УДК 512.544
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).36-44

Д. Ю. Білецька[1], І. В. Шапочка[2]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
магістрантка 2-го року навчання,
biletskadiana27@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2907-4690

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
завідувач кафедри алгебри,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.shapochka@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0904-7879

ПРО ЦЕНТРАЛЬНІ РЯДИ ДЕЯКИХ ЧЕРНІКОВСЬКИХ p-ГРУП

В цій роботі досліджується структура центрального ряду черніковської p-групи G, яка містить максимальну повну абелеву підгрупу M індексу p. Добре відомо, що така група є гіперцентальною групою. З іншого боку із теорії розширень груп також добре відомо, що будову цієї групи можна визначити за допомогою певного цілочислового p-адичного матричного зображення Γ фактор-групи G/M та елементом із другої групи гомологій $H^2(G/M, M)$. Якщо група G має центральний ряд $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\omega \subset \ldots \subset G$, який є композиційним рядом, то число трансфінітних чисел множини індексів членів цього ряду будемо називати трансфінітною довжиною цього композиційного ряду. Вважатимемо, що G є адитивною групою, а Γ — матричне цілочислове p-адичне зображення фактор-групи G/M, індуковане гомоморфізмом $f : g \to f_g$, $g \in G$, із групи G в групу автоморфізмів $\operatorname{Aut} M$, де $f_g(m) = -g+m+g$, $m \in M$. Нами показано, що трансфінітна довжина композиційного ряду групи G дорівнює кратності незвідної компоненти $g+M \to 1$ зображення Γ, якщо G є абелевою групою, і на одиницю більше цього числа, якщо ж G — неабелева група.

Нехай $\mathbb{C}_{p^\infty}$ — адитивна квазіциклічна p-група, а $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ — зовнішня пряма сума n екземплярів квазіциклічної p-групи $\mathbb{C}_{p^\infty}$ для деякого натурального числа n. Добре відомо [1], що група $\operatorname{Aut} \mathbb{C}_{p^\infty}^n$ ізоморфна повній лінійній групі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, де $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел. Тому надалі для довільної матриці $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ та довільного елемента $c \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$ через $A(c)$ позначатимемо образ елемента c при автоморфізмі, що відповідає матриці A. Нехай $\{a_r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$ — множина всіх твірних елементів групи C_{p^∞}, де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, причому $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$ для довільного $r \in \mathbb{N}$. Розглянемо циклічну адитивну групу H порядку p з твірним елементом h і деяке матричне зображення Γ цієї групи степеня n над кільцем $\mathbb{Z}_p$. Образ будь-якого елемента h' групи H позначатимемо через $\Gamma_{h'}$. Визначимо дію $\cdot$ групи H на групі $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ за правилом $h' \cdot c = \Gamma_{h'}(c)$ для довільних елементів $h' \in H$ і $c \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$. Підкреслимо, що ядро $\operatorname{Ker} \Gamma$ є підгрупою стабілізатора кожного елемента із $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$. Нескладно переконатися, що множина

$$\mathfrak{z}(\Gamma) = \{c \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n \mid h \cdot c = c\}$$

є підгрупою групи $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$. Для матричного зображення Γ групи H та деякого елемента $c \in \mathfrak{z}(\Gamma)$ побудуємо групу $G(\Gamma, c)$ наступним чином:

$$G(\Gamma, c) = H \times \mathbb{C}_{p^\infty}^n,$$

а бінарна операція $+$ задається так

$$(ih, c_1) + (jh, c_2) = ((i+j)h,\ \mu_{i,j}c + jh \cdot c_1 + c_2),$$

де $i,\ j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$,

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i+j < p, \\ 1, & \text{якщо } i+j \geq p. \end{cases}$$

В [2] доведено, що таким чином побудована група є циклічним розширенням групи $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ за допомогою групи H, а як наслідок, є черніковською p-групою.

В [3] описані з точністю до ізоморфізму всі черніковські p-групи, фактор-група яких за максимальною повною абелевою підгрупою є циклічною групою порядку p. Вони вичерпуються наступними групами:

$$G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0), \quad G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1)+n_2+n_3p)})$$

де

$$\Gamma_1 : h \to \tilde{\varepsilon}, \qquad \Gamma_2 : h \to 1, \qquad \Gamma_3 : h \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— всі попарно нееквівалентні нерозкладні матричні зображення циклічної групи H над кільцем $\mathbb{Z}_p$; $\tilde{\varepsilon}$, $\langle 1 \rangle$ — відповідно $(p-1)\times(p-1)$- та $(p-1)\times 1$-матриці над кільцем $\mathbb{Z}_p$ вигляду:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle 1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

n_1, n_2, $n_3 \in \mathbb{N}_0$; $n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3$ — розкладне матричне зображення групи H з n_i екземплярами нерозкладного зображення Γ_i для $i \in \{1,2,3\}$;

$$\mathfrak{c}^{(k)} = ((p-1)a_0, (p-2)a_0, \dots, a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ раз}}), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

В роботі для кожної з груп

$$G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0), \quad G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1)+n_2+n_3p)})$$

побудовано композиційний центральний ряд.

Ключові слова: черніковська група, гіперцентральна група, центральний ряд, матричне зображення групи, незвідна компонента зображення.

1. Вступ. Нехай надалі всюди p — натуральне просте число, $\mathbb{C}_{p^\infty}$ — адитивна квазіциклічна p-група, а $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ — зовнішня пряма сума n екземплярів квазіциклічної p-групи $\mathbb{C}_{p^\infty}$ для деякого натурального числа n. Символом 0 завжди будемо позначати нульовий елемент відповідної структури. Добре відомо [1], що група $\operatorname{Aut} \mathbb{C}_{p^\infty}^n$ ізоморфна повній лінійній групі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, де $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел. Тому надалі для довільної матриці $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ та довільного елемента $c \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$ через $A(c)$ позначатимемо образ елемента c при автоморфізмі, що відповідає матриці A. Нехай $\{a_r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$ — множина всіх твірних елементів групи C_{p^∞}, де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, причому $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$ для довільного $r \in \mathbb{N}$. Якщо $A = \|\alpha_{ij}\| \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$ і

$$\alpha_{ij} = x_{ij}^{(0)} + x_{ij}^{(1)}p + x_{ij}^{(2)}p^2 + \dots \in \mathbb{Z}_p,$$
$$c_k = y_0^{(k)}a_0 + y_1^{(k)}a_1 + \dots + y_{l_k}^{(k)}a_{l_k} \in \mathbb{C}_{p^\infty},$$

де $x_{ij}^{(r)}$, $y_l^{(k)} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $l_k \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, то

$$A(c) = (c_1', c_2', \dots, c_n'),$$

де

$$c_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(c_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{l_k} \sum_{l=0}^{l_k} x_{ij}^{(r)} y_l^{(j)} p^r a_l. \tag{1}$$

Розглянемо циклічну адитивну групу H порядку p з твірним елементом h і деяке матричне зображення Γ цієї групи степеня n над кільцем $\mathbb{Z}_p$. Образ будь-якого елемента h' групи H позначатимемо через $\Gamma_{h'}$. Визначимо дію $\cdot$ групи H на групі $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$ за правилом $h' \cdot c = \Gamma_{h'}(c)$ для довільних елементів $h' \in H$ і $c \in \mathbb{C}^n_{p^\infty}$. Підкреслимо, що ядро $\operatorname{Ker}\Gamma$ є підгрупою стабілізатора кожного елемента із $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$. Нескладно переконатися, що множина

$$\mathfrak{z}(\Gamma) = \{c \in \mathbb{C}^n_{p^\infty} \mid h \cdot c = c\}$$

є підгрупою групи $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$ і що для будь-яких елементів $h' \in H$ та $c \in \mathfrak{z}(\Gamma)$ справджується рівність $h' \cdot c = c$. Для матричного зображення Γ групи H та деякого елемента $c \in \mathfrak{z}(\Gamma)$ побудуємо групу $G(\Gamma, c)$ наступним чином:

$$G(\Gamma, c) = H \times \mathbb{C}^n_{p^\infty},$$

а бінарна операція $+$ задається так

$$(ih, c_1) + (jh, c_2) = ((i+j)h,\ \mu_{i,j}c + jh \cdot c_1 + c_2), \tag{2}$$

де $i,\, j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^n_{p^\infty}$,

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i+j < p, \\ 1, & \text{якщо } i+j \geq p. \end{cases}$$

В [2] доведено, що таким чином побудована група є циклічним розширенням групи $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$ за допомогою групи H, а як наслідок, є черніковською p-групою.

В [3] описані з точністю до ізоморфізму всі черніковські p-групи, фактор-група яких за максимальною повною абелевою підгрупою є циклічною групою порядку p. Вони вичерпуються наступними групами:

$$G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0), \quad G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1)+n_2+n_3p)}) \tag{3}$$

де

$$\Gamma_1 : h \to \tilde{\varepsilon}, \qquad \Gamma_2 : h \to 1, \qquad \Gamma_3 : h \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— всі попарно нееквівалентні нерозкладні матричні зображення циклічної групи H над кільцем $\mathbb{Z}_p$; $\tilde{\varepsilon}$, $\langle 1 \rangle$ — відповідно $(p-1) \times (p-1)$- та $(p-1) \times 1$-матриці над кільцем $\mathbb{Z}_p$ вигляду:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle 1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

n_1, n_2, $n_3 \in \mathbb{N}_0$; $n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3$ — розкладне матричне зображення групи H з n_i екземплярами нерозкладного зображення Γ_i для $i \in \{1, 2, 3\}$;

$$\mathfrak{c}^{(k)} = ((p-1)a_0, (p-2)a_0, \dots, a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ раз}}), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Відомо [4], що всяка черніковська p-група є гіперцентральною групою. Знайдемо верхні центральні ряди вище перерахованих черніковських p-груп (див. 3) і доповнимо їх до композиційних рядів цих груп, якщо вони не є такими.

2. Центр групи $G(\Gamma, c)$. Нехай Γ — деяке матричне зображення групи H, $c \in \mathfrak{z}(\Gamma)$. Почнемо з загальної характеристики центру $\mathfrak{Z}(G(\Gamma, c))$ групи $G(\Gamma, c)$. Нехай $(h', c') \in \mathfrak{Z}(G(\Gamma, c))$. Тоді

$$(h', c') + (0, c'') = (0, c'') + (h', c')$$

для будь-якого елементна $c'' \in \mathbb{C}^n_{p^\infty}$. Звідси $h' \cdot c'' = c''$, а тому $\Gamma_{h'}(c'') = c''$ для всіх $c'' \in \mathbb{C}^n_{p^\infty}$, тобто $\Gamma_{h'}$ є одиничною матрицею порядку n. Як наслідок h' є елементом ядра $\operatorname{Ker}\Gamma$. З іншого боку

$$(h', c') + (h'', 0) = (h'', 0) + (h', c')$$

для будь-якого елементна $h'' \in H$, зокрема для h. Через це $h \cdot c' = c'$. Звідси $c' \in \mathfrak{z}(\Gamma)$. Таким чином, $(h', c') \in \operatorname{Ker}\Gamma \times \mathfrak{z}(\Gamma)$. Навпаки, очевидно, що будь-який елемент вигляду (h', c'), де $h' \in \operatorname{Ker}\Gamma$, $c' \in \mathfrak{z}(\Gamma)$, міститься у центрі групи $G(\Gamma, c)$. Нами доведено наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай Γ — деяке матричне зображення групи H, c — елемент із $\mathfrak{z}(\Gamma)$. Тоді центр $\mathfrak{Z}(G(\Gamma, c))$ групи $G(\Gamma, c)$ дорівнює $\operatorname{Ker}\Gamma \times \mathfrak{z}(\Gamma)$.*

Наслідок 1. *Нехай Γ — деяке матричне зображення групи H, c — елемент із $\mathfrak{z}(\Gamma)$. Тоді група $G(\Gamma, c)$ є абелевою тоді і тільки тоді, коли Γ — одиничне матричне зображення групи H.*

Наслідок 2. *Якщо ж Γ є точним матричним зображенням групи H, то центр $\mathfrak{Z}(G(\Gamma, c))$ дорівнює $\{0\} \times \mathfrak{z}(\Gamma)$.*

Надалі підгрупу $\{0\} \times \mathfrak{z}(\Gamma)$ групи $G(\Gamma, c)$ позначатимемо через $\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma)$.

3. Верхній центральний ряд групи $G(\Gamma_1, c)$. Із [3] слідує, що $\mathfrak{z}(\Gamma_1) = \langle \mathfrak{c}^{(0)} \rangle$. Отже, центр як групи $G(\Gamma_1, 0)$, так і групи $G(\Gamma_1, \mathfrak{c}^{(0)})$ дорівнює $\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1)$. Введемо позначення

$$c_{ij} = (0, \ldots, 0, a_j, 0, \ldots, 0), \tag{5}$$

де ненульовою компонентою є лише $(i+1)$-ва, $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Тому

$$\mathfrak{c}^{(0)} = (p-1)c_{10} + (p-2)c_{2\,0} + \cdots + c_{p-1\,0}.$$

Знову ж таки, як $G(\Gamma_1, 0)/\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1)$, так і фактор-група $G(\Gamma_1, \mathfrak{c}^{(0)})/\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1)$ породжується множиною елементів

$$\{(h, 0) + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1),\ c_{ij} + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1),\ (p-1)c_{1\,j+1} + (p-2)c_{2\,j+1} + \cdots + c_{p-1\,j+1} + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1) \mid \\ i \in \{1, 2, \ldots, p-2\},\ j \in \mathbb{N}_0\},$$

причому ця фактор-група є також черніковською p-групою, фактор-група якої за максимальною повною абелевою підгрупою є циклічною групою порядку p.

Оскільки із (2) слідує, що $p(h,0)=(0,\mathfrak{c}^{(0)})$, то фактор-група $G(\Gamma_1,c)/\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1)$ ізоморфна $G(\Delta,0)$, де Δ — матричне зображення групи H вигляду

$$\Delta : h \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 3 & -3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p-2 & -(p-2) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p & -(p-1) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Розглянемо матрицю

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -(p-4) & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -(p-3) & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -(p-2) & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -(p-1) & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця S є оборотною $\mathbb{Z}_p$-матрицею і $S^{-1}\Delta(h)S=\Gamma_1(h)$. Як наслідок

$$G(\Delta,0)\cong G(\Gamma_1,0).$$

Застосовуючи метод математичної індукції одержуємо, що верхній центральний ряд групи G де $G=G(\Gamma_1,0)$ або $G=G(\Gamma_1,\mathfrak{c}^{(0)})$ має вигляд

$$\{0\}=Z_0\subset Z_1=\{0\}\times\langle\mathfrak{c}^{(0)}\rangle\subset Z_2\subset\ldots\subset Z_\omega\subset Z_{\omega+1}=G, \tag{7}$$

де множина індексів членів цього ряду є ординалом, що містить єдине трансфінітне ординальне число ω. Причому для кожного скінченного ординального числа i фактор Z_{i+1}/Z_i ізоморфний циклічній групі $\langle\mathfrak{c}^{(0)}\rangle$, $Z_\omega=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}Z_i$, а фактор $Z_{\omega+1}/Z_\omega$ ізоморфний циклічній групі H. Це показано засобами теорії груп у роботі [5] і узагальнено для ширшого класу гіперцентральних груп із застосуванням теорії зображень у роботі [6]. Очевидно, ряд (7) є композиційним рядом групи G.

4. Верхній центральний ряд групи $G(\Gamma_2,0)$. Із наслідку 1 випливає, що верхній центральний ряд групи $G(\Gamma_2,0)$ складається лише з двох членів $\{0\}=Y_0\subset Y_1=G(\Gamma_2,0)$. Доповнимо цей ряд до композиційного ряду

$$\{0\}=Z_0\subset Z_1\subset Z_2\subset\ldots\subset Z_\omega\subset Z_{\omega+1}=G(\Gamma_2,0), \tag{8}$$

де множина індексів членів цього ряду є ординалом, що містить єдине трансфінітне ординальне число ω. Причому для кожного скінченного ординального числа i член Z_i цього ряду є циклічною групою $\langle(0,a_{i-1})\rangle$, а $Z_\omega=\{0\}\times\mathbb{C}^1_{p^\infty}$. Підкреслимо, що композиційний ряд (8) є і центральним рядом групи G, у якого множина індексів його членів є ординалом, що містить єдине трансфінітне ординальне число ω.

5. Верхній центральний ряд групи $G(\Gamma_3, 0)$**.** Із [3] слідує, що

$$\mathfrak{z}(\Gamma_3) = \{((p-1)u, (p-2)u, \ldots, u, pu) \mid u \in \mathbb{C}_{p^\infty}\}\,. \tag{9}$$

Очевидно $\mathfrak{z}(\Gamma_3) \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$. Фактор-група $G(\Gamma_3, 0)/\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_3)$ породжується множиною елементів (див. позначення (5))

$$\{(h,0) + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_3),\ c_{ij} + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_3),\ (p-1)c_{1\,j+1} + (p-2)c_{2\,j+1} + \cdots + c_{p-1\,j+1} + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_3) \mid \\ i \in \{1, 2, \ldots, p-2\},\ j \in \mathbb{N}_0\},$$

причому ця фактор-група є також черніковською p-групою, яка є розширенням групи $\mathbb{C}_{p^\infty}^{p-1}$ за допомогою циклічної групи порядку p. Аналогічно випадку групи $G(\Gamma_1, c)$ можна показати, що ця фактор-група ізоморфна групі вигляду $G(\Delta, 0)$, де Δ — матричне зображення групи H вигляду (6), а отже, ізоморфна і групі $G(\Gamma_1, 0)$.

Із вище одержаних результатів слідує, верхній центральний ряд групи $G = G(\Gamma_3, 0)$ має вигляд

$$\{0\} = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_\omega \subset Y_{\omega+1} = G, \tag{10}$$

де $Y_1 = \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_3)$ (див. (9)), для кожного натурального i фактор Y_{i+1}/Y_i ізоморфний циклічній групі $\langle \mathfrak{c}^{(0)} \rangle$, $Y_\omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Y_i$, а фактор $Y_{\omega+1}/Y_\omega$ ізоморфний циклічній групі H. Доповнимо верхній центральний ряд (10) до композиційного ряду

$$\{0\} = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\gamma \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_\omega \subset Y_{\omega+1} = G, \tag{11}$$

де $Z_{j+1} = \langle \mathfrak{c}_j^{(1)} \rangle$,

$$\mathfrak{c}_j^{(1)} = (p-1)c_{1j} + (p-2)c_{2j} + \cdots + c_{p-1\,j} + pc_{p\,j}, \qquad j \in \mathbb{N}_0,$$

$Z_\gamma = Y_1 = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Z_i$. Ряд (11) є центральним рядом групи G, у якого множина індексів його членів є ординалом, що містить два трансфінітні ординальні числа γ і ω.

6. Верхній центральний ряд групи $G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0)$**.** Із теорії розширень абелевих груп [7] випливає, що якщо матричне $\mathbb{Z}_p$-зображення Γ є розкладним вигляду $\Gamma = n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3$, де n_1, n_2, $n_3 \in \mathbb{N}_0$, то

$$\mathfrak{z}(\Gamma) \cong \underbrace{\mathfrak{z}(\Gamma_1) \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{z}(\Gamma_1)}_{n_1 \text{ раз}} \dotplus \underbrace{\mathfrak{z}(\Gamma_2) \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{z}(\Gamma_2)}_{n_2 \text{ раз}} \dotplus \underbrace{\mathfrak{z}(\Gamma_3) \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{z}(\Gamma_3)}_{n_3 \text{ раз}}.$$

Тому структуру кожного фактору верхнього центрального ряду групи $G = G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0)$ можна легко визначити за допомогою попередньо розглянутих випадків. Зокрема центр Y_1 цієї групи ізоморфний прямій сумі елементарної абелевої p-групи рангу n_1 та групи $\mathbb{C}_{p^\infty}^{n_2+n_3}$, що в свою чергу є прямою сумою $n_2 + n_3$ екземплярів квазіциклічної p-групи $\mathbb{C}_{p^\infty}$. Аналогічно випадку групи $G(\Gamma_3, 0)$ фактор-група G/Y_1 ізоморфна групі $G((n_1 + n_3)\Gamma_1, 0)$. Через кожен наступний фактор верхнього центрального ряду

$$\{0\} = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_\omega \subset Y_{\omega+1} = G \tag{12}$$

групи G є елементарною абелевою p-групою рангу $n_1 + n_3$. Доповнюючи його до композиційного ряду, одержимо центральний ряд, множина індексів якого є ординалом, що містить $n_2 + n_3 + 1$ трансфінітних ординальних числа.

Верхній центральний ряд групи $G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1)+n_2+n_3p)})$ аналогічний ряду (12).

Означення 1. *Нехай G — гіперцентральна група, що має центральний ряд*

$$\{0\} = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\omega \subset \ldots \subset G, \tag{13}$$

який є композиційним рядом. Число трансфінітних чисел множини індексів членів цього ряду будемо називати трансфінітною довжиною композиційного ряду (13).

Оскільки будь-які два композиційні ряди групи ізоморфні, то трансфінітна довжина композиційного ряду групи G не залежить від вибору цього ряду. Отже, із вище одержаних результатів слідує наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай G є адитивною черніковською p-групою, фактор-група G/M якої за максимальною повною абелевою підгрупою M є циклічною групою порядку p. Якщо Γ — матричне цілочислове p-адичне зображення фактор-групи G/M, індуковане гомоморфізмом $f : g \to f_g$, $g \in G$, із групи G в групу автоморфізмів $\operatorname{Aut} M$, де $f_g(m) = -g + m + g$, $m \in M$, то трансфінітна довжина композиційного ряду групи G дорівнює кратності незвідної компоненти $g + M \to 1$ зображення Γ, якщо G є абелевою групою, і на одиницю більше цього числа, якщо ж G — неабелева група.*

Список використаної літератури

1. Курош А. Г. Теория групп. Москва: Наука, 1967. 648 с.
2. Холл М. Теория групп. Москва: Мир, 1966. 543 с.
3. Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С. Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп. *Український математичний журнал.* 1992. Том 44, №6. С. 742–753.
4. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. Москва: Наука, 1980. 384 с.
5. Baumslag G., Blackburn N. Groups with cyclic upper central factors. *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1960. 10. P. 531–544.
6. Hartley B. A dual approach to Chernikov modules. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Socciety.* 1977. P. 215–239.
7. Маклейн С. Гомология. Москва: Мир, 1966. 543 с.

Biletska D. Yu., Shapochka I. V. On central series of some Chernikov p-groups.

In this paper, we study the structure of the central series of the Chernikov p-group G, which contains the maximum complete Abelian subgroup M of the index p. It is well known that such a group is a hypercental group. On the other hand, it is also well known from the theory of group extensions that the structure of this group can be determined by means of a certain integer p-adic matrix image Γ of the factor group G/M and an element from the second group of homologies $H^2(G/M, M)$. If the group G has a central series $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\omega \subset \ldots \subset G$, which is a composition series, the number of transfinite numbers of the set of indices of the members of this series will be called the transfinite length of this composition series. Assume that G is an additive group, and Γ is a matrix representaion over the ring of p-adic integers of the factor group G/M induced by the homomorphism $f : g \to f_g$, $g \in G$, from the group G to the group of automorphisms

$\operatorname{Aut} M$, where $f_g(m) = -g + m + g$, $m \in M$. We have shown that the transfinite length of the composition series of the group G is equal to the number of the irreducible component $g + M \to 1$ of the representation Γ, if G is an Abelian group, and one more of this number, if G — non-Abelian group.

Let $\mathbb{C}_{p^\infty}$ be an additive quasicyclic p-group, and let $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ be an external direct sum n instances of the quasicyclic p-group $\mathbb{C}_{p^\infty}$ for some positive integer n. It is well known [1] that the group $\operatorname{Aut} \mathbb{C}_{p^\infty}^n$ isomorphic to the complete linear group $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, where $\mathbb{Z}_p$ the ring of p-adic integers. Therefore, in the future for an arbitrary matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ and an arbitrary element $c \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$ through $A(c)$ denote the image of the element c in the automorphism that corresponds to the matrix A. Let $\{a_r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$ be the set of all generators of the group C_{p^∞}, where $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$ for all $r \in \mathbb{N}$.

Consider a cyclic additive group H of order p with a generating element h and some matrix image Γ of this group of degree n over the ring $\mathbb{Z}_p$. The image of any element h' of the group H is denoted by $\Gamma_{h'}$. Determine the action $\cdot$ of the group H on the group $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ by the rule $h' \cdot c = \Gamma_{h'}(c)$ for arbitrary elements $h' \in H$ and $c \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$. We emphasize that the kernel $\operatorname{Ker} \Gamma$ is a subgroup of the stabilizer of each element with $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$. It is easy to see that the set

$$\mathfrak{z}(\Gamma) = \{c \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n \mid h \cdot c = c\}$$

is a subgroup of $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$. For the matrix image Γ of the group H and some element $c \in \mathfrak{z}(\Gamma)$ we construct the group $G(\Gamma, c)$ as follows:

$$G(\Gamma, c) = H \times \mathbb{C}_{p^\infty}^n,$$

and the binary operation $+$ is set as follows

$$(ih, c_1) + (jh, c_2) = ((i + j)h,\ \mu_{i,j} c + jh \cdot c_1 + c_2),$$

where $i, j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$,

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{if } i + j < p, \\ 1, & \text{if } i + j \geq p. \end{cases}$$

In [2] it is proved that the group constructed in this way is a cyclic extension of the group $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ by the group H, and, as a consequence, is a Chernikov p-group.

In [3], all Chernikov p-groups are described up to the isomorphism, the factor group of which by the maximum complete Abelian subgroup is a cyclic group of order p. They are limited to the following groups:

$$G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0), \quad G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1) + n_2 + n_3 p)})$$

where

$$\Gamma_1 : h \to \tilde{\varepsilon}, \qquad \Gamma_2 : h \to 1, \qquad \Gamma_3 : h \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

are all pairwise non-equivalent indecomposable matrix images of the cyclic group H over the ring $\mathbb{Z}_p$; $\tilde{\varepsilon}$, $\langle 1 \rangle$ are respectively $(p-1) \times (p-1)$- and $(p-1) \times 1$-matrices over the ring $\mathbb{Z}_p$ of the form:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle 1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$; $n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3$ is a decomposable matrix representation of the group H with n_i instances of the indecomposable component Γ_i for $i \in \{1, 2, 3\}$;

$$\mathfrak{c}^{(k)} = ((p-1)a_0, (p-2)a_0, \dots, a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k\text{times}}), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

In the work for each of the groups

$$G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0), \quad G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1)+n_2+n_3p)})$$

the composition central series is build.

Keywords: Chernikov group, hypercentral group, central series, matrix representation of group, irreducible component of representation.

References

1. Kurosh, A. G. (1967). Teoriia grupp [Group theory]. *Moskva: Nauka* [in Russian]
2. Kholl, M. (1966). Teoriia grupp [Group theory]. *Moskva: Mir* [in Russian]
3. Gudivok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikovskiye p-gruppy i tselochislennyye p-adicheskiye predstavleniya konechnykh grupp [Chernikov p-groups and integral p-adic representations of finite groups], *Ukrain. Mat. Zh., 44*, 742–753. [in Russian]
4. Chernikov, S. N. (1980). Gruppy s zadannymi svoystvami sistemy podgrupp [Groups with given properties of systems of subgroups]. *Moskva: Nauka* [in Russian]
5. Baumslag, G., & Blackburn, N. (1960). Groups with cyclic upper central factors. *Proceedings of the London Mathematical Society, 10*, 531–544.
6. Hartley, B. (1977). A dual approach to Chernikov modules. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Socciety*, 215–239.
7. Makleyn, S. (1966). Gomologiya [Homology]. *Moskva: Mir* [in Russian].

Одержано 27.09.2020