УДК 519.217; 519.718; 519.837
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).41-54

**В. К. Ясинський[1], С. В. Антонюк[2]**

[1] Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
професор,
доктор фізико-математичних наук
yasinsk@list.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5434-6427

[2] Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики,
кандидат фізико-математичних наук
violant78@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5357-8987

# ІСНУВАННЯ $L$-ГО МОМЕНТУ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІТО-СКОРОХОДА ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ З ЗОВНІШНІМИ ЗБУРЕННЯМИ ТА НЕСКІНЧЕННОЮ ПІСЛЯДІЄЮ

В статті дано означення сильного розв'язку стохастичної динамічної системи Іто-Скорохода випадкової структури з зовнішніми збуреннями і всією передісторією, доведені основні нерівності, використання яких необхідне для встановлення умов існування і єдиності розв'язку. Доведена глобальна теорема існування та єдиності розв'язку таких динамічних систем.

**Ключові слова:** інтеграл за вінеровим процесом, інтеграл за пуассоновою мірою, стохастичні динамічні системи Іто-Скорокода, стохастична динамічна система випадкової структури, марковські перемикання.

## 1. Постановка задачі.

Нехай $R^n$ – $n$-вимірний дійсний евклідовий простір і $1 \le p < \infty$. $X$ є простором історії, тобто простір $R^n \times D^p_\rho$, де $D^p_\rho$ – простір Скорохода локально обмежених неперервних справа, що мають лівосторонні границі, функцій $\varphi : R^+ \to R^n$ таких, що

$$\|\varphi\|^p_\rho \equiv \int\limits_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds < \infty.$$

Норма в просторі $X$ вводиться наступним чином

$$\|\varphi\|_X \equiv \Big( |\varphi(0)|^p + \|\varphi\|^p_\rho \Big)^{1/p}, \ \ \|\varphi\|^p_\rho < \infty, \ 1 \le p < \infty.$$

**Означення 1.** *Функція $\rho : R^+ \to R^+$ називаєтья функцією із згладжуючою властивістю, якщо вона задовольняє таким умовам [2]:*

*1. $\rho$ – сумовна в $R^+$;*

*2. для $\forall z \ge 0$ справедливі нерівності*

$$\begin{aligned} &\bar{K}(z) \equiv ess\sup_{s \in R^+} \frac{\rho(s+z)}{\rho(s)} \le \bar{\bar{K}} < \infty; \\ &\underline{K}(z) \equiv ess\sup_{s \in R^+} \frac{\rho(s)}{\rho(s+z)} < \infty; \end{aligned} \tag{1}$$

*3. $\rho$ – обмежена в $R^+$;*

*4. $\rho > 0$ – строго додатня на $s \in (0, \infty)$;*

*5. $s\rho(s) \to 0$ коли $s \to \infty$.*

Наприклад, в якості $\rho(s)$ можна розглянути функцію $e^{-s}$.

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ – ймовірнісний базис [1]; $\{\xi(t), t \geq 0\}$ – марковський процес із значеннями в метричному просторі $\mathbf{Y} = \{y_1, .., y_n\}$ з перехідною ймовірністю $\mathbf{P}(s, y, A)$, $A \in \mathfrak{B}_Y$; $\{\eta_k, k \geq 0\}$ – ланцюг Маркова в метричному просторі з перехідною ймовірністю на $k$-му кроці $\mathbf{P}_k(h, G)$; $\{w(t), t \geq 0\}$ – $R^n$-значний вінерів процес, узгоджений з потоком $\sigma$-алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$, а $\{\tilde{\nu}(d\theta, dt) \equiv \nu(d\theta, dt) - t\Pi(d\theta)\}$ незалежна від нього центрована пуассонова міра на $(\Theta \times R_+, Z \times B_+)$, для якої $\mathbf{E}\{\tilde{\nu}^2(d\theta \times dt)\} = \Pi(d\theta)dt$, де $\Pi$ – деяка $\sigma$-скінченна міра на $Z$.

Розглянемо стохастичну динамічну систему випадкової структури із зовнішніми збуреннями та усією передісторією

$$dx(t) = f_1(\gamma_1)a(t, x^t, \xi(t))dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t, \xi(t))dw(t) + \\ + f_3(\gamma_3)\int_{\Theta} c(t, x^{t-}, \theta, \xi(t))\tilde{\nu}(d\theta, dt), \ \forall t \geq t_0; \tag{2}$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x|_{t=t_k} = x(t_k) - x(t_k-) = g\left(t_k-, x^{t_k-}, \xi(t_k), \eta_k\right), \\ t_k \in S \equiv \{t_n \uparrow, n \in \mathbf{N}\}, \ \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \tag{3}$$

і початковими умовами

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}, \ x^{t_0} = \varphi \in X, \ \eta_{k_0} = h. \tag{4}$$

Тут $\gamma_1, \gamma_2$ – випадкові величини, з функціями розподілу $F_{\gamma_1}(\cdot)$, $F_{\gamma_2}(\cdot)$ відповідно, незалежні від $\xi(t)$ і приростів $\{w(s) - w(t_0), s \geq t_0\}$, $\{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(t_0, A), s \geq t_0, A \in Z\}$; $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ – деякі борелеві функції; векторнозначний функціонал $\{a(t, \varphi, y)\} : R \times X \times \mathbf{Y} \to R^n$, матричнозначний функціонал $\{b(t, \varphi, y)\} : R \times X \times \mathbf{Y} \to M_n^n(R^n)$ та векторнозначний функціонал $\{c(t, \varphi, \theta, y)\} : R \times X \times \Theta \times \mathbf{Y} \to R^n$ – вимірні за сукупністю змінних і при кожному $\varphi \in X$ локально обмежені по $t$, а процес $x^t = (x(t), x^t_\rho)$, де

$$x^t_\rho(s) \equiv \begin{cases} x(t-s), \ t_0 \leq s \leq t; \\ \varphi(s-t), \ s > t. \end{cases}$$

Крім того, $\varphi^{t_0} \in X$ з ймовірністю 1 і $\varphi(t)$ не залежить від приростів вінерового процесу $\{w(s) - w(t), s \geq t \geq t_0\}$, центрованої пуассонової міри $\{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(t_0, A), s \geq t_0, A \in Z\}$ при кожному $t$ та випадкових величин $\gamma_1$, $\gamma_2$.

**Означення 2.** *Стохастичний процес $\{x(t) \equiv x(t, \omega), t \in (-\infty, T]\}$ назвемо сильним розв'язком задачі* (2)-(4), *якщо $x(t)$ прогресивно вимірний відносно $\mathfrak{F}_t$ при $t \leq T$, відрізки траєкторій процесу $x^t \in X$ при $t \in [t_0, T]$, $x^{t_0} = \varphi$ з ймовірністю 1 і рівність*

$$x(t) = x(s) + f_1(\gamma_1)\int_s^t a(s, x^s, \xi(t))ds + f_2(\gamma_2)\int_s^t b(s, x^s, \xi(t))dw(s) + \\ + f_3(\gamma_3)\int_s^t\int_{\Theta} c(s, x^s, \theta, \xi(t))\tilde{\nu}(d\theta, ds) \tag{5}$$

*виконується з ймовірністю 1 для всіх* $s \in [t_k, t_{k+1})$, $t \in (s, t_{k+1})$ *і при* $t_k \geq t_0$*:*

$$x(t_k) = x(t_k-) + g(t_k-, x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k). \tag{6}$$

Для спрощення викладок вважатимемо, що $\xi(t)$ – однорідний ланцюг Маркова зі скінченною кількістю станів. Згідно [1] $\{x^t(s), \xi(t)\}$ є марковським процесом, в якому випадкова складова $x(t) \in X$ характеризує зміни вектора стану системи, а $\xi(t)$ – випадкові зміни її структури з врахуванням ланцюга Маркова $\{\eta_k, k \geq 0\}$, що входить як аргумент у функцію відображення $g(\cdot,\cdot,\cdot,\eta_k)$. Цим і пояснюється означення системи (2) як системи випадкової структури.

**2. Основні твердження для сильного розв'язку стохастичних динамічних систем без врахування марковських збурень.**

Спочатку розглянемо більш просту динамічну систему, що не містить марковських збурень, а саме:

$$dx(t) = f_1(\gamma_1)a(t, x^t)dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t)dw(t) +$$

$$+ f_3(\gamma_3)\int\limits_{\Theta} c(t, x^{t-}, \theta)\tilde{\nu}(d\theta, dt), \ \forall t \geq t_0; \tag{7}$$

$$x^{t_0} = \varphi \in X. \tag{8}$$

Встановимо достатні умови існування і єдиності сильного розв'язку спочатку для задачі (7)-(8).

Введемо позначення

$$|x(\cdot)|^*_{t_0}(t) \equiv \sup_{t_0 \leq s \leq t} |x(s)|.$$

(*іноді* $t_0$ *не будемо писати, коли це не суттєво*)

При доведенні теореми існування та єдиності сильного розв'язку будемо використовувати нерівності Буркхольдера [2], [9]: для довільного $l > 1$ існують сталі $c_{l1}$, $c_{l2}$ такі, що

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_{t_0}^{\bullet} \psi_1(s)dw(s)\right|^{*l}_{t_0}(t) \leq c_{l1}\mathbf{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t} |\psi_1(s)|^2 ds\right)^{l/2}; \tag{9}$$

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_{t_0}^{\bullet}\int\limits_{\Theta} \psi_2(\theta, s)\tilde{\nu}(d\theta, ds)\right|^{*l}_{t_0}(t) \leq c_{l2}\mathbf{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Theta} |\psi_2(\theta, s)|^2 \Pi(d\theta)ds\right)^{l/2};$$

для будь-яких $\mathfrak{F}_t$-узгоджених процесів $\psi_1(t, \omega)$ і $\psi_2(\theta, t, \omega)$, таких, що

$$\int\limits_0^t \psi_1^2(t)dt < \infty; \ \int\limits_0^t\int\limits_{\Theta} \psi_2^2(\theta, t)\Pi(d\theta)dt < \infty$$

майже напевне.

Також будемо використовувати сталі, що з'являються в таких елементарних нерівностях

$$\left|\sum_{i=1}^{m} a_i\right|^l \le k_l^{(m)} \sum_{i=1}^{m} |a_i|^l,\ l \ge 0, \tag{10}$$

$$\{a_i\} \subset R,\ m = 1, 2, 3, 4;\ k_l^{(m)} = m^{l-1} \vee 1.$$

Позначимо

$$R(t,x) \equiv f_1(\gamma_1)\int_{t_0}^{t} a(s,x^s)ds + f_2(\gamma_2)\int_{t_0}^{t} b(s,x^s)dw(s) + f_3(\gamma_3)\int_{t_0}^{t}\int_{\Theta} c(t,x^s,\theta)\tilde{\nu}(d\theta,dt),$$

$$\delta(t) \equiv x(t) - y(t).$$

**Лема 1.** *Нехай на ймовірнісному базисі* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ *задано стохастичне функціонально-диференціальне рівняння* (7) *з початковою умовою* (8). *Припустимо, що*

*1) вимірні функціонали* $a$, $b$, $c$, *визначені відповідно на* $R \times X$, $R \times X$, $R \times X \times Z$ *задовольняють умову Ліпшица, а саме, існує стала* $L$, *така, що*

$$|a(s,x) - a(s,y)| + |b(s,x) - b(s,y)| +$$

$$+\int_{\Theta} |c(s,x,\theta) - c(s,y,\theta)|\,\Pi(d\theta) \le L\|x-y\|_X \tag{11}$$

*для довільних* $x, y \in X$;

*2)* $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ *– деякі борелеві функції такі, що існують* $\mathbf{E}\,(f_1(\gamma_1))^l$, $\mathbf{E}\,(f_2(\gamma_2))^l$, $\mathbf{E}\,(f_3(\gamma_3))^l \le c < \infty$, $l > 1$, *де* $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ *– незалежні в сукупності випадкові величини;*

*3)* $x, y \subset X$ *–* $\mathfrak{F}_t$*-прогресивно вимірні випадкові процеси, без розривів другого роду, для яких* $x^{t_0}, y^{t_0} \in X$.

*Тоді для* $\forall l > 1$ *справедлива нерівність*

$$\mathbf{E}\left\{|R(\cdot,x) - R(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t)\right\} \le K_1\mathbf{E}\left\{\left\|\delta^{t_0}\right\|_X^l\right\} +$$

$$+K_2\mathbf{E}\left\{\int_{t_0}^{t}|\delta(s)|^l ds + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{u}|\delta(v)|^p\rho(s-v)dv\right)^{l/p} du\right\} +$$

$$+K_3\mathbf{E}\left\{\left(\int_{t_0}^{t}|\delta(s)|^2 ds\right)^{l/2} + \left(\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{u}|\delta(v)|^p\rho(s-v)dv\right)^{2/p} ds\right)^{l/2}\right\}, \tag{12}$$

*де* $K_1$, $K_2$, $K_3$ *залежать лише від* $l$, $p$, $L$, $(t - t_0)$ *і обмежені при* $t \in [t_0, T]$. *Також* $K_1$ *є нескінченно малою* $o(1)$ *при* $t \to t_0$.

***Доведення.*** Використовуючи нерівності (9), а також елементарні нерівності (10) матимемо

$$|R(\cdot,x)-R(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t)\le k_l|f_1(\gamma_1)|^l\left|\int\limits_{t_0}^{t}(a(s,x^s)-a(s,y^s))ds\right|_{t_0}^{*l}(t)+$$

$$+k_l|f_2(\gamma_2)|^l\left|\int\limits_{t_0}^{t}(b(s,x^s)-b(s,y^s))dw(s)\right|_{t_0}^{*l}(t)+$$

$$+k_l|f_3(\gamma_3)|^l\left|\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Theta}(c(s,x^s,\theta)-c(s,y^s,\theta))\tilde{\nu}(d\theta,ds)\right|_{t_0}^{*l}(t);$$

$$\mathbf{E}\left\{|R(\cdot,x)-R(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t)\right\}\le ck_l\mathbf{E}\left\{(t-t_0)^{l-1}\int\limits_{t_0}^{t}|(a(s,x^s)-a(s,y^s))|^l ds+\right.$$

$$+cc_{l1}\left(\int\limits_{t_0}^{t}|(b(s,x^s)-b(s,y^s))|^2 ds\right)^{l/2}+$$

$$\left.+cc_{l2}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Theta}|c(s,x^s,\theta)-c(s,y^s,\theta)|^2\Pi(d\theta)ds\right)^{l/2}\right\}\le$$

$$\le ck_lL^l\mathbf{E}\left\{(t-t_0)^{l-1}\int\limits_{t_0}^{t}\|\delta^s\|^l ds+(c_{l1}+c_{l2})\left(\int\limits_{t_0}^{t}\|\delta^s\|^2 ds\right)^{l/2}\right\}. \qquad (13)$$

Оскільки [2] $\|\delta^s\|_X^p=|\delta(s)|^p+\|\delta^s\|_\rho^p$ і

$$\|\delta^s\|_\rho^p=\int\limits_0^{\infty}|\delta(s-v)|^p\rho(v)dv=\int\limits_{s-t_0}^{\infty}|\delta(s-v)|^p\rho(v)dv+\int\limits_0^{s-t_0}|\delta(s-v)|^p\rho(v)dv=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}|\delta(t_0-v)|^p\rho(v)\frac{\rho(v+s-t_0)}{\rho(v)}dv+\int\limits_{t_0}^{s}|\delta(v)|^p\rho(s-v)dv\le$$

$$\le\bar{\bar{K}}\left\|\delta^{t_0}\right\|_\rho^p+\int\limits_{t_0}^{s}|\delta(v)|^p\rho(s-v)dv,$$

де $\bar{\bar{K}}$ визначене формулою (1).

Позначимо $\lambda=l/p$; $\tau=2/p$. Тоді, одержимо

$$\|\delta^s\|^l=(\|\delta^s\|^p)^\lambda\le k_\lambda\left[|\delta(s)|^l+\bar{\bar{K}}^\lambda\left\|\delta^{t_0}\right\|_\rho^l+\left(\int\limits_{t_0}^{s}|\delta(v)|^p\rho(s-v)dv\right)^\lambda\right];$$

$$\|\delta^s\|^2 = (\|\delta^s\|^p)^\lambda \le k_\tau \left[ |\delta(s)|^2 + \bar{\bar{K}}^\tau \left\|\delta_0^t\right\|_\rho^2 + \left( \int_{t_0}^{s} |\delta(v)|^p \rho(s-v)dv \right)^\tau \right].$$

Інтегруючи, матимемо

$$\int_{t_0}^{t} \|\delta^s\|^l ds \le k_\lambda \left[ \int_{t_0}^{t} |\delta(s)|^l ds + \bar{\bar{K}}^\lambda (t-t_0) \left\|\delta^{t_0}\right\|_\rho^l + \int_{t_0}^{t} \left( \int_{t_0}^{s} |\delta(v)|^p \rho(s-v)dv \right)^\lambda ds \right];$$

$$\left( \int_{t_0}^{t} \|\delta^s\|^2 ds \right)^{l/2} \le k_\tau^{l/2} k_{l/2} \times$$

$$\times \left[ \left( \int_{t_0}^{t} |\delta(s)|^2 ds \right)^{l/2} + \bar{\bar{K}}^\lambda (t-t_0)^{l/2} \left\|\delta^{t_0}\right\|_\rho^l + \left( \int_{t_0}^{t} \left( \int_{t_0}^{s} |\delta(v)|^p \rho(s-v)dv \right)^\tau ds \right)^{l/2} \right].$$

Підставивши останні дві оцінки в (13), одержимо (12), причому

$$K_1 \equiv c k_l L^l \bar{\bar{K}}^\lambda (k_\lambda (t-t_0)^l + c(c_{l1} + c_{l2}) k_{l/2} k_\tau^{l/2} (t-t_0)^{l/2});$$

$$K_2 = c k_l k_\lambda L^l (t-t_0)^{l-1}; \quad K_3 = c(c_{l1} + c_{l2}) L^l k_l k_{l/2} k_\lambda^{l/2}.$$

Лема 1 доведена.

Надалі будемо користуватися наступним наслідком з леми 1.

**Наслідок 1.** *При виконанні умов леми 1 справедлива така нерівність:*

$$\mathbf{E}\left\{ |R(\cdot,x) - R(\cdot,y)|_{t_0}^* (t) \right\} \le K_1 \mathbf{E}\left\{ \left\|\delta^{t_0}\right\|_X^l \right\} + M_{t_0}^t \mathbf{E}\left\{ |\delta(\cdot)|_{t_0}^{*l} (t) \right\}, \qquad (14)$$

*де $K_1$ – те саме, що і вище, а $M$ залежить від $(t-t_0)$, $K_2$, $K_3$ і $M_{t_0}^t = O(1)$ при $t \downarrow t_0$.*

***Доведення.*** Зауважимо, що $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \left( \int_{t_0}^{s} |\delta(v)|^p \rho(s-v)dv \right) ds \le \|\rho\|_{L_1} \int_{t_0}^{t} |\delta(v)|^p dv.$
Підставивши $|\delta(s)| \le |\delta|_{t_0}^* (t)$ при $t_0 \le s \le t$ в нерівність (12), ми одержимо (14)

$$M_{t_0}^t = K_2 \left[ (t-t_0) + \int_{t_0}^{t} \left( \int_{t_0}^{s} \rho(s-v)dv \right)^{l/p} ds \right] +$$

$$+ K_3 \left[ \left( \int_{t_0}^{t} ds \right)^{l/2} + \left( \int_{t_0}^{t} \left( \int_{t_0}^{s} \rho(s-v)dv \right)^{2/p} ds \right)^{l/2} \right] \le$$

$$\le K_2 (t-t_0)(1 + \|\rho\|_{L_1}^{l/p}) + K_3 (t-t_0)^{l/2} (1 + \|\rho\|_{L_1}^{l/p}) = o(1) \text{ при } t \to t_0,$$

що і доводить наслідок.

Доведення теореми існування та єдиності розв'язку СДФР$_\infty$ базується на методі послідовних наближень Пікара, як і увипадку класичних стохастичних рівнянь.

Але, враховуючи норму в просторі $X$, доведення відрізняється від доведення в класичному розумінні тим, що, взагалі кажучи, оцінки Гроуолла не виконуються. В процесі доведення використовується [5] Лема 2 і можливість продовжити розв'язок, оскільки $M_{t_0}^t$ залежить від $(t-t_0)$ і не залежить від $t_0$.

**Теорема 1.** *Нехай на ймовірнісному базисі* $(\Omega, \mathfrak{F}, F, \mathbf{P})$ *задано стохастичне рівняння* (7) *з початковою умовою* (8). *Припустимо, що*

*1) функціонали* $a : R \times X \to R^n, b : R \times X \to M_n^n(R^n), c : R \times X \times \Theta \to R^n$ *вимірні за сукупністю змінних;*

*2) існує стала* $L > 0$ *така, що*

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| + \int_\Theta |c(t,x,\theta) - c(t,y,\theta)| \, \Pi(d\theta) \le L \, \|x - y\|_X$$

*для* $\forall x, y \in X$*;*

*3)* $|a(t,x)| + |b(t,x)| + \int_\Theta |c(t,x,\theta)| \, \Pi(d\theta) \le L(1 + \|x\|_X)$ *для* $\forall t \in [t_0, T]$ *і* $\forall x, y \in X$*;*

*4)* $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $f_3(\cdot)$ *– деякі борелеві функції такі, що існують* $\mathbf{E}\,(f_1(\gamma_1))^l$, $\mathbf{E}\,(f_2(\gamma_2))^l$, $\mathbf{E}\,(f_3(\gamma_3))^l \le c < \infty$, $l > 1$, *де* $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ *– незалежні в сукупності випадкові величини;*

*5)* $\exists l > 1$ *і* $x_-$ *– випадковий процес* $x_- \in X_{t_0}$ *такий, що*

$$\mathbf{E} \left\| x_-^{t_0} \right\|_X^l < \infty.$$

*Тоді*

*1) існує єдиний сильний розв'язок* $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$ *рівняння* (7) *такий, що*

$$x^{t_0} = x_-^{t_0}; \tag{15}$$

*2) для* $\forall t \in [t_0, T]$ *і* $l > 1$ *існує* $l$ *момент розв'язку* (7)

$$\mathbf{E} \left| x(\cdot) \right|_{t_0}^{*l}(t) < \infty. \tag{16}$$

Тут через $X_{t_0}$ позначено простір вимірних випадкових процесів $\varphi(t)$, $t \le t_0$, таких, що $\varphi^{t_0} \in X$ з ймовірністю 1, і таких, що при кожному $t$, $\varphi(t)$ не залежить від приростів вінерового процесу $\{w(s) - w(t_0), s \ge t_0\}$, пуассонової міри $\{\tilde\nu(s, A) - \tilde\nu(t_0, A), s \ge t_0, A \in Z\}$ та випадкових величин $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$.

***Доведення.*** **Існування.** Визначимо послідовність $\{x_n(t), n \ge 0\}$ таким чином:

$$x_n(t) = x_-(t) \text{ при } t \le t_0 \text{ для всіх } n \ge 0,$$

$$x_0(t) = x_-(t_0) \text{ при } t \ge t_0.$$

При $n \ge 1$, $t \ge t_0$

$$x_n(t) = x_-(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, x_{n-1}^s) ds + \int_{t_0}^t b(s, x_{n-1}^s) dw(s) + \int_{t_0}^t \int_\Theta c(s, x_{n-1}^s, \theta) \tilde\nu(d\theta, ds).$$

З цього визначення, умов на коефіцієнти випливає [5], що функції $x_n(t)$, $t \geq t_0$ є прогресивно-вимірні відносно $\mathfrak{F}_t$, без розривів другого роду і $x_n^t \in X$ при $t \geq t_0$.

Спочатку покажемо за індукцією, що

$$\mathbf{E}\left\{\|x_n^{\bullet}\|_{t_0}^{*l}(t)\right\} < \infty,\ t_0 \leq t \leq T.$$

Для $n = 0$ маємо $x_0^{t_0} \in X$ і за вище заданою побудовою для $t_0 \leq t \leq T$

$$\left\|x_0^t\right\| = \left\|T^{t-t_0}x_0^{t_0}\right\| \leq \bar{\bar{c}}\left\|x_0^{t_0}\right\| = \bar{\bar{c}}\left\|x_-^{t_0}\right\|,$$

$\bar{\bar{c}}$ – стала, що залежить від $\bar{\bar{K}}$. Тому $\mathbf{E}\left\{\|x_0(\cdot)\|_{t_0}^{*l}(T)\right\} \leq const$, $\mathbf{E}\left\{\left\|x_-^{t_0}\right\|_X^l\right\} < \infty$.

Припустимо, що $\mathbf{E}\left\{\left\|x_{n-1}^{\bullet}\right\|_{t_0}^{*l}(t)\right\} < \infty$, $t_0 \leq t \leq T$. Використовуючи Лему 1, нерівності Буххольдера (9), елементарні нерівності (10) та умову 3) теореми, одержимо для $\forall t_0 \leq t \leq T$

$$\mathbf{E}\left\{\|x_n^{\bullet}\|_{t_0}^{*l}(t)\right\} \leq ck_l^{(4)}\mathbf{E}\left\{|x_-(t_0)|^l + (t-t_0)^{l-1}\int\limits_{t_0}^{t}\left|a(s,x_{n-1}^s)\right|^l ds+\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_{t_0}^{t}\left|b(s,x_{n-1}^s)\right|dw(s)\right)^l + \left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Theta}\left|c(s,x_{n-1}^s,\theta)\right|\tilde{\nu}(d\theta,ds)\right)^l\right\} \leq$$

$$\leq ck_l^{(4)}\mathbf{E}\left\{|x_-(t_0)|^l + (t-t_0)^{l-1}\int\limits_{t_0}^{t}\left|a\left(s,x_{n-1}^s\right)\right|^l ds+\right.$$

$$\left.+c_{l1}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\left|b(s,x_{n-1}^s)\right|^2 ds\right)^{l/2} + c_{l2}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Theta}\left|c(s,x_{n-1}^s,\theta)\right|^2\Pi(d\theta)ds\right)^{l/2}\right\} \leq$$

$$\leq k_l^{(4)}\mathbf{E}\left\{|x_-(t_0)|^l + (t-t_0)^{l-1}L^l\int\limits_{t_0}^{t}\left(1+\left\|x_{n-1}^s\right\|\right)^l ds + L^l c_{l1}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\left(1+\left\|x_{n-1}^s\right\|\right)^2 ds\right)^{l/2}\right. +$$

$$\left.+L^l c_{l2}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\left(1+\left\|x_{n-1}^s\right\|\right)^2 ds\right)^{l/2}\right\} \leq ck_l^{(4)}\mathbf{E}\left\{|x_-(t_0)|^l + L^l(T-t_0)^l + L^l(T-t_0)^{l/2}\times\right.$$

$$\left.\times(c_{l1}+c_{l2})\beta(1+\left\|x_{n-1}^{\cdot}\right\|_{t_0}^{*}(t))^l\right\} \leq ck_l^{(4)}\mathbf{E}\left\{|x_-(t_0)|^l + L^l(T-t_0)^l + L^l(T-t_0)^{l/2}\times\right.$$

$$\left.\times(c_{l1}+c_{l2})\beta(1+\left\|x_{n-1}^{\cdot}\right\|_{t_0}^{*l}(T))\right\} < \infty.$$

Далі, використовуючи Лему 1 і наслідок 1, матимемо

$$\mathbf{E}\left\{|x_n(\cdot)-x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)\right\} = \mathbf{E}\left\{|R(\cdot,x_{n-1})-R(\cdot,x_{n-2})|_{t_0}^{*l}(t)\right\} \leq$$

$$\leq M_{t_0}^t \mathbf{E}\left\{ |x_{n-1}(\cdot) - x_{n-2}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) \right\}.$$

Згідно того ж наслідку, можемо обрати $t_1 > 0$ таке, що $M_{t_0}^t < 1/2$ для $t \in [t_0, t_0 + t_1]$, де $t_1$ не залежить від $t_0$.

Якщо покласти

$$K \equiv \mathbf{E}\left\{ |x_1(\cdot) - x_0(\cdot)|_{t_0}^{*l} \right\} < \infty$$

матимемо $\mathbf{E}\left\{ |x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(T) \right\} \leq \dfrac{K}{2^n}$, $t \in [t_0, t_0 + t_1]$.

Враховуючи нерівність Чебишева, одержимо збіжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left\{ |x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) > \frac{1}{n^2} \right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{2l} \mathbf{E}\left\{ |x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) \right\} \leq$$

$$\leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2l}}{2^n} < \infty.$$

Отже, за лемою Бореля-Кантеллі існує рівномірна збіжність майже напевне на $[t_0, t_0 + t_1]$ суми $x_n(t) \equiv x_-(t_0) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} |x_k(t) - x_{k-1}(t)|$.

Тому границя $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ існує на $[t_0, t_0 + t_1]$.

Покажемо, що $\{x(t), t \leq t_1\}$ – розв'язок рівняння (7). Проведемо оцінки, використовуючи наслідок 1:

$$\mathbf{E}\left\{ \left| x(\cdot) - x_-(t_0) - f_1(\gamma_1) \int_{t_0}^{\cdot} a(s, x^s) ds - f_2(\gamma_2) \int_{t_0}^{\cdot} b(s, x^s) dw(s) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f_3(\gamma_3) \int_{t_0}^{\cdot} \int_{\Theta} c(s, x^s, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds) \right|_{t_0}^{*l}(t) \right\} =$$

$$= \mathbf{E} \left| (x(\cdot) - x_n(\cdot)) - \int_{t_0}^{\cdot} f_1(\gamma_1) \left[ a(s, x^s) - a(s, x_{n-1}^s) \right] ds - \right.$$

$$- \int_{t_0}^{\cdot} f_2(\gamma_2) \left[ b(s, x^s) - b(s, x_{n-1}^s) \right] dw(s) -$$

$$\left. - \int_{t_0}^{\cdot} \int_{\Theta} f_3(\gamma_3) \left[ c(s, x^s, \theta) - c(s, x_{n-1}^s, \theta) \right] \tilde{\nu}(d\theta, ds) \right|_{t_0}^{*l} \leq k_l^{(2)} \mathbf{E} \left| x(\cdot) - x_n(\cdot) \right|_{t_0}^{*l}(t) +$$

$$+ c k_l^{(2)} \mathbf{E} \left| R(\cdot, x) - R(\cdot, x_{n-1}) \right|_{t_0}^{*l}(t) \leq k_l^{(2)} \mathbf{E} \left| x(\cdot) - x_n(\cdot) \right|_{t_0}^{*l}(t) +$$

$$+ c k_l^{(2)} \mathbf{E} \left| x(\cdot) - x_{n-1}(\cdot) \right|_{t_0}^{*l}(t),$$

нагадаємо, що при $t \leq t_1$ $M_{t_0}^t < 1/2$.

Залишилось довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{E}\left|x(\cdot)-x_n(\cdot)\right|^{*l}(t)=0$.

Нехай $b_i=i^{-2/l'}$, $l'=\dfrac{l}{l-1}$. Тоді з нерівності Гельдера (при $l>1$)

$$\mathbf{E}\left|x_n(\cdot)-x_n+k(\cdot)\right|^{*l}(t)\le\mathbf{E}\left(\sum_{i=n}^{n+k-1}\left|x_i(\cdot)-x_{i+k}(\cdot)\right|^{*}(t)\right)^{l}=$$

$$=\mathbf{E}\left(\sum_{i=n}^{n+k-1}\left|x_i(\cdot)-x_{i+k}(\cdot)\right|^{*}(t)b_ib_i^{-1}\right)^{l}\le$$

$$\le\mathbf{E}\left(\sum_{i=n}^{n+k-1}\left|x_i(\cdot)-x_{i+1}(\cdot)\right|^{*}(t)b_i^{-l}\right)\left(\sum_{i=n}^{n+k-1}b_i^{l'}\right)^{l/l'}\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Kb_i^{-l}}{2^i}\right)\left(\sum_{i=n}^{\infty}b_i^{l'}\right)^{l-1}$$

і

$$\left|x(\cdot)-x_n(\cdot)\right|^{*l}(t)\le\liminf_{k}\left|x(\cdot)-x_{n+k}(\cdot)\right|^{*l}(t),$$

за лемою Фату

$$\mathbf{E}\left|x(\cdot)-x_n(\cdot)\right|^{*l}(t)\le K\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i^{-l}}{2^i}\right)\left(\sum_{i=n}^{\infty}b_i^{l'}\right)^{l-1}\to 0 \text{ коли } n\to\infty.$$

Таким чином, доведено існування розв'язку (7) для $t\in[t_0,t_0+t_1]$. Продовжимо цей розв'язок за $t_0+t_1$. Для цього досить шукати розв'язок (7) для $t\ge t_0+t_1$ з початковими даними

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}x_-(t),\ t\le t_0;\\ x(t),\ t\in[t_0,t_0+t_1].\end{cases}$$

Очевидно, що $\varphi_1\in X_{t_0+t_1}$. Повторюючи вищеописані викладки, одержимо розв'язок $x(t)$, $t_0+t_1\le t\le t_0+2t_1$, і для такого $t$

$$x(t)=\varphi_1(t_0+t_1)+f_1(\gamma_1)\int\limits_{t_0+t_1}^{t}a(s,x^s)ds+f_2(\gamma_2)\int\limits_{t_0+t_1}^{t}b(s,x^s)dw(s)+$$

$$+f_3(\gamma_3)\int\limits_{t_0+t_1}^{t}\int\limits_{\Theta}c(s,x^s,\theta)\tilde{\nu}(d\theta,ds)=$$

$$=x_-(t_0)+f_1(\gamma_1)\int\limits_{t_0}^{t_0+t_1}a(s,x^s)ds+f_2(\gamma_2)\int\limits_{t_0}^{t_0+t_1}b(s,x^s)dw(s)+$$

$$+f_3(\gamma_3)\int\limits_{t_0}^{t_0+t_1}\int\limits_{\Theta}c(s,x^s,\theta)\tilde{\nu}(d\theta,ds)+$$

$$+f_1(\gamma_1)\int\limits_{t_0+t_1}^{t}a(s,x^s)ds+f_2(\gamma_2)\int\limits_{t_0+t_1}^{t}b(s,x^s)dw(s)+$$

$$+f_3(\gamma_3)\int\limits_{t_0+t_1}^{t}\int\limits_{\Theta} c(s,x^s,\theta)\tilde{\nu}(d\theta,ds) =$$

$$= x_-(t_0) + f_1(\gamma_1)\int\limits_{t_0}^{t} a(s,x^s)ds + f_2(\gamma_2)\int\limits_{t_0}^{t} b(s,x^s)dw(s) +$$

$$+f_3(\gamma_3)\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Theta} c(s,x^s,\theta)\tilde{\nu}(d\theta,ds)$$

і тому $x(t)$, $t_0+t_1 \le t \le t_0+2t_1$ є розв'язком (7) з початковими умовами (15). Аналогічно, припускаючи, що побудовано розв'язок $x(t)$, $t_0+t_1 \le t \le t_0+kt_1$, $k \ge 1$, будується розв'язок $x(t)$, $t_0+t_1 \le t \le t_0+(k+1)t_1$ з початковою історією до $t_0+kt_1$, заданою процесом

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} x_-(t), \ t \le t_0; \\ x(t), \ t \in [t_0, t_0+kt_1] \end{cases} \in X_{t_0+kt_1}.$$

Далі, рухаючись аналогічно до $t_0+kt_1 \ge T$, одержимо $\mathfrak{F}_t$-вимірний розв'язок $\{x(t), t_0 \le t \le T\}$, що задовольняє (15).

**Єдиність.** Нехай $\{x_1(t), t \in [t_0,T]\}$ і $\{x_2(t), t \in [t_0,T]\}$ – два розв'язки рівняння (7), що задовольняють (15) і (16). Позначимо $\delta(t) \equiv x_1(t) - x_2(t)$, тоді з наслідку випливає (тут $\delta^*_{t_0}(t) = |\delta(\cdot)|^*_{t_0}(t)$)

$$\mathbf{E}\delta^{*l}_{t_0}(t) \le M^t_{t_0}\mathbf{E}\delta^*_{t_0}(t).$$

Нехай $\bar{t} \le T - t_0$ є таким, що $M^t_{t_0} \le \alpha < 1$ для $t_0 \le t \le \bar{t} + t_0$. Тоді,

$$\mathbf{E}\delta^{*l}_{t_0}(t) = 0 \text{ для } t_0 \le t \le \bar{t} + t_0.$$

Таким чином,

$$\mathbf{P}\left(\{x_1(t) = x_2(t), t_0 \le t \le t_0 + \bar{t} \equiv \theta_1\}\right) = 1.$$

Рухаючись далі, одержимо $\mathbf{E}\delta^{*l}_{t_0}(t) = 0$ для $t \in [\theta_1, \theta_2]$, $\theta_2 \equiv \theta_1 + \bar{t}_2$ і після скінченної кількості кроків $\mathbf{P}\left(\{x_1(t) = x_2(t), t_0 \le t \le T\}\right) = 1$.

Доведено єдиність сильного розв'язку, що задовольняє лише (15). Нехай $N > 0$, і для $t_0 \le t \le T, I_N$ є індикатором такої множини

$$\Omega_n = \left\{\omega : |x_1(\cdot)|^*_{t_0}(t) \le N, |x_2(\cdot)|^*_{t_0}(t) \le N\right\}.$$

Оскільки $I_N(t) = I_N(t)I_s(t)$, $s \le t$, то, повторюючи доведення леми 1 та її наслідку, одержимо нерівність $\mathbf{E}\,|I_N(\cdot)\delta(\cdot)|^{*l}_{t_0}(t) \le M^t_{t_0}\mathbf{E}\,|I_N(\cdot)\delta(\cdot)|^{*l}_{t_0}(t)$, і, використовуючи ті ж роздуми, що й раніше, матимемо $\mathbf{E}\,|I_N(\cdot)\delta(\cdot)|^{*l}_{t_0}(t) = 0$, $t_0 \le t \le T$.

Звідси випливає, що

$$\mathbf{P}\{\delta(t) \ne 0\} \le \mathbf{P}\left\{|x_1(\cdot)|^{*l}_{t_0}(t) > N\right\} + \mathbf{P}\left\{|x_2(\cdot)|^{*l}_{t_0}(t) > N\right\},$$

але $x_1$, $x_2$ – локально обмежені, а отже, ймовірності в правій частині нерівності прямують до нуля при $N \to \infty$ і, отже, $\delta(t) = 0$ при $t \in [t_0, T]$.

**3. Теорема існування і єдиності розв'язку стохастичної динамічної системи Іто-Скорохода випадкової структури з зовнішніми збуреннями і всією передісторією.**

Опишемо як можна адаптувати теорему 1 для системи (2)-(4) [6].

Припустимо, що зовнішні перемикання типу (3) відсутні. Тоді на інтервалі $t \in [t_0, t_1)$, де $\xi(t) = y_1 \in \mathbf{Y}$, розглянемо систему

$$dx(t) = f_1(\gamma_1)a(t, x^t, y_1)dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t, y_1)dw(t) + f_3(\gamma_3)\int_\Theta c(t, x^{t-}, \theta, y_1)\tilde{\nu}(d\theta, dt)$$

з початковими умовами

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y},\ x^{t_0} = \varphi \in X.$$

На основі теореми 1 можна стверджувати, що дана задача має єдиний розв'язок на проміжку $t \in [t_0, t_1)$.

Далі, розглянемо інтервал $t \in [t_1, t_2)$. Тут $\xi(t) = y_2 \in \mathbf{Y}$, а рух відбувається в силу системи

$$dx(t) = f_1(\gamma_1)a(t, x^t, y_2)dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t, y_2)dw(t) + f_3(\gamma_3)\int_\Theta c(t, x^{t-}, \theta, y_2)\tilde{\nu}(d\theta, dt)$$

з початковою умовою $\xi(t_1) = y_1$, а в якості початкової функції $\varphi(\theta)$ слід розглянути відрізок траєкторії $x(t)$, $t \in [-\infty, t_1]$. Очевидно, що і тут має місце твердження про існування єдиного розв'язку.

Таким чином, теорема 1, має місце на відрізку $[0, T] \supset \bigcup\limits_{k=0}^{n-1}[t_k, t_{t+1})$ $(0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T)$.

Розглянемо випадок, коли зовнішні перемикання типу (3) відбуваються в моменти часу $t_1^* < t_2^* < ... < t_n^*$, $t_1^* > t_0$, а значення $\xi(t) = y$ залишається незмінним.

Тоді замість системи (2) слід розглядати систему

$$dx(t) = f_1(\gamma_1)a(t, x^t, y)dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t, y)dw(t) +$$
$$+ f_3(\gamma_3)\int_\Theta c(t, x^{t-}, \theta, y)\tilde{\nu}(d\theta, dt),\ \forall t \geq t_0; \tag{17}$$

з початковою умовою

$$x^{t_0} = \varphi \in X, \eta_{k_0} = h_0, \tag{18}$$

для інтервалу $t \in [t_0, t_1^*)$; і початковою умовою

$$x^{t_1^*} = x^{t_1^*-} + g(t_1^*-, y, h_1, x(t_1^*-)),\ \eta_{k_1} = h_1, \tag{19}$$

для $t \in [t_0, t_1^*)$.

Аналогічно для інтервалу $t_k^* \leq t \leq t_{k+1}^*$ слід розглядати систему (17) з початковою умовою

$$x^{t_k^*} = x^{t_k^*-} + g(t_k^*-, y, h_k, x(t_k^*-)). \tag{20}$$

Для початкових умов (20), $k \geq 2$ значення початкової функції в точці $t_k$ слід розуміти як границю зліва.

Враховуючи теорему 1 можна стверджувати, що система (17), (20) має єдиний розв'язок на інтервалі $[t^*_{k-1}, t^*_k)$ при всіх $k \geq 1$.

Отже, на підставі вищесказаного, має місце наступна теорема.

**Теорема 2.** *Нехай на ймовірнісному базисі* $(\Omega, \mathfrak{F}, F, \mathbf{P})$ *задана стохастична динамічна система* (2)-(4). *Припустимо, що*

*1) функціонали* $a : R \times X \to R^n$, $b : R \times X \to M^n_n(R^n)$, $c : R \times X \times \Theta \to R^n$ *вимірні за сукупністю змінних;*

*2) існує стала* $L > 0$ *така, що*

$$|a(t,\varphi_1,y) - a(t,\varphi_2,y)| + |b(t,\varphi_1,y) - b(t,\varphi_2,y)| +$$

$$+ \int\limits_{\Theta} |c(t,\varphi_1,\theta,y) - c(t,\varphi_2,\theta,y)|\, \Pi(d\theta) + |g(t,\varphi_1,y,h) - g(t,\varphi_2,y,h)| \leq L\|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$$

*для* $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in X$, $\forall t \in [t_0, T]$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$;

*3) виконується нерівність*

$$|a(t,\varphi,y)| + |b(t,\varphi,y)| + \int\limits_{\Theta} |c(t,\varphi,\theta,y)|\, \Pi(d\theta) + |g(t,\varphi,y,h)| \leq L(1 + \|\varphi\|_X)$$

*для* $\forall t \in [t_0, T]$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$; $\varphi \in X$.

*4)* $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $f_3(\cdot)$ *– деякі борелеві функції такі, що існують* $\mathbf{E}\left(f_1(\gamma_1)\right)^l$, $\mathbf{E}\left(f_2(\gamma_2)\right)^l$, $\mathbf{E}\left(f_3(\gamma_3)\right)^l \leq c < \infty$, $l > 1$, *де* $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ *– незалежні в сукупності випадкові величини;*

*5)* $\exists l > 1$ *і* $x_-$ *– випадковий процес* $x_- \in X_{t_0}$ *такий, що*

$$\mathbf{E}\left\|x^{t_0}_-\right\|^l_X < \infty.$$

*Тоді*

*1) існує єдиний сильний розв'язок* $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$ *рівняння* (2) *такий, що*

$$x^{t_0} = x^{t_0}_-;$$

*2) для* $\forall t \in [t_0, T]$ *і* $l > 1$ *існує* $l$ *момент розв'язку* (2)

$$\mathbf{E}\left|x(\cdot)\right|^{*l}_{t_0}(t) < \infty.$$

## Список використаної літератури


1. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функционалных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.
2. Mizel V., Trutzer V. Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability. *Journal of Integral Equations*. 1984. Vol. 7. Pp. 1–72.
3. Ikeda N., Watanabe S. Stochastic Differential equations. Sijthoff and Noodhoff, 1980. 175 p.
4. Korolyuk V. S., Korolyuk D. V. Stochastic Models of Systems. Kluwer, Dordrecht. 1999.
5. Антонюк С. В., Ясинский В. К. Существование l-го момента решения стохастического дифференциально-функционального уравнения со всей предысторией. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. Вып. 4. С. 141–151.
6. Ясинський В. К. Математична теорія процесів випадку. Чернівці: "Родовід", 2014. 272 с.

7. Королюк В. С., Царков Є. Ф., Ясинський В. К. Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. Чернівці: "Золоті литаври", 2009. 798 с.
8. Ширяев А. Н., Булинский А. В. Теория случайных процессов. Москва: Физматлит, 2005. 408 с.
9. Лукашів Т. О., Ясинський В. К. Стійкість за ймовірністю в цілому стохастичних динамічних систем випадкової структури з постійним запізненням. *Волинський математичний вісник. Серія: Прикладна математика.* 2013. Вип. 10(191). С. 140–151.

**Yasynskyy V. K., Antonyuk S. V.** Existence of $l$-th moment of solution of Ito-Skorokhod stochastic dynamic systems of random structure with external disturbances and all prehistory.

In this article the definition of strong solution of Ito-Skorokhod stochastic dynamic systems of random structure with external disturbances and all prehistory is presented, important inequalities, which are used to prove Existence and Uniqueness theorems are proved. Global Existence and Uniqueness theorem is proved.

**Keywords:** Wiener integral, Poisson integral, Ito-Skorokhod stochastic dynamic system, stochastic system of random structure, Markov switchings.

### References

1. Tsarkov, Ye.Ph. (1989). Random disturbances of differential-functional equations. *Riga: Zinatne*, 412 p. [in Russian]
2. Mizel, V., & Trutzer, V. (1984). Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability. *Journal of Integral Equations, 7*, 1-72.
3. Ikeda, N., & Watanabe, S. (1980). Stochastic Differential equations. *Sijthoff and Nooodhoff*, 175 p.
4. Korolyuk, V.S., & Korolyuk, D.V. (1999). Stochastic Models of Systems. Kluwer, Dordrecht. 1999.
5. Antoniuk, S.V., & Yasinskiy, V.K. (2008). Existence of l-th moment of solution of stochastic differential-functional equations with all prehistory. *Cybernetics and system Analysis, 4*, 141–151. [in Ukrainian]
6. Yasinskyy, V.K. (2014). Mathematical theory of stochastic processes. *Chernivtsy: Rodovid*, 272 p. [in Ukrainian]
7. Koroliuk, V.S., Tsarkov, Ye.Ph., & Yasinskyy, V.K. (2009). Stochastic process. Theory and computer practice. *Chernivtsy: Zoloti lytavry*, 798 p. [in Ukrainian]
8. Shiriaev, A.N., & Bulinskiy, A.V. (2005). Theory of stochastic process. *Moscow: Fismathlit*, 408 p. [in Russian]
9. Lukashiv, T.O., & Yasinskyy, V.K. (2013). Stability in probability of stochastic dynamic system of random structure with constant after action. *Volynskyy matematychniy visnyk. Seria: Applied Mathematics, 10(191)*, 140–151. [in Ukrainian]

Одержано 24.04.2020