УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).82-90

Ю. Ю. Млавець[1], О. О. Синявська[2]

[1] ДВНЗ "Ужгородський національний університет",
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1480-9017

[2] ДВНЗ "Ужгородський національний університет",
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2711-3940

УМОВИ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ВЕЙВЛЕТ РОЗКЛАДІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ ПРОСТОРІВ $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

Ця стаття присвячена знаходженню умов рівномірної збіжності з ймовірністю одиниця вейвлет розкладів класу випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Вивчення загальних властивостей таких випадкових процесів, отримання оцінок розподілу функціоналів від процесів з тих чи інших просторів випадкових величин, встановлення умов рівномірної збіжності випадкових функціональних рядів є одними із поширених задач теорії випадкових процесів.

Вейвлет аналіз є достатньо молодою галуззю математики з багатьма цікавими проблемами й задачами. Однак дану теорію, зокрема вейвлет розклади функцій, на даний час широко використовують як у теорії випадкових процесів, так і у різних областях науки. Наприклад, вейвлет аналіз активно застосовується для фільтрації і попередньої обробки даних, аналізу стану і прогнозування ситуації на фондових ринках, розпізнавання образів, при обробці і синтезі різних сигналів, зокрема при обробці мовних сигналів, біомедичних сигналів, для розв'язання завдань стиснення і обробки зображень, при навчанні нейромереж і в багатьох інших випадках. Тому є актуальною задача знаходження умов рівномірної збіжності вейвлет розкладів класу випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

У даній роботі ми зосереджуємося на основних властивостях просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та деяких елементах теорії вейвлетів.

На початку статті наведено основні означення, теореми, приклади випадкових величин з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та поняття і властивості мажоруючої характеристики цього простору. Далі подано необхідні відомості з вейвлет аналізу, зокрема: означення f-, m-вейвлетів та умови S, а також умови розкладу функцій по цим базисам. Також наведено умови рівномірної збіжності з імовірністю одиниця вейвлет розкладів деяких функцій.

Основним результатом статті є умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Дані умови базуються на оцінках розподілу супремуму на $\mathbb{R}$ випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та рівномірної неперервності сепарабельного вимірного випадкового процесу $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ з простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ на деякому відрізку. Також, наведено приклади функцій, для яких виконується одна із умов теореми про оцінку мажоруючої характеристики $\varkappa(n)$ простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Ключові слова: Простори випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, мажоруюча характеристика, випадкові процеси, вейвлети, вейвлет розклади.

1. Вступ. У 90-х роках XX століття почав розвиватися такий напрямок в теорії випадкових процесів, як вейвлет аналіз. Вейвлет аналіз – це нова, цікава галузь математики з своїми проблемами й задачами, багато з яких до цього часу не вирішені. Вейвлет аналіз вивчає умови, за яких функції можуть бути розкладені в ряди по базисам вейвлетів, тобто по ортогональним системам, що породжуються однією функцією $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$, а саме, по системам функцій $\varphi_{0k}(x) = \varphi(x-k)$ та $\varphi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k)$.

Крім того, цю теорію ефективно можна застосовувати на практиці. Наприклад: при записах інформації, записах звуку та зображенні на компакт диски та комп'ютери. Як показують дослідження, що запис та збереження інформації за допомогою вейвлетів набагато ефективніший, ніж інші, наприклад, ніж використання розкладів Фур'є. Ефективно використовуються вейвлети також при кодуванні інформації.

Світові дослідження пропонують новий науковий підхід – нечіткі вейвлети. Інновація полягає в тому, що за допомогою вейвлетів отримують множину інформативних коефіцієнтів, що розглядають за допомогою теорії нечіткої логіки та нечітких множин [1]. За допомогою цього підходу розв'язують складні задачі класифікації сигналів, використовуючи знання, досвід та міркування експертів або експериментальні дані [2].

Вагомий внесок у створення теорії вейвлет аналізу належить вченим Західної Європи та Північної Америки, таким як С. Маллат [3], І. Мейер [4], І. Добеші [5] та Ч. Чуі [6].

Майже одночасно з першими роботами по вейвлет аналізу з'явились роботи, де вейвлет розклади застосовувались до задач теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів. Розклади випадкових процесів по системам вейвлетів використовуються для їх моделювання та збереження траєкторії цих процесів з метою їх подальшого відновлення.

На основі вейвлет розкладів побудовано оцінки щільностей розподілів випадкових величин та спектральні функції стаціонарних випадкових процесів [7]. Дослідженням швидкості зростання супремуму випадкових процесів та умов рівномірної збіжності з імовірністю одиниця на обмеженому інтервалі вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин займалися Ю. В. Козаченко і М. М. Перестюк [8, 9].

В даній роботі знаходяться умови, за яких вейлет розклади випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ збігаються рівномірно на обмеженому інтервалі з імовірністю одиниця.

Робота складається із вступу та трьох розділів. В другому розділі наведені необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В третьому розділі розглядаються вейвлети, вейвлет розклади невипадкових функцій та умови, за яких розклади функцій рівномірно збігаються на певному скінченному інтервалі. В четвертому розділі знаходяться загальні умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів для випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

2. $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – простори.

Означення 1 (див. [10]). *Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова:*

$$\sup_{u\geq 1} \frac{(\mathsf{E}\,|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Подібне означення сформульоване в роботі С. В. Єрмакова та Є. І. Островського [11]. Але там вимагалось, щоб $E\xi = 0$, якщо $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Крім того розглядались випадкові величини, такі що $E\left|\xi\right|^u = \infty$ при певному $u > 0$.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою*

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\ge 1} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Доведення. Доведемо спочатку, що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – лінійний нормований простір. Очевидно, що $\|\xi\|_\psi = 0$, тоді і тільки тоді, коли $\xi = 0$ з імовірністю одиниця. Справедлива рівність

$$\|\alpha\xi\|_\psi = \sup_{u\ge 1} \frac{\left(E\left|\alpha\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{u\ge 1} \frac{|\alpha|\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = |\alpha|\,\|\xi\|_\psi .$$

Очевидна і нерівність трикутника. Дійсно,

$$\|\xi_1+\xi_2\|_\psi = \sup_{u\ge 1} \frac{\left(E\left|\xi_1+\xi_2\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \le \sup_{u\ge 1} \frac{\left(E\left|\xi_1\right|^u\right)^{1/u} + \left(E\left|\xi_2\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \le$$

$$\le \sup_{u\ge 1} \frac{\left(E\left|\xi_1\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} + \sup_{u\ge 1} \frac{\left(E\left|\xi_2\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \|\xi_1\|_\psi + \|\xi_2\|_\psi .$$

Покажемо тепер, що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – повний простір, тобто, якщо $\xi_n \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\|\xi_n - \xi_l\|_\psi \to 0$ при $n, l \to \infty$, то існує випадкова величина ξ, така що $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\|\xi_n - \xi_l\|_\psi \to 0$. З означення норми випливає, що для будь-якого $u \ge 1$

$$\left(E\left|\xi_n - \xi_l\right|^u\right)^{1/u} \le \psi(u)\,\|\xi_n - \xi_l\|_\psi . \tag{1}$$

Оскільки $\|\xi_n - \xi_l\|_\psi \to 0$ при $n, l \to \infty$, то і $\left(E\left|\xi_n - \xi_l\right|^u\right)^{1/u} \to 0$ при $n, l \to \infty$. Простір $L_u(\Omega)$, $u \ge 1$ – повний, тому що існує випадкова величина $\xi \in L_u(\Omega)$, що $\xi_n \to \xi$ при $n \to \infty$ в нормі цього простору. Легко бачити, що існує $\xi \in L_u(\Omega)$ при всіх $u \ge 1$, що $\left(E\left|\xi_n - \xi_l\right|^u\right)^{1/u} \to 0$ при $n \to \infty$. Дійсно, коли $\xi_n \to \xi$ в нормі простору $L_u(\Omega)$, то $\xi_n \to \xi$ в нормі простору $L_v(\Omega)$, де $v < u$.

Позначимо η_s, $s = 1, 2, ...$ такі випадкові величини, що $\xi_n \to \eta_s$ в нормі просторів $L_u(\Omega)$, де $s - 1 < u \le s$. Тоді існують підпослідовності ξ_{n_s}, що збігаються до η_s з імовірністю одиниця. Нехай A_s множина $P\left(A_s\right) = 1$, на якій ξ_{n_s} збігається до η_s. Тоді на множині $\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s$ всі η_s рівні та $P\left\{\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s\right\} = 1$.

Нехай тепер ξ – випадкова величина рівна η_s на множині $\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s$. Зрозуміло, що $P\left\{\eta_s \ne \xi\right\} = 0$. Тому $\xi_n \to \xi$ в $L_u(\Omega)$, тоді ж коли $\xi_n \to \eta_s$ в цьому ж просторі.

Отже, при всіх $u \ge 1$ з нерівності (1) випливає, що

$$\left(E\left|\xi_n - \xi_l\right|^u\right)^{1/u} \le \psi(u) \sup_{r>n} \|\xi_n - \xi_r\|_\psi < \infty.$$

Якщо в останній нерівності спрямувати l до нескінченності, тоді отримаємо, що при всіх $n \geq 1$ та $u \geq 1$

$$\left(E\left|\xi_n - \xi\right|^u\right)^{1/u} \leq \psi(u) \sup_{r>n} \|\xi_n - \xi_r\|_\psi < \infty. \tag{2}$$

Отже,

$$\sup_{u\geq 1} \frac{\left(E\left|\xi_n - \xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Тобто випадкові величини $\xi_n - \xi$ при $n \geq 1$ належать простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Оскільки $\|\xi\|_\psi \leq \|\xi - \xi_n\|_\psi + \|\xi_n\|_\psi < \infty$, то випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. З нерівності (2) випливає, що $\|\xi_n - \xi\|_\psi \leq \sup\limits_{r>n} \|\xi_n - \xi_r\|_\psi \to 0$ при $n \to \infty$. Тобто $\xi_n \to \xi$ в нормі простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Теорему доведено.

Наведемо приклади випадкових величин із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Приклад 1. *Випадкова величина ξ, для якої з імовірністю одиниця виконується умова $|\xi| < C$, де $C > 0$ – деяка константа, належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, що породжений будь-якою функцією ψ з означення 1:*

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leq \sup_{u\geq 1} \frac{\left(C^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{u\geq 1} \frac{C}{\psi(u)} = \frac{C}{\psi(1)}.$$

Приклад 2. *Випадкова величина ξ, що має розподіл Лапласа з щільністю $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u$, що встановлюється еквівалентністю $\sqrt[k]{\mathsf{E}\left|\xi\right|^k} = \sqrt[k]{k!} \sim k$ при $k \geq 1$.*

Приклад 3. *Нормальна випадкова величина $\xi = N(0,1)$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/2}$, оскільки $\sqrt[2l]{\mathsf{E}\left|\xi\right|^{2l}} = \sqrt[2l]{\frac{(2l)!}{2^l l!}} \sim l^{1/2}$ при $l \geq 1$.*

Означення 2 (див. [10]). *Неспадна числова послідовність $\varkappa(n) > 0, n \geq 1$ називається M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i, $i = 1, 2, \dots, n$ із цього простору, виконується нерівність:*

$$\left\| \max_{1\leq i\leq n} |\xi_i| \right\|_\psi \leq \varkappa(n) \max_{1\leq i\leq n} \|\xi_i\|_\psi.$$

Теорема 2 (див. [10]). *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{u\geq 1} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$$

є мажоруючою характеристикою простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Означення 3 (див. [12]). *Скажемо, що випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$, де T – деяка параметрична множина, належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для будь-якого $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.*

3. Вейвлет базиси та розклади функцій по цим базисам. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\} \in L_2(\mathbb{R})$, а $\widehat{\varphi}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-iyx}\varphi(x)dx$ – перетворення Фур'є функції $\varphi : \varphi_{0k}(x) = \varphi(x - k)$.

Означення 4 (див. [5,13]). *Функція φ називається f-вейвлетом, якщо виконуються такі умови:*

1) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(y+2\pi k)|^2 = 1$ *майже скрізь;*
2) *існує така 2π-періодична функція $m_0(x) \in L_2([0;2\pi])$, що майже скрізь $\widehat{\varphi}(y) = m_0\left(\frac{y}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right)$;*
3) $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ *та $\widehat{\varphi}(y)$ неперервні в нулі.*

Означення 5 (див. [5, 13]). *Функція $\delta(x)$ називається m-вейвлетом, що відповідає f-вейвлету φ, якщо її перетворення Фур'е має вигляд:*

$$\widehat{\delta}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2}+\pi\right)} \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\} \widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right).$$

Нехай $\varphi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi\left(2^j x - k\right)$, $\delta_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\delta\left(2^j x - k\right)$, $j, k \in \mathbb{Z}$.

Відомо (див. [7, 13]), що система функцій $\{\varphi_{0k}, \delta_{jk}, j = 0, \ldots, k \in \mathbb{Z}\}$ є ортонормованим базисом в $L_2(\mathbb{R})$. Будь-яка функція $f \in L_2(\mathbb{R})$ може бути зображена у вигляді ряду, що збігається у середньому квадратичному

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{jk}\delta_{jk}(x), \tag{3}$$

де

$$\alpha_{0k} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi_{0k}(x)}dx,\ \beta_{jk} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\delta_{jk}(x)}dx \tag{4}$$

та

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_{0k}|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\beta_{jk}|^2 < \infty.$$

Зображення (3) називається вейвлет зображенням.

Зауваження 1. *Оскільки інтеграли, що визначені у рівностях (4) для α_{0k} і β_{jk}, існують не лише для функцій із $L_2(\mathbb{R})$, то можна отримати вейвлет розклади для більш широкого класу функцій, ніж простір $L_2(\mathbb{R})$, які будуть збігатися в певних нормах.*

Означення 6 (див. [5, 13]). *Нехай φ – f-вейвлет. Для φ – виконується умова S, якщо існує парна функція $\Phi = \{\Phi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ така, що $\Phi(0) < \infty$, $\Phi(x)$ – монотонно спадає при $x \geq 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \Phi(|x|) < \infty$ та $|\varphi(x)| \leq \Phi(|x|)$ для $x \in \mathbb{R}$.*

Лема 1 (див. [14]). *Нехай для f-вейвлету φ виконується умова S з функцією Φ, а $\delta(x)$ – m-вейвлет, що відповідає φ. Тоді при всіх $x \in \mathbb{R}$ має місце нерівність*

$$|\delta(x)| \leq B\Phi\left(\left|\frac{2x-1}{4}\right|\right),$$

де $0 < B < \infty$ – деяка константа.

Теорема 3 (див. [14]). *Нехай для f-вейвлету φ виконується умова S із функцією Φ, $c = \{c(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ – така парна функція, що $c(x) > 1$, $x \in \mathbb{R}$, $c(x)$*

– монотонно зростає при $x > 0$ *та* $\int\limits_{\mathbb{R}} c(x)\Phi(|x|) < \infty$. *Крім того, існує така функція* $0 < A(u) < \infty$, $u > 0$, *що для досить великих* x

$$c(ax) \leq c(x) \cdot A(a),\ a > 0.$$

Якщо $f = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ *– така вимірна на* $\mathbb{R}$ *функція, що* $|f(x)| \leq c(x)$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x)$ *– неперервна на інтервалі* (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$, *тоді*

$$f_m(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{jk}\delta_{jk}(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x),$$

$$\alpha_{0k} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi_{0k}(x)}dx,\ \beta_{jk} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\delta_{jk}(x)}dx,$$

рівномірно на кожному відрізку $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

4. Умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Наступна теорема дає загальні умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів для випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Теорема 4. *Нехай* $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ *– сепарабельний, вимірний, випадковий процес з* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, $T_k = [a_k, a_{k+1}]$, $-\infty < a_k < a_{k+1} < +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$. *Для кожного* T_k *існує неперервна строго монотонна зростаюча функція* $\sigma_k(h)$, $0 \leq h \leq (a_{k+1} - a_k)$, $\sigma_k(0) = 0$, *така, що*

$$\sup_{\substack{|t-s|\leq h\\ t,s\in T_k}} \left\|X(t) - X(s)\right\|_\psi \leq \sigma_k(h).$$

Нехай, також виконуються умови:

1) $\int\limits_0^{\gamma_k} \varkappa\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right) du < \infty$, *де* $\varkappa(n)$ *– мажоруюча характеристика,* $\gamma_k = \sigma_k\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)$;
2) *існує деяка неперервна функція* $c = \{c(t),\ t \in \mathbb{R}\}$, *що*
$$c(t) > 1,\ r_k = \inf_{t\in T_k} c(t);$$
3) *для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *збігається ряд* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \inf\limits_{u\geq 1} \frac{B_k^u(\psi(u))^u}{(\varepsilon r_k)^u}$,
де $B_k = \inf\limits_{t\in T_k} \|X(t)\|_\psi + \frac{1}{p_k(1-p_k)} \int\limits_0^{\gamma_k p_k} \varkappa\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right) du$, p_k *– будь-які числа,* $0 < p_k < 1$;
4) *функція* $\psi(u)$ *така, що для мажоруючої характеристики простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *виконується умова*
$$\varkappa(n^2) \leq C_\varkappa \varkappa(n), \tag{5}$$
де $C_\varkappa > 0$ *– деяка константа;*
5) *для процесу* X *з деякого інтервалу* (a, b) *виконується умова:*
$$\sup_{\rho(t,s)\leq h} \left\|X(t) - X(s)\right\|_\psi \leq \sigma(h),$$
де $\sigma(h)$, $0 \leq h \leq b - a$, *– така неперервна, монотонно зростаюча функція,* $\sigma(0) = 0$ *та для будь-якого* $z > 0$ *виконується умова* $\int\limits_0^z \varkappa\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) du < \infty$;

6) *нехай* φ *– деякий* f*-вейвлет, а* δ *– відповідний* m*-вейвлет, причому для* φ *має місце умова* S *з функцією* Φ*;*
7) *для функції* $c(x)$ *існує функція* $0 < A(u) < \infty$*,* $u > 0$*, що для досить великих* x*,* $a > 0$*,* $c(ax) \leq c(x)A(a)$ *та* $\int\limits_R c(x)\Phi(|x|) < \infty$*.*

Тоді для будь-якого відрізку $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ $X_n(t) \to X(t)$ *при* $n \to \infty$ *рівномірно по* $t \in [\alpha, \beta]$ *з імовірністю одиниця, де*

$$X_n\,(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_{jk}\delta_{jk}(x),$$

$$\xi_{0k} = \int\limits_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\varphi_{0k}(t)}dt,\ \eta_{jk} = \int\limits_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\delta_{jk}(t)}dt.$$

Доведення. Доведення теореми випливає з теореми 3. Оскільки, за теоремою 5.5.19 [12] існує функція $c(t)$ і випадкова величина ξ, що з імовірністю одиниця $|X(t)| < c(t)\xi$. Крім того, згідно з теоремою 4 [15] випадковий процес $X(t)$ з імовірністю одиниця рівномірно неперервний на відрізку $[a, b]$.

Зауваження 2. *Умова* (5) *теореми* 4 *виконуються для функцій* $\psi(u) = u^\alpha$*,* $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$*. Якщо* $\psi(u) = u^\alpha$*, тоді* $\varkappa(n^2) = 2^\alpha\varkappa(n)$*, тобто* $C_\varkappa = 2^\alpha$*, а коли* $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$*, тоді* $\varkappa(n^2) \leq 2^\lambda\varkappa(n)$*, тобто* $C_\varkappa = 2^\lambda$*.*

5. Висновки. Вейвлети й засновані на них інтегральні вейвлет-перетворення були запропоновані на початку 90-х років минулого століття (хоча перший найпростіший тип вейвлета, був описаний А. Хааром ще в 1909 році) і надалі інтенсивно розвиваються. Найбільший внесок у розробку теоретичних основ вейвлетів внесли Ю. Мейер, І. Добеші, С. Маллат та інші вчені, що опублікували перші теоретичні роботи в цьому напрямку і змогли донести їх до широкої наукової спільноти.

Вейвлети є порівняно новими математичними поняттями й об'єктами, застосування яких може теоретично строго наблизити будь-яку функцію або будь-який сигнал. Тому вони досить перспективні у вирішенні багатьох математичних завдань наближення (інтерполяції, апроксимації, регресії і т.д.) функцій, сигналів і зображень. Вейвлет-обробка сигналів забезпечує можливість досить ефективного стиску сигналів та їхнього відновлення з малими втратами інформації, а також розв'язання завдань фільтрації сигналів.

В роботі наведено необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Розглянуто вейвлети, вейвлет розклади невипадкових функцій та умови, за яких розклади функцій рівномірно збігаються на певному скінченному інтервалі. Знайдено загальні умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів для випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Список використаної літератури

1. Polishchuk V. Fuzzy Method for Evaluating Commercial Projects of Different Origin. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, Issue 12. P. 60–73. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i5.60
2. Поліщук В. В., Маляр М. М., Волошин О. Ф., Шаркаді М. М. Інформаційне моделювання нечітких знань. *Радіоелектроніка, інформатика, управління.* 2018. № 4. С. 84–95. DOI: 10.15588/1607-3274-2018-4-8

3. Mallat S. A wavelet tour of signal processing. San Diego: Academic Press, 1998. 577 p.
4. Meyer Y. Ondelettes et Opérateurs. Paris: Hermann, 1990. 216 p.
5. Daubechies I. Ten lecture on wavelets. Philadelphia: Soc. Industrial and Appl. Math., 1992. 324 p.
6. Chui C. An introduction to wavelets. New York: Academic Press, 1992. 266 p.
7. Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A. Wavelets, approximation and statistical applications. New York: Springer, 1998. 265 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-2222-4.
8. Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M. On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables I. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2007. Vol. 59, No. 12. P. 1850–1869. DOI: 10.1007/s11253-008-0030-y
9. Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M. On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables II. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2008. Vol. 60, No. 6. P. 876–900. DOI: 10.1007/s11253-008-0106-8
10. Kozachenko Yu. V., Mlavets Yu. Yu. The Banach spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ of random variables. *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* 2013. Vol. 86. P. 92–107. DOI: 10.1090/S0094-9000-2013-00892-8
11. Ермаков С. В., Островский Е. И. Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей. *Деп. в ВИНИТИ.* 1986. № 752-В.86.0. С. 42.
12. Kozachenko Yuriy, Mlavets Yuriy Stochastic processes from $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ spaces. *Contemporary Mathematics and Statistics.* 2014. Vol. 2., No. 1. P. 55–75. DOI: 10.7726/cms.2014.1004
13. Козаченко Ю. В. Лекції з вейвлет аналізу. Київ: ТВіМС, 2004. 147 с.
14. Дарійчук І. В., Козаченко Ю. В., Перестюк М. М. Випадкові процеси з просторів Орліча. Чернівці: Золоті литаври, 2011. 212 с.
15. Млавець Ю. Ю. Про розподіл супремумів приростів випадкових процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика.* 2012. Вип. 23., № 1. С. 79–88.

Mlavets Yu. Yu., Syniavska O. O. Conditions for the uniform convergence of wavelet expansions of stochastic processes from $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ spaces.

This paper is devoted to the search of conditions for uniform convergence of wavelet expansions of stochastic processes from the spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ with probability one.

The most common problems in the theory of stochastic processes are the study of the general properties of such stochastic processes, obtaining estimates for the distribution of some functionals of processes from some spaces of random variables, establishing conditions for uniform convergence of random functional series.

Wavelet analysis is a relatively young field of mathematics with plenty of curious problems and challenges. However, this theory, in particular, wavelet expansions of functions is frequently used in the theory of stochastic processes and other areas of science. For instance, wavelet analysis is widely used for data filtering and data preprocessing, analysis of the state, and forecasting the situation in the stock markets, pattern recognition, synthesis, and signal processing, namely speech signals processing and biomedical signals. Likewise, wavelets are used for solving image compression problem and image processing, training neural networks, and in many other cases. Therefore, today topical is the task of finding conditions for uniform convergence of wavelet expansions of stochastic processes from the space $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Our focus in this paper is on the basic properties of spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ and some elements of wavelet theory. At the beginning of the article the basic definitions, theorems, examples of random variables from the space $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, concept, and properties of majorizing characteristic such space are given. Then we introduce the necessary background from wavelet theory, in particular, f- and m- wavelet definitions, the condition S, and the conditions on the expansion of functions on these bases. We also provide the conditions for the uniform convergence of wavelet expansions of some functions.

The main result of the paper are the conditions for the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from the space $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. These conditions are based on estimates for the distribution of suprema on $\mathbb{R}$ for the stochastic processes from $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ spaces and uniform convergence of separable measurable stochastic process $X = \{ X(t), t \in \mathbb{R}\}$ from the space $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ on some segment. There were also given several examples of functions, in which case one of the conditions of the theorem on the estimation of the majorizing characteristic $\varkappa(n)$ of the space $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ holds.

Keywords: Spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ of random variables, majorant characteristic, stochastic processes, wavelets, wavelet expansions.

References

1. Polishchuk, V. (2018). Fuzzy Method for Evaluating Commercial Projects of Different Origin. *Journal of Automation and Information Sciences, 50, 12*, 60–73. DOI: 10.1615/JAutomatInf-Scien.v50.i5.60
2. Polishchuk, V. V., Malyar, M. M., Voloshyn, O. F., & Sharkadi, M.M. (2018). Informatsiine modeliuvannia nechitkykh znan [Information modeling of fuzzy knowledge]. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnia, 4*, 84–95. DOI: 10.15588/1607-3274-2018-4-8 [in Ukrainian]
3. Mallat, S. (1988). A wavelet tour of signal processing. *San Diego: Academic Press.*
4. Meyer, Y. (1990). Ondelettes et Opérateurs. *Paris: Hermann.*
5. Daubechies, I. (1992). Ten lecture on wavelets. *Philadelphia: Soc. Industrial and Appl. Math.*
6. Chui, C. (1992). An introduction to wavelets. *New York: Academic Press.*
7. Härdle, W., Kerkyacharian, G., Picard, D., & Tsybakov, A. (1998). Wavelets, approximation and statistical applications. *New York: Springer.* DOI: 10.1007/978-1-4612-2222-4.
8. Kozachenko, Yu. V., & Perestyuk, M. M. (2007). On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables I. *Ukrainian Mathematical Journal, 59, 12*, 1850–1869. DOI: 10.1007/s11253-008-0030-y
9. Kozachenko, Yu. V., & Perestyuk, M. M. (2008). On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables II. *Ukrainian Mathematical Journal, 60, 6*, 876–900. DOI: 10.1007/s11253-008-0106-8
10. Kozachenko, Yu. V., & Mlavets, Yu. Yu. (2013). The Banach spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ of random variables. *Theory of Probability and Mathematical Statistics, 86*, 92–107. DOI: 10.1090/S0094-9000-2013-00892-8
11. Ermakov, S. V., & Ostrovskyi, E. Y. (1986). Uslovija nepreryvnosti, jeksponencial'nye ocenki i central'naja predel'naja teorema dlja sluchajnyh polej [Conditions for the continuity, exponential bounds, and central limit theorem for random fields]. *Dep. VINITI, 752-V.86.0.*, 42. [in Russian].
12. Kozachenko, Yuriy, & Mlavets, Yuriy. (2014). Stochastic processes from $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ spaces. *Contemporary Mathematics and Statistics, 2, 1*, 55–75. DOI: 10.7726/cms.2014.1004
13. Kozachenko, Yu. V. (2004). Lektsii z veivlet analizu [Lectures on Wavelet Analysis]. *Kyiv: TViMS.* [in Ukrainian]
14. Dariychuk, I. V., Kozachenko, Yu. V., & Perestyuk, M. M. (2011). Vypadkovi protsesy z prostoru Orlicha [Stochastic processes from Orlicz space]. *Chernivtsi: Zoloti lytavry.* [in Ukrainian]
15. Mlavets, Yu. Yu. (2012). Pro rozpodil supremumiv pryrostiv vypadkovykh protsesiv z prostoriv $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ [On the distribution of supremums increments of stochastics processes from $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ spaces]. *Naukovyi visnyk uzhhorodckoho universytetu. Seriia matematyka i informatyka, 23, 1*, 79–88. [in Ukrainian]

Одержано 25.09.2020