УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).91-100

А. О. Пашко[1], І. В. Розора[2], Т. О. Яневич[3]

[1] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
професор кафедри теоретичної кібернетики,
доктор фізико-математичних наук
aapashko@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6944-8477

[2] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
доцент кафедри прикладної статистики,
кандидат фізико-математичних наук
irozora@bigmir.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8733-7559

[3] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
доцент кафедри теорії ймовірності, статистики та актуарної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yata452@univ.kiev.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8550-8062

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВОГО ПРОЦЕСУ ІЗ ТОЧНІСТЮ ТА НАДІЙНІСТЮ В ПРОСТОРІ $L_P([0,T])$

В останні часи теорія стохастичних процесів та полів широко використовується в різних галузях науки і не тільки в природничих сферах, а саме її використання є важливим у фізиці, радіофізиці, інформатиці, програмній інженерії, соціології, біології, океаналогії, метеорології, фінансовій математиці, теорії прийняття рішень, системах масового обслуговування тощо. Тому актуальною проблемою для ймовірносників є побудова математичної моделі випадкового процесу або поля та вивчення її аналітичних властивостей. Проблеми чисельного моделювання стають особливо важливими завдяки потужним можливостям комп'ютерних технологій, що дозволяють створювати програмні засоби для моделювання та для передбачення поведінки випадкового процесу. Під статистичним моделюванням ми розуміємо комп'ютерну реалізацію спочатку випадкової величини, а потім вже випадкового процесу або поля при заданих характеристиках даних об'єктів моделювання.

Стаття присвячена моделюванню випадкового процесу із наперед заданою точністю та надійністю в банаховому просторі $L_p([0,T])$. Припускається, що випадковий процес є стаціонарним гауссовим із відомою скінченною коваріаційною функцією. Якщо випадковий процес подано як збіжний у середньому квадратичному ряд із випадковими доданками, то, зазвичай, у якості моделі можна розглядати скінченну суми перших доданків, тобто зрізку ряду. Тому, перша проблема, яка виникає у статті, як розкласти випадковий процес у ряд при відомій коваріаційній функції. Для цього у статті використовується Теорема Карунена-Лоєва і для побудови моделі застосовуємо розклад Карунена-Лоєва випадкового процесу. У даній роботі особливу увагу приділено точності та надійності побудованої моделі. Це означає, що спочатку ми будуємо модель, а потім її перевіряємо за допомогою певних тестів на адекватність із заданими вхідними параметрами. Отже, знаючи наперед точність та надійність та з використанням доведених у статті результатів для перевірки адекватності, можна стверджувати, що побудова модель буде гарно описувати початковий випадковий процес.

Ключові слова: гауссовий процес, модель, точність, надійність, спектральна щільність.

1. Вступ. Однією з актуальних задач теорії випадкових процесів є побудова математичної моделі випадкового процесу та вивчення її властивостей. Проблеми чисельного моделювання стають особливо важливими завдяки потужним можливостям комп'ютерних технологій, що дозволяють використовувати програмне забезпечення як інструмент моделювання та прогнозувати поведінку випадкового процесу. Існують різні методи моделювання випадкових процесів і полів. У [1, 2] така проблематика вивчалась для різних стохастичних процесів і полів, зокрема для гауссівських та субгауссівських випадкових процесів.

Розглянемо стаціонарний гауссовий випадковий процес $X(t), t \in \mathbb{R}$, для якого $\mathbf{E}X(t) = 0$, коваріаційна функція для всіх $t \in \mathbb{R}$ має вигляд

$$R(\tau) = \mathbf{E}X(t+\tau)X(t) = \sigma^2 \exp\{-\alpha|\tau|\}(1+\alpha|\tau|), \quad \sigma, \alpha > 0. \tag{1}$$

Якщо існує спектральна щільність $f(\cdot)$ процесу X, то за теоремою Бохнера-Хінчина коваріаційну функцію дійсного стаціонарного процесу можна подати у вигляді

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda\tau) f(\lambda) d\lambda.$$

Для процесу з коваріаційною функцією (1) спектральна щільність дорівнює

$$f(\lambda) = \frac{2\sigma^2\alpha^3}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)^2}.$$

А отже,

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda\tau) \frac{2\sigma^2\alpha^3}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)^2} d\lambda$$

та випадковий процес зображається так:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t) d\xi_1(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda t) d\xi_2(\lambda), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

де $\xi_1(\lambda)$ і $\xi_2(\lambda)$ — незалежні центровані гауссові випадкові процеси з ортогональними приростами, тобто для $\lambda_1 > \lambda_2$

$$\mathbf{E}(\xi_i(\lambda_1) - \xi_i(\lambda_2))^2 = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} f(\lambda) d\lambda \quad i = 1, 2.$$

Коваріаційну функцію (1) можна подати у вигляді суми двох інтегралів

$$R(t,s) = R(t-s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t,\lambda) f_1(s,\lambda) d\lambda + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(t,\lambda) f_2(s,\lambda) d\lambda,$$

де

$$f_1(t,\lambda) = \cos(\lambda t) \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi}} \frac{\sigma}{\alpha^2+\lambda^2}, \tag{3}$$

$$f_2(t,\lambda) = \sin(\lambda t) \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi}} \frac{\sigma}{\alpha^2+\lambda^2}. \tag{4}$$

Сформулюємо теорему із статті [3], доведення якої спирається на відому теорему Карунена-Лоєва.

Теорема 1. *Нехай $X(t)$, $t \in \mathbf{T}$, центрований комплексний випадковий процес зі скінченною дисперсією та коваріаційною функцією $R(t,s) = \mathbf{E}X(t)\overline{X(s)}$. Нехай $(\Lambda, \mathcal{B}_\Lambda, \mu)$ — вимірний простір з σ-адитивною мірою μ. Припустимо, що $f(t,\lambda)$, $t \in \mathbf{T}$, належать простору $L_2(\Lambda,\mu)$, $\{g_k(\lambda),\, k \in \mathbb{Z}\}$ — ортонормований базис (ОНБ) в $L_2(\Lambda,\mu)$. Коваріаційна функція $R(t,s)$ зображається як*

$$R(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Lambda} f_i(t,\lambda)\overline{f_i(s,\lambda)}d\mu(\lambda),$$

тоді і тільки тоді, коли сам випадковий процес допускає розклад $X(t)$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{ik}(t)\xi_{ik}, \tag{5}$$

де

$$a_{ik}(t) = \int\limits_{\Lambda} f_i(t,\lambda)\overline{g_k(\lambda)}d\mu(\lambda),$$

ξ_{ik} — центровані некорельовані випадкові величини , $\mathbf{E}\xi_{ik} = 0$, $\mathbf{E}\xi_{ik}\xi_{il} = \delta_{kl}$ та $\mathbf{E}\xi_{ik}^2 = 1$ для всіх i.

Із (2) випливає, що випадковий процес $X(t)$ дорівнює сумі двох процесів

$$X(t) = X_\Lambda(t) + X^\Lambda(t), \tag{6}$$

де

$$X_\Lambda(t) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \cos(\lambda t)d\xi_1(\lambda) + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \sin(\lambda t)d\xi_2(\lambda), \tag{7}$$

$$X^\Lambda(t) = \int_{|\lambda|\geq\Lambda} \cos(\lambda t)d\xi_1(\lambda) + \int_{|\lambda|\geq\Lambda} \sin(\lambda t)d\xi_2(\lambda). \tag{8}$$

Легко показати, що коваріаційна функція для $X_\Lambda(t)$ записується так:

$$R_\Lambda(t,s) = \int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} f_1(t,\lambda)f_1(s,\lambda)d\lambda + \int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} f_2(t,\lambda)f_2(s,\lambda)d\lambda,$$

де функції $f_1(t,\lambda)$ і $f_2(t,\lambda)$ визначені в (3)-(4).

Застосуємо теорему 1 для процесу $X_\Lambda(t)$ з викоританням тригонометричного ОНБ в просторі $L_2([-\Lambda,\Lambda])$

$$\left\{a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda}}, a_{k1} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\cos\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right), a_{k2} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right), k \geq 1\right\}$$

і отримаємо наступний розклад в ряд процесу $X_\Lambda(t)$ у сенсі збіжності у середньому квадратичному

$$X_\Lambda(t) = a_0(t)\xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_{1k\Lambda}(t)\xi_{1k} + a_{2k\Lambda}(t)\xi_{2k}], \tag{9}$$

де випадкові величини $\{\xi_0, \xi_{1k}, \xi_{2k},\ k = 1, 2\ldots\}$ такі, що $\mathbf{E}\xi_{ik} = 0$, $\mathbf{E}\xi_{ik}\xi_{il} = \delta_{kl}$ для $i = 1, 2$ та $\mathbf{E}\xi_{ik}\xi_{jl} = 0$ для $i \neq j$,

$$a_{0\Lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda}} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \cos(\lambda t) \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi}} \frac{\sigma}{\alpha^2 + \lambda^2} d\lambda;$$

$$a_{1k\Lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \cos(\lambda t) \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi}} \frac{\sigma}{\alpha^2 + \lambda^2} \cos\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right) d\lambda;$$

$$a_{2k\Lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \sin(\lambda t) \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi}} \frac{\sigma}{\alpha^2 + \lambda^2} \sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right) d\lambda.$$

Зауваження 1. *Оскільки випадковий процес $X(t)$ є гауссовим, то і величини $\{\xi_0, \xi_{1k}, \xi_{2k},\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ в розкладі (9) є гауссовим та незалежними.*

2. Побудова моделі випадкового процесу. Зображення (5) можна використати для побудови моделі випадкового процесу X із наперед відомою точністю та надійністю в різних банахових просторах. В даній статті розглядається моделювання в просторі $L_p([0, T])$.

Припутимо, що гауссовий випадковий процес $X(t), t \in \mathbb{R}$ можна розкласти у середньому квадратичному в ряд

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\xi_k,$$

де ξ_k, $k = 0, 1, 2\ldots$ — незалежні нормально розподілені випадкові величини з $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{E}\xi_k^2 = 1$.

Означення 1. *Будемо говорити, що випадковий процес $X_N(t)$ є моделлю процесу $X(t)$, якщо*

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k(t)\xi_k.$$

Через $||\cdot||$ позначимо норму у функціональному банаховому просторі $\mathcal{B}$. Наприклад, в $L_p([0, T])$ нормою буде $||f(t)|| = (\int_0^T |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$, в просторі неперервних функцій $C[0, T]$ нормою є $||f(t)|| = \sup\limits_{t\in[0,T]} |f(t)|$ тощо.

Означення 2. *Модель $X_N(t)$ наближає випадковий процес $X(t)$ із наперед заданою точністю $\delta > 0$ та надійністю $1 - \nu$, $\nu \in (0, 1)$ в банаховому просторі $\mathcal{B}$, якщо*

$$P\{||X_N(t) - X(t)|| > \delta\} \leq \nu. \tag{10}$$

Для того, щоб побудувати модель з точністю δ та надійністю $1-\nu$ у заданому просторі, необхідно знайти таке N, для якого виконується нерівність (10). Більш детально про моделювання із заданою точністю та надійністю можна прочитати у [2], [1] тощо.

Для процесу $X(t)$ з коваріаційною функцією (1) на відрізку $[0, T]$ як модель будемо використовувати таку скінченну суму

$$X_N(t) = a_{0\Lambda}(t)\xi_0 + \sum_{k=1}^{N} [a_{1k\Lambda}(t)\xi_{1k} + a_{2k\Lambda}(t)\xi_{2k}]. \tag{11}$$

Насправді, дана модель є сумою перших N доданків з розкладу (9).

3. Точність та надійність моделі в просторі $L_p([0,T])$. В роботі Козаченко Ю.В., Каменщикова О. [4] доведено таку теорему про оцінку норми для φ-субгауссових та субгауссових процесів в просторі $L_p(\mathbf{T})$. Оскільки гауссовий процес є частковим випадком субгауссового, то можна використати теорему і для гауссового випадку.

Теорема 2. *Нехай $\{\mathbf{T},\mu\}$— вимірний простір, $\xi=\{\xi(t),\,t\in\mathbf{T}\}$ — строго субгауссовий випадковий процес з $E\xi^2(t)<\infty$. Нехай існує інтеграл Лебега*

$$\int_{\mathbf{T}}\left(E\xi^2(t)\right)^{\frac{p}{2}}d\mu(t)<\infty,$$

тоді з імовірністю одиниця існує $\int_{\mathbf{T}}|\xi(t)|^p d\mu(t)$ та

$$P\left\{\int_{\mathbf{T}}|\xi(t)|^p d\mu(t)>\varepsilon\right\}\le 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^{2/p}}{2c^{2/p}}\right\} \tag{12}$$

при $\varepsilon>cp^{p/2}$, де $c=\int_{\mathbf{T}}\left(E\xi^2(t)\right)^{\frac{p}{2}}d\mu(t)$.

Доведемо допоміжну лему.

Лема 1. *Для центрованого стаціонарного гауссового процесу $X(t),t\in[0,T]$, з коваріаційною функцією $R(\tau)=\sigma^2\exp\{-\alpha|\tau|\}(1+\alpha|\tau|)$, $\sigma,\alpha>0$ та моделі $X_N(t)$, визначеної в (11), справедлива нерівність:*

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(\mathbf{E}[X(t)-X_N(t)]^2\right)^{1/2}\le B_{N,\Lambda},$$

де

$$B_{N,\Lambda}=\left[\frac{2\sigma^2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\Lambda}{\alpha}\right)-\frac{\alpha\Lambda}{\alpha^2+\Lambda^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{8\Lambda\alpha}{N\pi^2}\left(T\arctan\frac{\Lambda}{\alpha}+\frac{\Lambda^2}{\alpha(\alpha^2+\Lambda^2)}\right)^2\right)\right]^{1/2}. \tag{13}$$

Доведення. Із співвідношення (6) випливає, що

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}[X(t)-X_N(t)]^2 &= \sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}[X_\Lambda(t)+X^\Lambda(t)-X_N(t)]^2=\\ &= \sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}[X^\Lambda(t)]^2+\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}[X_\Lambda(t)-X_N(t)]^2. \qquad (14)\end{aligned}$$

Оцінимо кожний доданок (14) окремо.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^\Lambda(t)]^2 &= \mathbf{E}\left[\int_{|\lambda|\ge\Lambda}\cos(\lambda t)d\xi_1(\lambda)+\int_{|\lambda|\ge\Lambda}\sin(\lambda t)d\xi_2(\lambda)\right]^2=\\ &= \int_{|\lambda|\ge\Lambda}\cos^2(\lambda t)\mathbf{E}d\xi_1(\lambda)+\int_{|\lambda|\ge\Lambda}\sin^2(\lambda t)\mathbf{E}d\xi_2(\lambda)=\\ &= \int_{|\lambda|\ge\Lambda}dF(\lambda)=\int_{|\lambda|\ge\Lambda}f(\lambda)d\lambda=\int_{|\lambda|\ge\Lambda}\frac{2\sigma^2\alpha^3}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)^2}d\lambda\end{aligned}$$

Наступний інтеграл візьмемо частинами

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2} &= \left|\begin{array}{lcc} u &=& \frac{1}{\lambda};\quad du=-\frac{1}{\lambda^2}d\lambda \\ dv &=& \frac{\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}d\lambda \\ v &=& \frac{1}{2}\int\frac{d(\alpha^2+\lambda^2)}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2+\lambda^2}\end{array}\right| = \qquad (15)\\ &= -\frac{1}{2\lambda(\alpha^2+\lambda^2)}\Big|_{\Lambda}^{\infty}-\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{2\lambda^2(\alpha^2+\lambda^2)}= \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Lambda(\alpha^2+\Lambda^2)}-\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2(\alpha^2+\lambda^2)}\right]= \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Lambda(\alpha^2+\Lambda^2)}-\frac{1}{\alpha^2}\left(\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2}-\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{\alpha^2+\lambda^2}\right)\right]= \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Lambda(\alpha^2+\Lambda^2)}-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\Lambda}-\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{\Lambda}{\alpha}\right)\right]= \\ &= \frac{1}{2\alpha^2}\left[\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{\Lambda}{\alpha}-\frac{\Lambda}{\alpha^2+\Lambda^2}\right]\end{aligned}$$

Тому,

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}[X^{\Lambda}(t)]^2=\frac{4\sigma^2\alpha^3}{\pi}\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}=\frac{2\sigma^2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\Lambda}{\alpha}\right)-\frac{\alpha\Lambda}{\alpha^2+\Lambda^2}\right).$$

Варто зауважити, що $\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}[X^{\Lambda}(t)]^2\to 0$ при $\Lambda\to\infty$.

Для другого доданку у (14) маємо

$$\mathbf{E}[X_{\Lambda}(t)-X_N(t)]^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}[a_{1k\Lambda}^2(t)+a_{2k\Lambda}^2(t)].$$

Спочатку оцінимо $|a_{1k\Lambda}^2(t)|$.

$$\begin{aligned}|a_{1k\Lambda}(t)| &= \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\Lambda\pi}}2\sigma\left|\int_0^{\Lambda}\frac{\cos(\lambda t)}{\alpha^2+\lambda^2}\cos\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)d\lambda\right|= \\ &= \left|\begin{array}{lcc} v &=& \frac{\cos(\lambda t)}{\alpha^2+\lambda^2} \\ dv &=& \left[-t\frac{\sin(\lambda t)}{\alpha^2+\lambda^2}-2\lambda\frac{\cos(\lambda t)}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}\right]d\lambda \\ du &=& \cos\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)d\lambda \\ u &=& \frac{\Lambda}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)\end{array}\right|=\end{aligned}$$

$$=2\sigma\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\Lambda\pi}}\left|\frac{\Lambda\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)}{k\pi}\frac{\cos(\lambda t)}{\alpha^2+\lambda^2}\Big|_0^{\Lambda}+\int_0^{\Lambda}\frac{\Lambda\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)}{k\pi}\left[\frac{t\sin(\lambda t)}{\alpha^2+\lambda^2}+\frac{2\lambda\cos(\lambda t)}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}\right]d\lambda\right|\le$$

$$\le 2\sigma\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\Lambda\pi}}\frac{\Lambda}{k\pi}\left(t\int_0^{\Lambda}\frac{|\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)\sin(\lambda t)|}{\alpha^2+\lambda^2}d\lambda+\int_0^{\Lambda}\frac{2\lambda|\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)\cos(\lambda t)|}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}d\lambda\right)\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2\alpha^3\Lambda}{\pi}}\frac{2\sigma}{k\pi}\left(t\int_0^{\Lambda}\frac{d\lambda}{\alpha^2+\lambda^2}+\int_0^{\Lambda}\frac{2\lambda d\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2\alpha^3\Lambda}{\pi}}\frac{2\sigma}{k\pi}\left(\frac{t}{\alpha}\arctan\left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right)+\frac{\Lambda^2}{\alpha^2(\alpha^2+\Lambda^2)}\right).$$

Якщо виконати схожі перетворення, то отримаємо оцінку для $|a_{2k\Lambda}(t)|$. Таким чином,

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}[X_\Lambda(t) - X_N(t)]^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} 2\left[\sqrt{\frac{2\alpha^3\Lambda}{\pi}}\frac{2\sigma}{k\pi}\left(\frac{t}{\alpha}\arctan\left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right) + \frac{\Lambda^2}{\alpha^2(\alpha^2+\Lambda^2)}\right)\right]^2 \leq$$

$$\leq \frac{16\Lambda\alpha^3\sigma^2}{\pi^3}\left(\frac{T}{\alpha}\arctan\left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right) + \frac{\Lambda^2}{\alpha^2(\alpha^2+\Lambda^2)}\right)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}\cdot\frac{16\Lambda\alpha^3\sigma^2}{\pi^3}\left(\frac{T}{\alpha}\arctan\left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right) + \frac{\Lambda^2}{\alpha^2(\alpha^2+\Lambda^2)}\right)^2.$$

Очевидно, що $\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}[X_\Lambda(t) - X_N(t)]^2 \to 0$ при $N \to \infty$.

Отже,

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}[X(t) - X_N(t)]^2 \leq \frac{2\sigma^2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\Lambda}{\alpha}\right) - \frac{\alpha\Lambda}{\alpha^2+\Lambda^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{N}\cdot\frac{8\Lambda\alpha}{\pi^2}\left(T\arctan\frac{\Lambda}{\alpha} + \frac{\Lambda^2}{\alpha(\alpha^2+\Lambda^2)}\right)^2\right) =: B_{N,\Lambda}^2$$

Теорема 3. *Нехай $X(t), t \in [0,T],$— стаціонарний центрований гауссовий випадковий процес з коваріаційною функцією $B(\tau) = \sigma^2\exp\{-\alpha|\tau|\}(1+\alpha|\tau|)$, $\sigma, \alpha > 0$. Модель $X_N(t)$ з (11) наближає випадковий процес $X(t)$ із наперед заданою точністю $\delta > 0$ та надійністю $1-\nu$, $\nu \in (0,1)$ в банаховому просторі $L_p([0,T])$, якщо*

$$B_{N,\Lambda} \leq \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}\max\left(\sqrt{-2\ln\frac{\nu}{2}}, \sqrt{p}\right)}, \tag{16}$$

де $B_{N,\Lambda}$ визначено в (13).

Доведення. Оскільки гауссові процеси є строго субгауссовими, то ми маємо право використати результати теореми 2 для процесу, що характеризує похибку моделювання, а саме для $\xi(t) = X(t) - X_N(t)$.

Розглянемо вимірний простір $\{\mathbf{T}, \mu\} = \{[0,T], dt\}$. Покажемо спочатку, що виконуються умови теореми 2. Потрібно довести, що існує інтеграл

$$\int_{\mathbf{T}} \left(E\xi^2(t)\right)^{\frac{p}{2}} d\mu(t) < \infty.$$

Дійсно, з леми 1 випливає

$$c = \int_{\mathbf{T}} \left(E\xi^2(t)\right)^{\frac{p}{2}} d\mu(t) = \int_0^T \left(E(X(t) - X_N(t))^2\right)^{\frac{p}{2}} dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \left(\sup_{t\in[0,T]} \sqrt{E(X(t)-X_N(t))^2}\right)^p dt \leq \int_0^T (B_N)^p\, dt \leq B_{N,\Lambda}^p \cdot T < \infty. \tag{17}$$

Із нерівності (12) та оцінки (17) для c маємо

$$P\left\{\left(\int_{\mathbf{T}} |X(t)-X_N(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} > \delta\right\} = P\left\{\int_{\mathbf{T}} |X(t)-X_N(t)|^p d\mu(t) > \delta^p\right\} \leq$$

$$\leq 2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2c^{2/p}}\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2(B_{N,\Lambda}^p \cdot T)^{2/p}}\right\} = 2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B_{N,\Lambda}^2 T^{2/p}}\right\}. \quad (18)$$

З теореми 2 випливає, що остання нерівність розглядається тільки у випадку, якщо

$$\varepsilon > cp^{p/2} \quad \Leftrightarrow \quad \delta^p > B_{N,\Lambda}^p T p^{p/2} \quad \Leftrightarrow \quad B_{N,\Lambda} < \frac{\delta}{\sqrt{p}T^{\frac{1}{p}}}.$$

Дана умова виконується, так як за умовою теореми

$$B_{N,\Lambda} \leq \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}} \max\left(\sqrt{-2\ln\frac{\nu}{2}}, \sqrt{p}\right)} \leq \frac{\delta}{\sqrt{p}T^{\frac{1}{p}}}.$$

З означення (2) модель $X_N(t)$ наближає випадковий процес $X(t)$ із точністю δ та надійністю $1-\nu$, якщо

$$P\left\{\left(\int_{\mathbf{T}} |X(t)-X_N(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} > \delta\right\} \leq \nu.$$

Якщо підставити у дану нерівність оцінку (18), то отримаємо

$$2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B_{N,\Lambda}^2 T^{2/p}}\right\} < \nu \quad \Leftrightarrow \quad B_{N,\Lambda} \leq \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}\sqrt{-2\ln\frac{\nu}{2}}}. \quad (19)$$

Співвідношення (19) справедливе, оскільки за умовою (16)

$$B_{N,\Lambda} \leq \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}} \max\left(\sqrt{-2\ln\frac{\nu}{2}}, \sqrt{p}\right)} \leq \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}\sqrt{-2\ln\frac{\nu}{2}}}.$$

На рисунку 1, як приклад, зображено дві траєкторії моделі $X_N(t)$, що визначено у (11), з параметрами $\Lambda = 500$, $N = 500000$.

Зауваження 2. *Значення $B_{N,\Lambda}$ пов'язує параметр моделі N та Λ. За допомогою нього балансується довжина інтегрування $[-\Lambda, \Lambda]$ в (6) та число доданків у моделі (11).*

Зауваження 3. *Із (13) видно, що*

$$B_{N,\Lambda} \to 0, \quad \textit{коли} \quad \frac{\Lambda}{N} \to 0,\ N, \Lambda \to \infty.$$

Тому завжди можна знайти N, для якого виконується нерівність (16).

У випадку, коли $\sigma = 1$ для заданих точності δ та надійності $1-\nu$ в таблиці 1 підраховано окремі значення Λ і N.

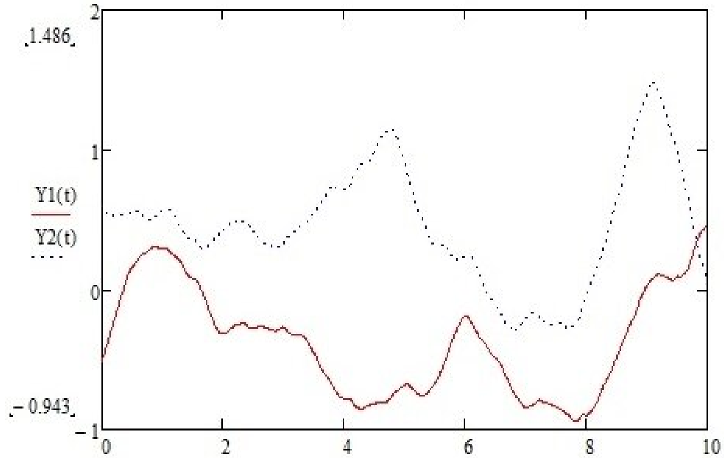

Рис. 1. Траєкторії моделі при $\Lambda = 500$, $N = 500000$

Таблиця 1.

Параметри моделі із заданою точністю та надійністю

δ	ν	α	Λ	N
0.1	0.1	1	600	$11 \cdot 10^5$
0.1	0.05	1	800	$2 \cdot 10^6$
0.1	0.01	1	4000	$3.5 \cdot 10^6$
0.1	0.01	2	20000	$2 \cdot 10^7$

Список використаної літератури

1. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В. Моделювання випадкових процесів та полів. Київ: ВПЦ "Задруга", 2007. 230 с.
2. Kozachenko Yu. V., Pogoriliak O. O., Rozora I. V., Tegza A. M. Simulation of Stochastic processes with given accuracy and reliability. London: ISTE Press Ltd, Elsevier Ltd, 2016. 346 p.
3. Kozachenko Yu. V., Rozora I. V., Turchyn Ye. V. Properties of some Random series. *Communication in Statistics –Theory and Methods*. 2011. Vol. 40, Iss. 19-20. P. 3672–3683.
4. Kozachenko Yu. V., Kamenshchikova O. E. Approximation $SSub_\varphi(\Omega)$ of stochastic processes in the space $L_p(\mathbf{T})$. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 2009. Vol. 79. P. 83–88.

Pashko A. O., Rozora I. V., Ianevych T. O. On modelling of Gaussian process with accuracy and reliability in the space $L_p([0,T])$.

Nowadays the theory of stochastic processes and fields is widely used in different branches of science and not only in natural science, such as Physics, Radio-Engineering, Computer Science and Program Engineering, Sociology, Oceanology, Meteorology, Financial mathematics, Decision Making and Queuing theory as well. That's why one of the relevant problems for the scientists is to build a mathematical model of the stochastic process and study its analytical properties. The problems of numerical simulations become especially important due to the powerful possibilities of computer technologies that allow us to create software modeling tools and predict the behavior of a random process. Under statistical simulation we understand the computer realization of random variables, processes and fields under a given their characteristics. Methods of statistical simulation are considered as an alternative to existing numerical methods. In the article, we study the simulation of the Gaussian stationary process with given accuracy and reliability in

Banach space $L_p([0,T])$. It's supposed that the correlation function of stochastic process is known. If a random process is given as a convergent in mean square series with random terms, then, usually as a model of this process we can consider a cut-off series. The first problem that arises in the article is how can we expand a stochastic process in the series. The Karhunen-Loeve decomposition of stochastic process is used to construct the model of the process. In this paper the issue on accuracy and reliability of the constructed model is considered, it means that at first we construct the model and then verify it using some adequacy tests with known accuracy and reliability.

Keywords: Gaussian process, model, accuracy, reliability, spectral density.

References

1. Kozachenko, Yu. V., Pashko, A. O., & Rozora, I. V.(2007). Modeliuvannia vypadkovykh protsesiv ta poliv [Simulation of Stochastic Processes]. *Kyiv: VPC Zadruga.* [in Ukrainian]
2. Kozachenko, Yu. V., Pogoriliak, O. O., Rozora, I. V., & Tegza, A. M. (2016). Simulation of Stochastic processes with given accuracy and reliability. *London: ISTE Press Ltd, Elsevier Ltd.*
3. Kozachenko, Yu. V., Rozora, I. V., & Turchyn, Ye. V. (2011). Properties of some Random series. *Communication in Statistics – Theory and Methods, 40, 19-20*, 3672–3683.
4. Kozachenko, Yu. V., & Kamenschykova, O. E. (2009). Approximation of $SSub_\varphi(\Omega)$ stochastic processes in the space $L_p(\mathbf{T})$. *Theory of Probability and Mathematical Statistics, 79,* 83–88.

Одержано 27.09.2020