодулів, які породжені нерухомими і лишковими підмодулями.

Лема 3. *Нехай K – асоціативне кільце з 1, $2 \in K^*$, W – лівий K – модуль, a, b, c, d – елементи групи $GL(W)$ такі, що $a^2 = b^2 = 1$, $ab = ba$, $ca = ac$, $cbc^{-1} = ab$, $db = bd$, $dad^{-1} = ab$, $a \neq 1$. Тоді існують ліві K – модулі L і P та ізоморфізм модулів $g : W \to W_g$, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$, який індукує ізоморфізм $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ такий, що елементи $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$, $\Lambda_g c$, $\Lambda_g d$ можна зобразити формальними матрицями*

$$\Lambda_g a = diag(-1,-1,1,1), \Lambda_g b = diag(1,-1,-1,1),\ \Lambda_g c = diag(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma),$$

$$\Lambda_g d = diag(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1)$$

де $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in EndL, \gamma, \gamma_1 \in EndP$.

Доведення. За умовою $R(a) \neq 0$, $bR(a) = R(a)$, $bP(a) = P(a)$. Тому має місце розклад

$$W = R(a) \oplus P(a) = R(a) \cap R(b) \oplus R(a) \cap P(b) \oplus P(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b).$$

Позначимо $L = R(a) \cap P(b), P = P(a) \cap P(b)$. Тоді $cL = R(a) \cap P(ab) = R(a) \cap R(b)$ і $dcL = R(ab) \cap R(b) = P(a) \cap R(b)$.

Оскільки $R(a) = L \oplus cL \neq 0$, то $L \neq 0$ і $W = L \oplus cL \oplus dcL \oplus P$, де $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$. Розглянемо ізоморфізм модулів $g : W \to W_g$, який визначений за правилом $g(l_1 + cl_2 + dcl_3 + p) = l_1 + l_2 + l_3 + p$, де $l_i \in L,\ 1 \leq i \leq 3,\ p \in P$

і індукований ним внутрішній ізоморфізм $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$, де $\Lambda_g\sigma = g\sigma g^{-1}$ для всіх $\sigma \in GL(W)$.

Будемо зображати елементи кільця $End(W_g)$ формальними 4×4 матрицями, записуючи дію елементів кільця $End(W_g)$ на модулі W_g у стовпчики. Зокрема отримаємо, що

$$\Lambda_g a = diag(-1,-1,1,1), \Lambda_g b = diag(1,-1,-1,1),$$

де 1 – одиниця кільця $EndL$ або кільця $EndP$ відповідно.

Адже, дія $\Lambda_g a$ на довільні елементи l_1, l_2, l_3 модуля L і довільний елемент p модуля P визначається рівностями $(\Lambda_g a)l_1 = gag^{-1}l_1 = gal_1 = g(-l_1) = -l_1$, $(\Lambda_g a)l_2 = gag^{-1}l_2 = gacl_2 = g(-cl_2) = -l_2$, $(\Lambda_g a)l_3 = gadcl_3 = gdcl_3 = l_3$, $(\Lambda_g a)p = gap = gp = p$.

Аналогічно визначається дія $\Lambda_g b$ на довільні елементи l_1, l_2, l_3 модуля L і довільний елемент p модуля P

$$(\Lambda_g b)l_1 = gbg^{-1}l_1 = gbl_1 = gl_1 = l_1, (\Lambda_g b)l_2 = gbcl_2 = g(-cl_2) = -l_2,$$

$$(\Lambda_g b)l_3 = gbg^{-1}l_3 = gbdcl_3 = g(-dcl_3) = -l_3, (\Lambda_g b)p = gbp = gp = p.$$

Окрім цього, $c^2L = cR(a) \cap R(b) = R(a) \cap R(ab) = L$, $cdcL = cdR(a) \cap R(b) = P(a) \cap R(ab) = dcL, cP = P(a) \cap P(ab) = P$, $(\Lambda_g c)l_1 = gcl_1 = l_1$. Тому

$$\Lambda_g c = diag(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma),$$

де $\alpha, \beta \in EndL, \gamma \in EndP$.

Аналогічно доводиться, що $dcL = cL, d^2L = L, dP = P, (\Lambda_g d)l_2 = gdcl_2 = l_2$,

$$\Lambda_g d = diag(\beta_1 \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1),$$

де $\alpha_1, \beta_1 \in EndL, \gamma_1 \in EndP$.

Зокрема, якщо $c^2 = a$, то $\alpha = -1, \beta^2 = 1, \gamma^2 = 1$. Якщо $c^2 = 1$, то $\alpha = 1, \beta^2 = 1, \gamma^2 = 1$.

В якості елементів a, b, c, d, які визначені у лемі 3, можна вибрати образи інволюцій і елементів четвертого порядку.

Теорема 1. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R), n \geq 3$, $W-$лівий $K-$модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W) -$ довільний неодиничний гомоморфізм групи $E(n,R)$. Тоді в групі $GL(W)$ в якості елементів a, b, c, d, які визначені у лемі 3, за умови $\Lambda t_{ij}^2 \neq 1$ можна вибрати*

$$a = \Lambda diag(-1,-1,1,\ldots,1),\ b = \Lambda diag(1,-1,-1,1,\ldots,1),$$

$$c = \Lambda diag(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1,\ldots,1),\ d = \Lambda diag(1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1,\ldots,1).$$

При цьому $c^2 = a, d^2 = b$.

Якщо $\Lambda t_{ij}^2 = 1$ для деяких, а значить і для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, то в якості елементів a, b, c, d, можуть бути вибрані елементи

$$a = \Lambda t_{12}(1), b = \Lambda t_{13}(1), c = \Lambda t_{32}(-1), d = \Lambda t_{23}(-1).$$

При цьому $c^2 = 1, d^2 = 1$.

Доведення. Нехай $\Lambda t_{ij}^2 \neq 1$. Безпосередньою перевіркою встановлюється, що елементи a, b, c, d, які задані в умові теореми, задовольняють співвідношення леми 3 $a^2 = b^2 = 1$,$ab = ba$, $ca = ac$, $cbc^{-1} = ab$, $db = bd$, $dad^{-1} = ab$, $a = \Lambda diag\,(-1, -1, 1, \ldots, 1) = \Lambda t_{12}^2 \neq 1$.

Якщо $\Lambda t_{ij}^2 = 1$, то з рівності $[t_{ij}\,(1)\,, t_{ik}^2] = t_{ij}\,(2)$ для різних чисел $1 \leq i, j, k \leq n$ випливає, що $\Lambda t_{ij}\,(2) = 1$ і елементи a, b, c, d, які задані в умові теореми, також задовольняють співвідношення леми 3 $a^2 = b^2 = 1$, $ab = ba$, $ca = ac$, $cbc^{-1} = ab$, $db = bd$, $dad^{-1} = ab$. Якщо при цьому $a = \Lambda t_{ij}\,(1) = 1$, то з рівності $[t_{ij}\,(1)\,, t_{jk}\,(r)] = t_{ik}\,(r)$ для різних чисел $1 \leq i, j, k \leq n$, $r \in R$ випливає, що $\Lambda : G \to GL\,(W) -$ одиничний гомоморфізм на групі $E(n, R)$. Це протирічить припущенню. Тому $a = \Lambda t_{ij}\,(1) \neq 1$.

Відмітимо, що якщо Λ – гомоморфізм з умовою (*), то в теоремі 1 другий випадок не має місця.

5. Зображення ендоморфізмів формальними матрицями (випадок, коли 3 – оборотний елемент). У довільному асоціативному кільці з 1 мають місце співвідношення, використання яких у матричних кільцях дозволяє зображати ендоморфмізми модулів формальними матрицями.

Лема 4. *Нехай a, b – елементи деякого асоціативного кільця K з 1, $3 \in K^*$, такі, що $b^2 = 1$, $a^2 + a + 1 = 0$, $bab^{-1} = a^2$, $e = (1 - a)\,(1 - b)3^{-1}$, $e_1 = e - ab$. Тоді $e^2 = e$, $eae = (1 - e)\,a^2\,(1 - e) = 0$ і $e^2 = e_1$, $e_1 a e_1 = (1 - e_1)\,a^2\,(1 - e_1) = 0$, $(a - b)\,e_1 = 0$.*

Доведення. За умовою мають місце рівності $b\,(1 - b) = -(1 - b)$,

$$(1 - b)^2 = 2(1 - b),$$

$$(1 - b)\,a\,(1 - b) = \left(a - a^2 b\right)(1 - b) = \left(a + a^2\right)(1 - b) = -(1 - b),$$
$$(1 - b)\,a^2\,(1 - b) = \left(a^2 - ab\right)(1 - b) = \left(a^2 + a\right)(1 - b) = -(1 - b).$$

Безпосередньою перевіркою отримуємо, що $e^2 = e$. Адже,

$$9e^2 = (3e)^2 = (1 - a)\,(1 - b)\,(1 - a)\,(1 - b) = (1 - a)\left((1 - b)^2 + 1 - b\right) = 9e.$$

Також $eae = 0$. Адже,

$$9eae = (1 - a)\,(1 - b)\,a\,(1 - a)\,(1 - b) = (1 - a)\,(1 - b)\left(a - a^2\right)(1 - b) =$$

$$= (1 - a)\,(-1 + 1) = 0.$$

Тому $ea^2e = -e^2 - eae = -e$.

З другого боку, виконуються рівності

$$ab + ba = ab + a^2 b = -b,\ a^2 b + ba^2 = a^2 b + ab = -b.$$

Неважко перевірити, що мають місце рівності

$$3\,(ea + ae) = (1 - a)\,((1 - b)\,a + a\,(1 - b)) = (1 - a)(2a + b),$$

$$3\left(ea^2 + a^2 e\right) = (1 - a)\left((1 - b)\,a^2 + a^2\,(1 - b)\right) = (1 - a)(2a^2 + b),$$
$$3\,(eab + abe) = (1 - a)\,(1 - b)\,ab + ab\,(1 - a)\,(1 - b) =$$

$$= (1 - a - b + ab)\, ab + ab\, (1 - a - b + ab) =$$

$$= ab - a^2 b - a^2 + 1 + ab - b - a + 1 = 3\,(1 + ab)\,.$$

З останньої рівності випливає, що $eab + abe = 1 + ab$.

Як і вище доводиться, що $(1 - e)\, a^2\, (1 - e) = 0$. Адже,

$$3\,(1 - e)\, a^2\, (1 - e) = 3\left(a^2 - \left(ea^2 + a^2 e\right) + ea^2 e\right) =$$

$$= 3a^2 - (1 - a)\left(2a^2 + b\right) - 3e = a^2 - b + 2 + ab - 3e =$$

$$= 1 - a - b + ab - 3e = 3e - 3e = 0.$$

Нехай $e_1 = e - ab$. З вищеотриманих рівностей слідує, що

$${e_1}^2 = (e - ab)^2 = e - (eab + abe) + abab = e - (1 + ab) + 1 = e - ab = e_1.$$

Окрім цього, має місце рівність $e_1 a e_1 = 0$. Дійсно,

$$3e_1 a e_1 = 3\,(e - ab)\, a\, (e - ab) = 3\,(ea - b)\,(e - ab) = 3\left(-ea^2 b - be + a^2\right) =$$

$$= -\,(1 - a - b + ab)\, a^2 b - b((1 - a - b + ab) + 3a^2 =$$

$$= -a^2 b + b + a - a^2 - b + a^2 b + 1 - a^2 + 3a^2 = a^2 + a + 1 = 0.$$

Аналогічно доводиться, що $(1 - e_1) a^2 (1 - e_1) = 0$, $(a - b)\, e_1 = 0$.

З леми 4 випливає, що $ae = (1 - e)\, ae$, $a^2\,(1 - e) = ea^2\,(1 - e)$, $ae_1 = (1 - e_1)\cdot$ $\cdot\, ae_1$ і $a^2\,(1 - e_1) = e_1 a^2\,(1 - e_1)\,.$

Лема 5. *Нехай K – асоціативне кільце з 1, $3 \in K^*$, W – лівий $K-$ модуль, a, b – елементи $GL(W)$ такі, що $a^3 = b^2 = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$, $a \neq 1$. Тоді існує ізоморфізм модулів $g : W \to W_g, W_g = L \oplus L \oplus P$, і ізоморфізм Λ_g такі, що елементи $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$ можна зобразити формальними матрицями*

$$\Lambda_g a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_g b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

де $\gamma \in EndP$, $\gamma^2 = 1$.

Зокрема, якщо $W = R(a)$, то

$$\Lambda_g a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_g b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Нехай $R\,(a) = (a - 1)\, W$ і $P\,(a) = ker\,(a - 1)$. Оскільки елементи a і b комутують, то підмодулі $R\,(a)$ і $P\,(a)$ є інваріантними відносно a і b. Як було зазначено вище

$$R\,(a) = \left\{v \in W \;\middle|\; \left(a^2 + a + 1\right) v = 0\right\}, P\,(a) = \{v \in W \mid av = v\}\,, W = R(a) \oplus P(a).$$

Тому $a^2 + a + 1 = 0$ на підмодулі $R\,(a)$ і $a = 1$ на підмодулі $P\,(a)$.

Нехай $e = (1 - a)(1 - b)3^{-1}$, $e_1 = e - ab$, де 1 означає одиницю групи $GL(W)$.

Підмодулі $R\,(a)$ і $P\,(a)$ є інваріантними відносно e, e_1, $eP\,(a) \subseteq (1 - a)\, P\,(a) =$ $= 0$. Згідно з лемою 4 e, e_1 – ідемпотенти на $R\,(a)$ і $e = 0$ на $P\,(a)$.

Ідемпотент e_1 кільця $EndW$ визначає розклад модуля W.

$$W = R\,(a) \oplus P\,(a) = e_1 R\,(a) \oplus (1 - e_1) R\,(a) \oplus P(a),$$

де $R\,(a) = e_1 R\,(a) \oplus (1 - e_1) R\,(a)$.

Позначимо $L = e_1 R\,(a)$, $P = P\,(a)$. Оскільки $a \neq 1$, то $R\,(a) \neq 0$. Відповідно до леми 4 $ae_1 R\,(a) \subseteq (1 - e_1) R\,(a)$ і $a^2 (1 - e_1) R\,(a) \subseteq e_1 R\,(a)$, $(1 - e_1) R\,(a) \subseteq ae_1 R\,(a)$. Отже, $(1 - e_1)\,R\,(a) = ae_1 R\,(a) = aL$.

Тим самим, доведено, що $R\,(a) = L \oplus aL,\ L \neq 0,\ W = L \oplus aL \oplus P$.

Нехай $W_g = L \oplus L \oplus P$ і $g : W \to W_g-$ ізоморфізм модулів, який визначений за правилом $g\,(l_1 + al_2 + p) = l_1 + l_2 + p$, де $l_i \in L$, $1 \leq i \leq 2$, $\ p \in P$, а $\Lambda_g : GL\,(W) \to GL\,(W_g) -$ індукований g груповий ізоморфізм.

Це означає, що елементи кільця $End\,(W_g)$ можна зобразити формальними 3×3 матрицями

$$\Lambda_g a = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_g b = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Враховуючи рівність $(1 + a + a^2)\,R\,(a) = 0$ отримаємо, що $a_1 = a_2 = -1$. З рівності $b^2 = 1$ отримаємо, що $b_1 = 1$, $b_2 = 0$.

В якості елементів a, b які визначені у лемі 5, можна вибрати образи інволюцій і елементів третього порядку.

Теорема 2. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $3 \in K^*$, $\ E\,(n, R) \subseteq G \subseteq GL\,(n, R)\,, n \geq 3$, $W-$ лівий $K-$ модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL\,(W) -$ довільний неодиничний гомоморфізм групи $E(n, R)$. Тоді в групі $GL\,(W)$ в якості елементів a, b які визначені у лемі 5, можна вибрати*

$a = \Lambda diag(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1),\ \ b = \Lambda diag(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -1, 1 \ldots, 1)$, *при* $n \geq 3$
або у випадку $n \geq 4$

$a = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right),\ \ b = \Lambda diag(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1 \ldots, 1)$,
або у випадку $n \geq 5$

$$a = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right),\ \ b = \Lambda diag(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, 1, -1, \ldots, 1).$$

Доведення. Безпосередньою перевіркою встановлюється, що мають місце співвідношення $a^3 = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1}$.

З формули $[t_{ij} t_{ij}\,(-1)\,, t_{jk}\,(1)\,, t_{ji}(r)] = t_{ik}\,(-r)$, де $1 \leq i, j, k \leq n$ попарно різні числа і $\Lambda : G \to GL\,(W) -$ неодиничний гомоморфізм групи $E(n, R)$ випливає, що має місце нерівність $a \neq 1$.

Згідно з теоремою 2 неодиничний елемент a групи $GL\,(W)$, що задовольняє рівність $a^2 + a + 1 = 0$, при існуванні елемента b, $b^2 = 1$, $bab^{-1} = a^2$, з точністю до ізоморфізма Λ_g, можна зобразити формальною матрицею $diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E\right)$.

Лема 6. *Нехай $K-$ асоціативне кільце з 1, $3 \in K^*$, $W-$ лівий $K-$ модуль, a, b – елементи $GL\,(W)$ такі, що $a, b \in GL\,(W)\,,\ a^3 = b^3 = 1,\ ab = ba$. Тоді* *існує розклад модуля W в пряму суму підмодулів, ізоморфізм модулів $g: W \to W_g, W_g = W$ і ізоморфізм Λ_g такий, що елементи $\Lambda_g a, \Lambda_g b$ можна зобразити формальними матрицями*

$$\Lambda_g a = diag\,(z, E, x, y, E)\,,\ \ \Lambda_g b = diag\left(E, z_1, x, y^2, E\right),$$

де $x^2+x+1=0, y^2+y+1=0, z^2+z+1=0, z_1^2+z_1+1=0$.

Доведення. Підмодулі $R\,(a)$, $R\,(b)$, $P\,(a)$, $P(b)$ є інваріантними відносно елементів a і b і мають місце розклади $W = R\,(a) \oplus P\,(a)$, $R\,(a) = R\,(a) \cap R\,(b) \oplus R\,(a) \cap P\,(b)\,,\ P\,(a) = P\,(a) \cap R\,(b) \oplus P\,(a) \cap P\,(b)$. Оскільки $(ab)^3 = 1,$ то також має місце розклад

$$R\,(a) \cap R\,(b) = R\,(a) \cap R\,(b) \cap R\,(ab) \oplus R\,(a) \cap R\,(b) \cap P\,(ab)\,.$$

Це означає, що має місце розклад модуля W в пряму суму підмодулів (деякі з яких можуть бути нульовими)

$$W = R\,(a) \cap P\,(b) \oplus P\,(a) \cap R\,(b) \oplus R\,(a) \cap R\,(b) \cap R\,(ab) \oplus R\,(a) \cap R\,(b) \cap$$
$$\cap P\,(ab) \oplus P\,(a) \cap P\,(b)\,.$$

Тим самим доведено, що елементи a і b мають вигляд вказаний в лемі 6.

Відмітимо, що оскільки $(x-1)\,(x+2) = -3 = (x^2-1)(x+1)$, то $x-1,\ x^2-1$ і аналогічно $y-1,\ y^2-1, z-1,\ z^2-1, z_1-1, z_1^2-1$ є оборотними на відповідних ненульових підмодулях.

Лема 7. *Нехай K – асоціативне кільце з 1, $3 \in K^*$, $W-$ лівий $K-$ модуль, a, b, c, d – елементи групи $GL\,(W)$ такі, що $a^3 = b^3 = 1, ab = ba, cac^{-1} = a^{-1}, cbc^{-1} = b^{-1}, c^2 = 1, dad^{-1} = b, d^2 = 1, dc = cd$.*

Якщо $R(a) \cap P(b) \neq 0$, то існують ліві $K-$ модулі L і P та ізоморфізм модулів $g: W \to W_g, W_g = L \oplus L \oplus L \oplus L \oplus P$, який індукує ізоморфізм групи $\Lambda_g: GL\,(W) \to GL\,(W_g)$ такий, що елементи $\Lambda_g a, \Lambda_g b, \Lambda_g c, \Lambda_g d$ можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = diag(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, 1, \alpha),\ \ \Lambda_g b = diag\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta\right),$$

$$\Lambda_g c = diag(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma), \Lambda_g d = diag(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \delta),$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in EndP,\ \alpha^2 = \beta^2 = 1,\ \gamma^2 = \delta^2 = 1,\ \alpha\beta = \beta\alpha,\ \gamma\alpha = \alpha^2\gamma, \gamma\beta = \beta^2\gamma, \delta\alpha = \beta\delta, E = diag(1,1)$, $1-$ одиниця $EndL$ або $EndP$.

Якщо $R\,(a) \cap P\,(b) = 0$, то існує ізоморфізм групи $\Lambda_g: GL\,(W) \to GL\,(W_g)$ такий, що елементи $\Lambda_g a, \Lambda_g b, \Lambda_g c$ можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = diag(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E),\ \ \Lambda_g b = diag\left(\begin{pmatrix} \alpha & -1-2\alpha \\ 1+2\alpha & -1-\alpha \end{pmatrix}, E\right),$$

$$\Lambda_g c = diag(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma),\ \ \Lambda_g d = diag\left(\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}, \delta\right),$$

де $\alpha, \beta, \gamma \in EndL,\ \alpha + \alpha^2 = 0,\ l, \delta \in EndP,\ \ l^2 = \ \delta^{\ 2} = 1, \alpha\beta = (\alpha+1)\,\gamma = 0, \beta^2 + \gamma^2 = 1, \alpha = -\gamma^2, \beta\gamma = \gamma\beta = 0$, 1 – одиниця $EndL$, E – одиниця $EndP$.

Доведення. Нехай $R(a) \cap P(b) \neq 0$. Як і в лемі 5 позначимо $e = (1-a)(1-c) \cdot 3^{-1} - ac$, $f = (1-b)(1-c)3^{-1} - bc$. Тоді $e^2 = e$, $eae = 0$, $f^2 = f$, $fbf = 0$, $ded^{-1} = f$, $dfd^{-1} = e$.

$$W = R(a) \cap P(b) \oplus R(b) \cap P(a) \oplus R(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b),$$

$$R(a) = eR(a) \oplus (1-e) R(a), \; R(b) = fR(b) \oplus (1-f) R(b).$$

Як і в лемі 5 $eR(a) = (1-e)R(a)$, $cfR(b) = (1-f)R(b)$. За умовою $dR(a) \cap P(b) = R(b) \cap P(a)$.

Позначимо $L = eR(a) \cap P(b)$, $P = R(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b)$. Тоді $R(a) \cap P(b) = L \oplus cL$, $L \neq 0$, $dL = fR(b) \cap P(a)$ $R(b) \cap P(a) = dL \oplus dcL$. Тим самим доведено, що $W = L \oplus cL \oplus dL \oplus dcL \oplus P$.

Нехай $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus L \oplus P, g : W \to W_g-$ ізоморфізм модулів, який визначений за правилом $g(l_1 + cl_2 + dl_3 + dcl_4 + p) = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + p$, де $l_i \in L$, $1 \le i \le 4$, $p \in P$, і $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)-$ індукований ним груповий гомоморфізм.

Зобразимо елементи кільця $End(W_g)$ формальними 5×5 матрицями

$$\Lambda_g a = diag(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, 1, \alpha), \; \Lambda_g b = diag\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta\right),$$

$$\Lambda_g c = diag(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma), \Lambda_g d = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A & 0 \end{pmatrix}, \delta\right),$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in EndP$ і $A \in (EndL)_2-$ формальна 2×2 матриця, яка комутує з формальними 2×2 матрицями $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $1 \in EndL$. Тому, з точністю до спряження, формальною матрицею $diag(A, 1, 1)$ можна вважати, що $A = 1$.

Якщо $R(a) \cap P(b) = 0$, то $R(b) \cap P(a) = d(R(a) \cap P(b)) = 0$. Тому $W = R(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b)$. Як наслідок,

$$W = R(a) \cap R(b) \cap R(ab) \oplus R(a) \cap R(b) \cap P(ab) \oplus P(a) \cap P(b).$$

Формули $[t_{ij} t_{ij}(-1), t_{jk}(1), t_{ji}(r)] = t_{ik}(-r)$, де $1 \le i, j, k \le n$ попарно різні числа, показують, що має місце нерівність $b \neq a^2$ і, як наслідок, виконується нерівність $R(a) \cap R(b) \cap R(ab) \neq 0$.

Зауважимо, що згідно з теоремою 2 можна вважати, що $x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Зобразимо елементи a і b формальними матрицями $a = diag(x, y, E)$, $b = diag(x, y^2, E)$, $ab = diag(x^2, E, E)$, $ab^2 = diag(E, y^2, E)$, де $x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0$.

Неважко бачити, що $R(a) = R(b)$ і $P(a) = P(b)$. За лемою 5 існує ізоморфізм групи $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ такий, що елементи $\Lambda_g a, \Lambda_g b, \Lambda_g c$ можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = diag(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E), \Lambda_g c = diag(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, l).$$

Оскільки $ab = ba$, $cbc^{-1} = b^{-1}$, $b^2 + b + 1 = 0$ на $R(b) = R(a)$, то

$$\Lambda_g b = diag\left(\begin{pmatrix} \alpha & -1-2\alpha \\ 1+2\alpha & -1-\alpha \end{pmatrix}, E\right),\ \Lambda_g d = diag\left(\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}, \delta\right),$$

де $\alpha, \beta, \gamma \in EndL,\ \alpha + \alpha^2 = 0,\ l, \delta \in EndP,\ \ l^2 = \ \delta^{\ 2} = 1,\ \alpha\beta = (\alpha+1)\gamma = 0,$ $\beta^2 + \gamma^2 = 1$, $\alpha = -\gamma^2$, $\beta\gamma = \gamma\beta = 0$, 1 – одиниця $EndL$, E – одиниця $EndP$.

Відмітимо, що якщо Λ – гомоморфізм з умовою (*), то в лемі 7 другий випадок не має місця.

В якості елементів a, b, c, d які визначені у лемі 7, можна вибрати образи інволюцій і елементів третього порядку.

Теорема 3. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $3 \in K^*$, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R), n \geq 3$, $W-$ лівий $K-$ модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W) -$ довільний неодиничний гомоморфізм групи $E(n, R)$. Тоді в якості елементів a, b, c, d які визначені у лемі 6, можна вибрати*

$a = \Lambda diag(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1),\ \ b = \Lambda diag(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -1, 1 \ldots, 1)$, *при* $n \geq 3$ *або у випадку* $n \geq 4$

$$a = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right),\ b = \Lambda diag(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1 \ldots, 1),$$

$$c = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right),\ d = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right),$$

де $E = diag(1, 1)-$ *одинична* 2×2 *матриця.*

Доведення. Безпосередньою перевіркою встановлюється, що мають місце співвідношення $a^3 = b^3 = 1, ab = ba, cac^{-1} = a^{-1}, cbc^{-1} = b^{-1}, c^2 = 1, dad^{-1} = b, d^2 = 1, dc = cd$. Тому до перерахованих в теоремі 3 елементів можна застосовувати лему 7.

6. Висновки. У даній статті знайдено вигляд образів деяких елементів матричних груп над асоціативними кільцями відносно неодиничних гомоморфізмів у групу автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями в яких елементи 2 або 3 є оборотними елементами шляхом зображення їх формальними матрицями.

7. Перспективи подальших досліджень. Знаходження умов, подібних до умови (*) при яких гомоморфізми матричних груп над кільцями допускають стандартний опис.

Список використаної літератури

1. Петечук В. М. Гомоморфизмы линейных групп над кольцами. *Матем. заметки.* 1989. Т.45, вып 2. С. 83–94. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01158061
2. Дрозд Ю. А., Кириченко В. В. Конечномерные алгебры. Киев: Вища школа, 1980. 192 с.
3. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть I. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2014. Вип. 25, №2. С. 152–171.
4. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть II. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2015. Вип. № 1(26). С. 99–114.
5. Golubchik I. Z. Isomorphism of the General Linear Group $GL_n(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics.* 1992. Vol. 131. Part 1. P. 123–136.

6. Hahn A. J. , O'Meara O. T. The Classical Groups and K-Theory. Berlin: Springer, 1989. 578 p.
7. Vavilov N. A., Stepanov A. V. Linear groups over general rings. I. Generalities. *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 188. 2013. P 490 – 550. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-013-1146-7
8. Bovdi V. A., Rudko V. P. Extensions of the representation modules of a prime order group. *J. Algebra*, Vol. 295. 2006. P. 441 – 451. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.07.005

Petechuk V. M., Petechuk Y. V. Images of formal matrices of elements of matrix groups over associative rings.

The paper substantiates the image by formal matrices of some elements of linear groups over associative rings by using the properties of redundant and fixed modules. The form of images of elements of linear groups with respect to their homomorphisms in the group of automorphisms of modules over associative rings of 1, in which there are reversible elements 2 or 3, is shown.

Using this approach, the authors described homomorphisms with the condition (*) of matrix groups over associative rings with 1. In particular, the isomorphisms of matrix groups over associative rings are homomorphisms with condition (*).

Keywords: residual and fixed modules, decomposition modules, idempotents, formal matrices, transvections, commutators, homomorphisms of linear groups over rings.

References

1. Petechuk, V. M. (1989). Homomorphisms of linear groups over rings. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR 45, 144–151. https://doi.org/10.1007/BF01158061 [in Russian].
2. Drozd, Yu. A. & Kyrychenko, V. V. (1980). Konechnomernye alhebry [Finite-Dimensional Algebras]. Kiev: Vyshcha shkola [in Russian].
3. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2014). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part I. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 2 (25)*, 152–171 [in Russian].
4. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2015). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part II. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 1 (26)*, 99–114 [in Russian].
5. Golubchik, I. Z. (1992). Isomorphism of the General Linear Group $GL_n(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics, 131(1)* , P. 123–136.
6. Hahn, A. J., & O'Meara, O. T. (1989). The Classical Groups and K-Theory. Berlin : Springer.
7. Vavilov, N. A. & Stepanov A. V. (2013). Linear groups over general rings. I. Generalities. *Journal of Mathematical Sciences, 188*, 490–550. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1146-7
8. Bovdi, V. A. & Rudko V. P. (2006). Extensions of the representation modules of a prime order group. *J. Algebra, 295*, 441–451. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.07.005

Одержано 08.04.2020