УДК 510
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).157-167

І. А. Мич[1], В. В. Ніколенко[2], О. В. Варцаба[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3392-1442

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0071-6896

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9158-2365

ДОСЛІДЖЕННЯ СИГНАТУРНОГО КУБУ УНІВЕРСАЛЬНИХ БУЛЕВИХ АЛГЕБР

У роботі розглядається теорія булевих функцій з точки зору універсальних булевих алгебр. Дана робота використовує термінологію відомих авторів Куроша, Мальцева, Поста та інших. Крім цього у роботі введено нові поняття такі як універсальна булева алгебра, $l-$базисні алгебри, вільні та канонічні алгебри. Також вивчається клас універсальних булевих алгебр M_2, у сигнатуру яких входять всі одно та двомісні операції двозначної логіки. Ввівши поняття порядку порівняння сигнатур алгебр, отримали представлення алгебр M_2 у вигляді 11-місного сигнатурного кубу. У роботі виконано розбиття цього кубу на чотири дев'ятимірні куби M_2^1, M_2^2, M_2^3, M_2^4. У класі M_2^1 знайдена множина функціонально повних алгебр η_0 і побудовано сигнатурний граф даної множини, проведено дослідження цих алгебр. Множину всіх функціонально повних алгебр розбито на п'ятнадцять класів $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{15}$, побудовані сигнатурні графи кожного з цих класів. Вивчена структура і типи алгебр, які входять до складу класів $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{15}$. Всі функціонально повні алгебри класу M_2^1 зображені у вигляді сигнатурного графа.

Встановлено потужність класу M_2^1, побудовано сигнатурний граф канонічних алгебр цього класу і визначено розподіл алгебр по ярусах цього графа. Наведено розподіл 259 вільних алгебр по ярусах Ω-кубу і побудовано сигнатурний граф класу вільних алгебр.

Отримані результати узагальнено на класи M_2^2, M_2^3, M_2^4. На основі цих результатів виконано розподіл 2048 алгебр класу M_2 відносно базисності по ярусах Ω- кубу.

Ключові слова: булеві операції, сигнатурний куб, базиси алгебр.

1. Вступ. Дослідження теорії універсальних алгебр поклала фундаментальна робота Біргтофа [1], і вони були продовжені у працях Мальцева [2], Куроша [3] та інших. Найбільш відомі роботи з теорії булевих алгебр Сікорського [4], Владімірова [5], з теорії булевих функцій роботи Яблонського [6], Глушкова [7, 8, 9], Журавльова [10, 11], сучасні роботи [12, 13, 14] та багато інших.

2. Універсальні булеві алгебри. У даному дослідженні пропонується розглянути теорію булевих функцій з точки зору універсальних булевих алгебр.

Означення 1. *Універсальною алгеброю U називається впорядкована пара $\langle A, \Omega\rangle$ множин A (носій алгебри) і Ω (множина операцій, що задані на A) [1, 2, 3, 14].*

Означення 2. *Універсальною булевою алгеброю $U = \langle A, \Omega\rangle$ називається універсальна алгебра, у якій $A = \{0, 1\}$, Ω – деяка множина булевих операцій. У подальшому універсальні булеві алгебри будемо називати булевими алгебрами або алгебрами.*

У даній роботі розглядаються множини усіх універсальних булевих алгебр M у сигнатуру яких можуть входити операції $Q = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \oplus, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \uparrow, |\}$, тобто $\mathrm{M} = \{U_i = \langle A, \Omega_i\rangle \,|\, \Omega_i \subset Q\}$. Зрозуміло, що $|\mathrm{M}| = 2^{11} = 2048$ алгебр, які утворюють 11-мірний куб, який далі називається сигнатурним кубом, або Ω-кубом. Кожній вершині Ω-кубу поставимо у відповідність 11-мірний булевий вектор, одиничні координати якого визначають операції, що входять в сигнатуру відповідної алгебри. Вершини в Ω-кубі позначаються або сигнатурою (переліком операцій), або Ω-вектором, або натуральним числом, розклад якого за модулем два визначає Ω-вектор. Відношення порядку в Ω-кубі задається наступним чином: $U_i = \langle A, \Omega_i\rangle \le U_j = \langle A, \Omega_j\rangle$, якщо $\Omega_i \subset \Omega_j$. Нулем Ω-кубу є тривіальна алгебра, у якій $\Omega = \emptyset$. На першому ярусі Ω-кубу є $C_n^1 = 11$ алгебр, а на кожному наступному C_n^k, $n = 11,\ k = \overline{1,\, 11}$. Ребро Ω-кубу, що з'єднує алгебри $U_i = \langle A, \Omega_i\rangle$ і $U_j = \langle A, \Omega_j\rangle$, де $U_j > U_i$ збільшує (зменшує) сигнатуру U_j на одну операцію в порівнянні з U_i, якщо рухатися по ребру знизу вверх (зверху вниз).

Означення 3. *Алгебра $U = \langle A, \Omega\rangle$ називається функціонально повною, якщо множина її функцій, що відповідають операціям з Ω утворюють функціонально повну систему, в іншому випадку алгебра називається функціонально неповною [11].*

Означення 4. *Алгебра $U = \langle A, \Omega\rangle$ називається $l-$базисною, якщо з операцій сигнатури Ω можна побудувати $l-$базисів.*

Означення 5. *Операція $f_i \in \Omega$ називається зв'язаною, якщо вона входить до складу якогось базису, у іншому випадку операція називається вільною.*

Означення 6. *Алгебра $U = \langle A, \Omega\rangle$ називається вільною, якщо в її сигнатурі є вільні операції.*

Означення 7. *Алгебра $U = \langle A, \Omega\rangle$ називається канонічною, якщо вона не має вільних операцій.*

Означення 8. *Рангом вільної алгебри називається число, що дорівнює кількості вільних операцій.*

Означення 9. *Алгебра $U = \langle A, \Omega\rangle$ називається насиченою, якщо її довільне розширення сигнатури збільшує базисність алгебри.*

Означення 10. *Потенціалом ребра, що з'єднує дві суміжні алгебри U_1 і U_2 $\Omega-$кубу з базисністю η_1 і η_2 $(\eta_1 \ge \eta_2)$ називається число $\eta_1 - \eta_2$.*

Означення 11. *Потенціалом алгебри називається сума потенціалів всіх ребер (верхніх), які виходять з даної алгебри.*

3. Сигнатурний куб класу алгебр M_2. Розглянемо множину всіх алгебр $\mathrm{M}_2 = \{U = \langle A, \Omega\rangle\}$, де $A = \{0, 1\}$ і Ω – множина булевих операцій арність яких не перевищує два. Представимо клас алгебр M_2 у вигляді 11-місного сигнатурного кубу (рис. 1).

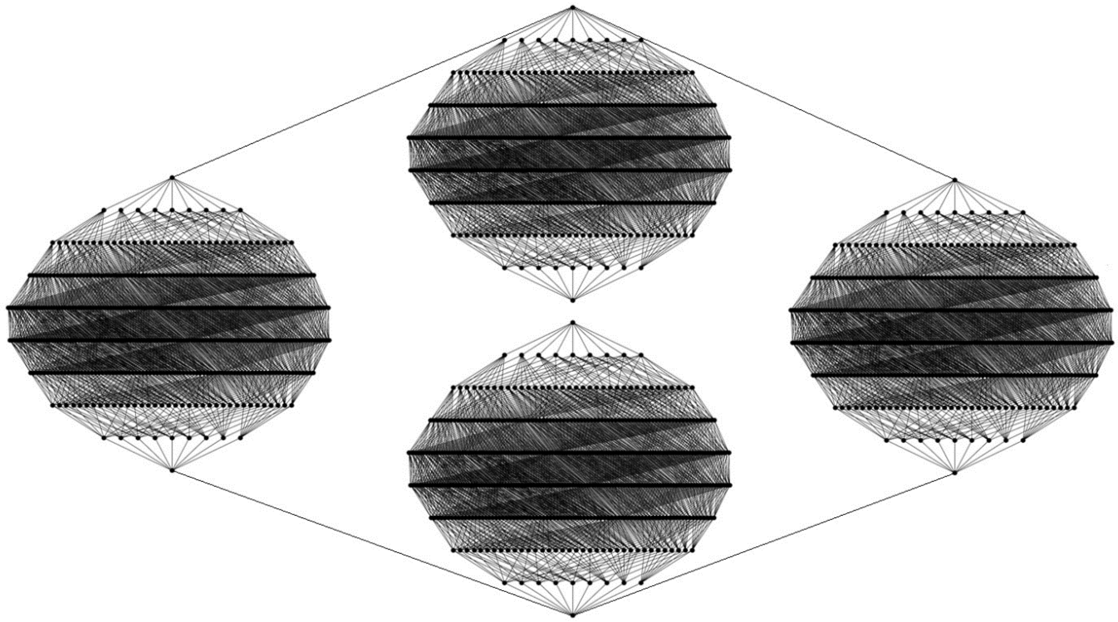

Рис. 1. Сигнатурний куб класу алгебр M_2.

Побудуємо розбиття множини $\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_2^1 \bigcup \mathrm{M}_2^2 \bigcup \mathrm{M}_2^3 \bigcup \mathrm{M}_2^4$, де M_2^1-множина всіх алгебр із M_2, в сигнатуру яких не входять операції стрілка Пірса ($\uparrow$) і штрих Шеффера ($|$), а M_2^2, M_2^3, M_2^4-множини всіх алгебр із M_2, у які відповідно входять операції $\{\uparrow\}$, $\{\,|\,\}$, $\{\uparrow, \,|\}$.

Розглянемо множину алгебр класу M_2^1, які утворюють 11-мірний сигнатурний куб ($\Omega-$куб) з фіксованими 10-ою і 11-ою нульовими координатами (рис.2).

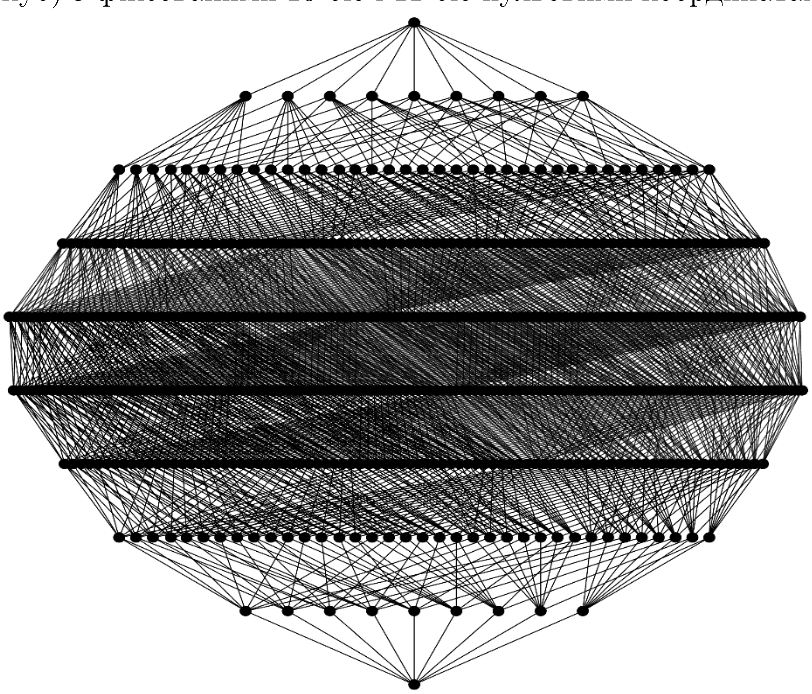

Рис. 2. Сигнатурний куб класу алгебр M_2^1.

Використовуючи критерій Поста, знайдені дев'ять двоопераційні базиси: $a_1 = \{0, \ \Rightarrow\}$, $a_2 = \{0, \Leftarrow\}$, $a_3 = \{\neg, \wedge\}$, $a_4 = \{\neg, \vee\}$, $a_5 = \{\neg, \ \Rightarrow\}$, $a_6 = \{0, \ \Leftarrow\}$, $a_7 = \{\oplus, \ \Rightarrow\}$, $a_8 = \{\Rightarrow, \ \Leftarrow\}$, $a_9 = \{\Leftrightarrow, \ \Leftrightarrow\}$ і шість базисів з трьома операціями: $b_1 = \{0, \wedge, \ \Leftrightarrow\}$, $b_2 = \{0, \vee, \ \Leftrightarrow\}$, $b_3 = \{1, \wedge, \oplus\}$, $b_4 = \{1, \vee, \oplus\}$, $b_5 = \{\wedge, \oplus, \ \Leftrightarrow\}$, $b_6 = \{\vee, \oplus, \ \Leftrightarrow\}$.

4. Клас функціонально неповних алгебр. η_0. Позначимо через η_0 клас нульбазисних алгебр (клас функціонально неповних алгебр). У цей клас входять вісімдесят вісім алгебр, які зображені у вигляді сигнатурного графа (рис. 3).

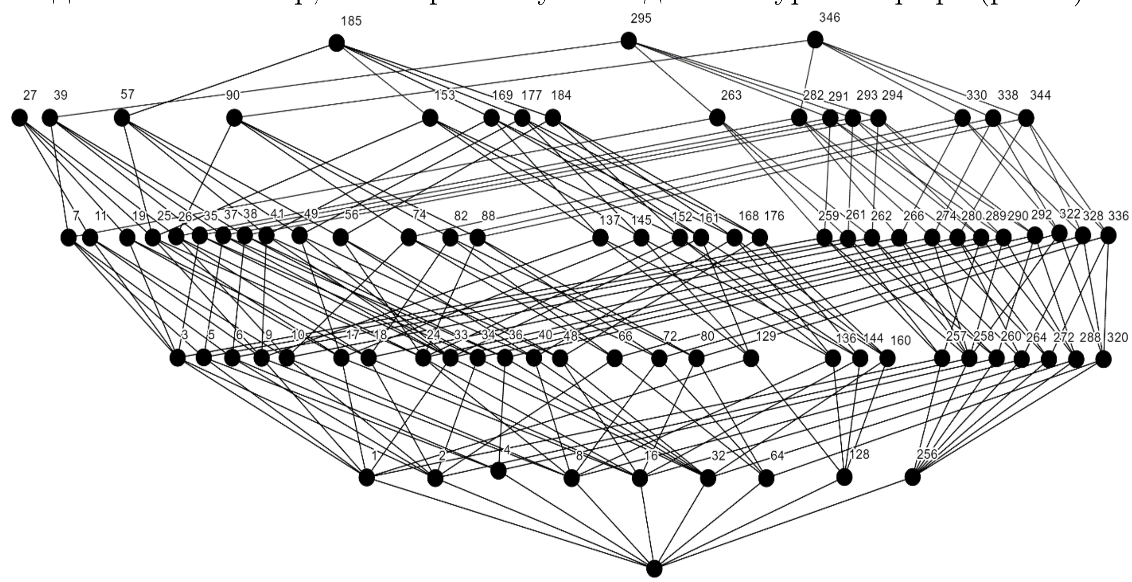

Рис. 3. Функціонально неповні алгебри класу η_0.

З приведених означень 4, 9, 10 випливає наступне твердження.

Твердження 1. *1) $l-$базисність алгебр класу η_0 дорівнює нулеві.*
2) Потенціал всіх ребер графа, зображеного на рис.3, дорівнює нулеві.

До кожної вершини $n-$мірного $\Omega-$кубу веде n ребер ($n = 9$). Кількість ребер, які проведені до кожної вершини графа, представленого на рис. 3, менша ніж 9 (крім тривіальної алгебри). Відсутні ребра зв'язують ці алгебри з функціонально повними алгебрами. Отже, має місце твердження.

Твердження 2. *Тривіальна алгебра є єдиною внутрішньою функціонально неповною алгеброю, а решта вісімдесят сім алгебр є граничними.*

З означення 9 слідує, що в класі η_0 чотири насичені (передповні) алгебри, а саме алгебри 27, 185, 296, 346 з відповідними сигнатурами $\{0, \ 1, \ \wedge, \ \vee\}$, $\{0, \ 1, \ \neg, \ \oplus, \ \Leftrightarrow\}$, $\{0, \ 1, \ \neg, \ \oplus, \ \Leftrightarrow\}$, $\{1, \ \wedge, \ \vee, \ \Rightarrow, \ \Leftrightarrow\}$. З означень 6, 8 випливає твердження.

Твердження 3. *1) Всі алгебри класу η_0 є вільними.*
2) Ранг кожної алгебри $U_i = \langle A, \Omega_i \rangle \in \eta_0$ дорівнює потужності сигнатури Ω_i або номеру яруса, на якому знаходиться алгебра.

5. Функціонально повні алгебри. Розіб'ємо множину $\mathrm{M}_2^1 = \eta_0 \cup \eta_1 \cup \eta_2 \cup \cup \ldots \cup \eta_{15}$, де η_l-множина $l-$базисних алгебр, $l = 0, 1, \ldots, 15$. Клас функціонально неповних алгебр η_0 розглянутий вище. Дослідимо клас однобазисних алгебр

η_1. Потужність цього класу дорівнює 72. $\Omega-$граф класу η_1, представлений на рис. 4.

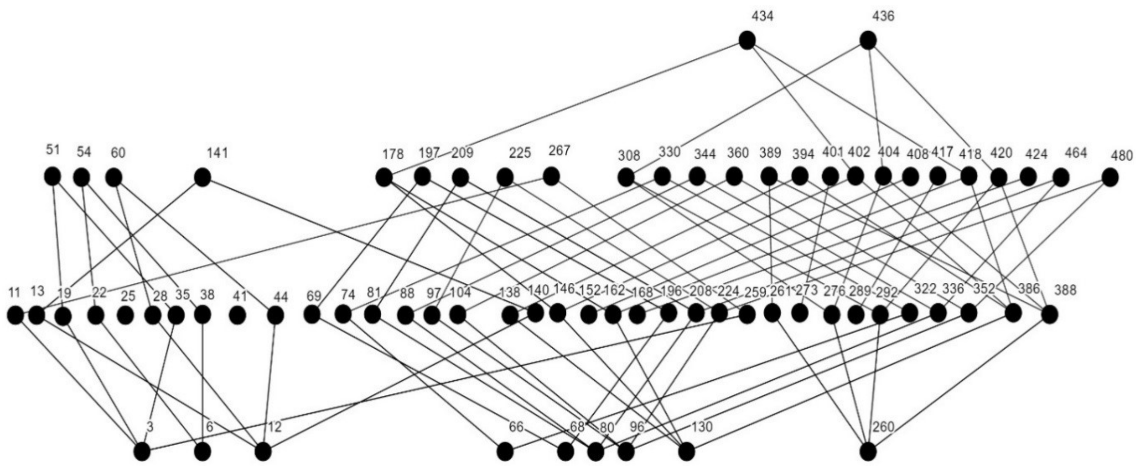

Рис. 4. Граф однобазисних алгебр η_1 класу M_2^1.

Із наведеного рисунка видно, що алгебри розташувались по ярусах наступним чином:

1) другий ярус включає дев'ять канонічних ненасичених алгебр з двоопераційними базисами;
2) третій ярус містить шість канонічних ненасичених алгебр з триопераційними базисами, тридцять вільних алгебр, які отримані з відповідних алгебр другого ярусу шляхом розширення сигнатури на одну операцію. Оскільки базисність цих алгебр така сама як у суміжних алгебр другого ярусу, то ці алгебри мають ранг 1, а ребра, що їх з'єднують мають потенціал 0;
3) четвертий ярус включає двадцять п'ять вільних алгебр, ранг яких рівний двом; насиченими є всі алгебри цього ярусу, крім алгебр з номерами 178, 308, 402, 404, 418, 420;
4) п'ятий ярус містить дві вільні алгебри 434, 436 з рангом три, і ці алгебри є насиченими.

Таким чином, з проведеного аналізу для канонічних алгебр класу η_1 має місце твердження.

Твердження 4. *Клас алгебр η_1 включає сімдесят дві алгебри, серед яких:*

1) п'ятнадцять канонічних алгебр, з яких дві насичені канонічні, двадцять одна насичена вільна алгебра;

2) п'ятдесят сім вільних алгебр, з яких тридцять рангу один, двадцять п'ять рангу два, і дві алгебри рангу три.

На $\Omega-$графах, приведених для класів η_l, $l = 0, 1, \ldots, 6$, тип алгебри легко розпізнати за описаними нижче ознаками.

Канонічні алгебри. Оскільки на рисунках 4-9 зображені тільки ребра з потенціалом 0, які збільшують ранг алгебр, то канонічні алгебри не мають суміжних алгебр нижчого ярусу (до цих алгебр знизу не має ребер). Якщо в канонічній алгебрі є верхні ребра, то вона є ненасиченою. Якщо алгебра не має ребер, то вона зображається як ізольована точка і є канонічною насиченою алгеброю.

Вільні алгебри. Алгебра є вільною, якщо до неї входять ребра з алгебр нижчого ярусу і насиченою, якщо з неї не виходять ребра до алгебр вищого ярусу.

6. $l-$**базисні алгебри.** Клас η_2 містить сто п'ять алгебр. На третьому ярусі знаходяться чотирнадцять канонічних ненасичених алгебр, на четвертому – чотирнадцять канонічних насичених, дванадцять канонічних ненасичених та тридцять п'ять вільних ненасичених алгебр рангу один. П'ятий ярус містить тридцять вільних насичених алгебр рангу два. На рисунках 5-9 наведені $\Omega-$графи для класів η_l, $l = 2, 3 \ldots, 6$.

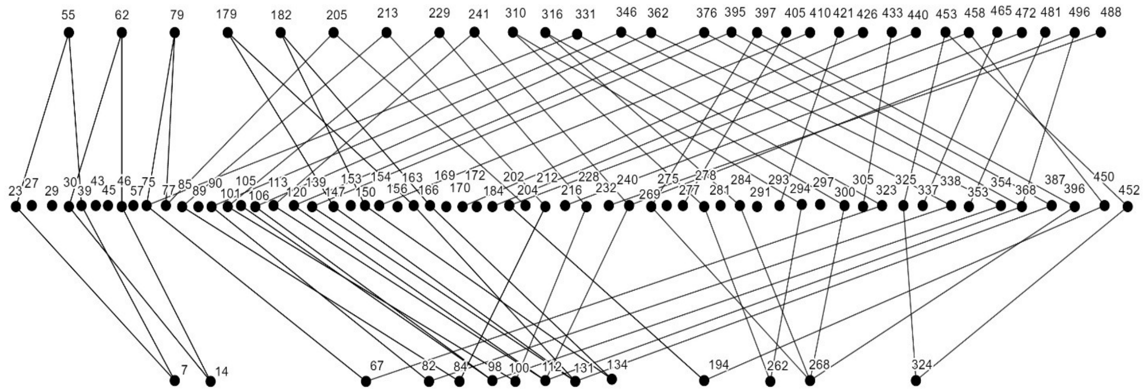

Рис. 5. Граф алгебр η_2 класу M_2^1.

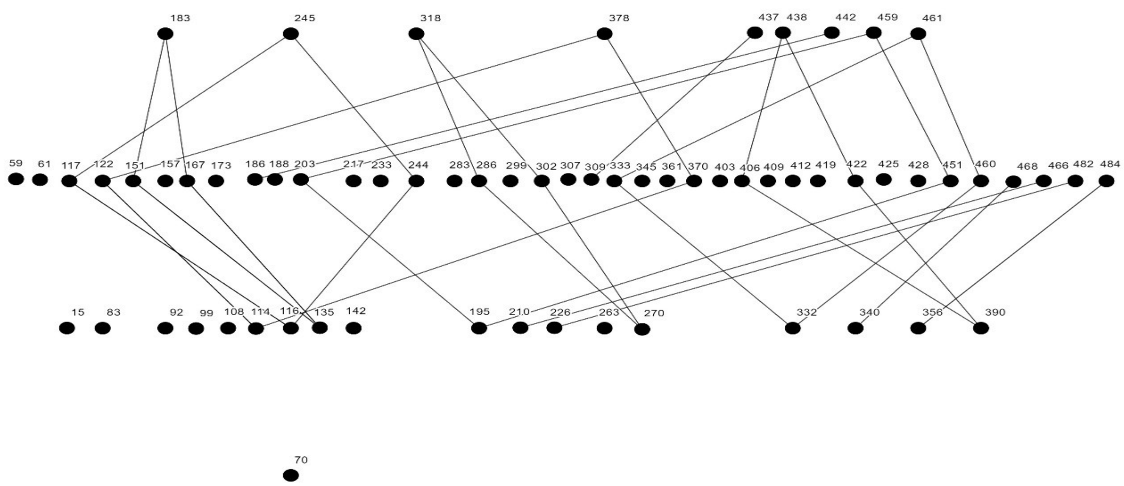

Рис. 6. Граф алгебр η_3 класу M_2^1.

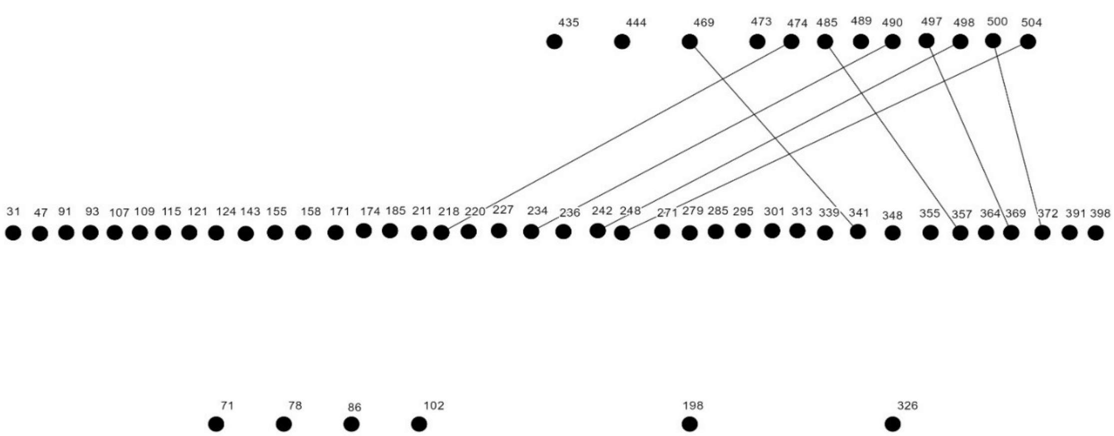

Рис. 7. Граф алгебр η_4 класу M_2^1.

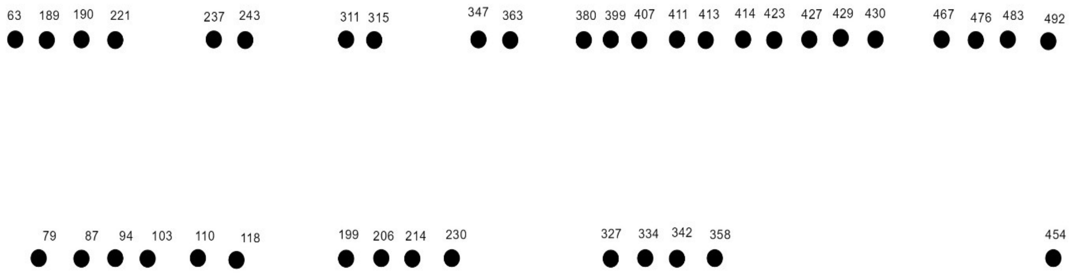

Рис. 8. Граф алгебр η_5 класу M_2^1.

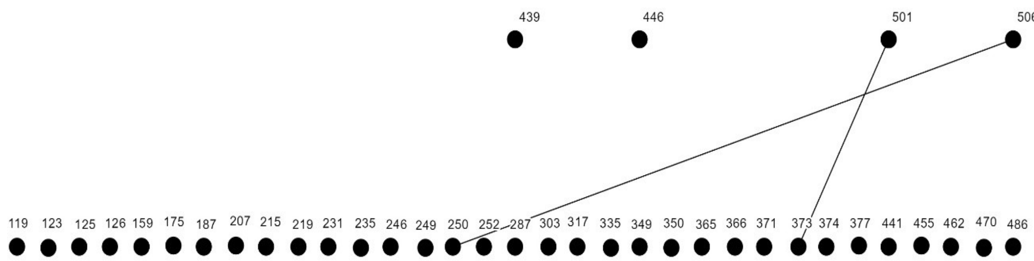

Рис. 9. Граф алгебр η_6 класу M_2^1.

Множини алгебр класів η_7-η_{15} є канонічними насиченими алгебрами і їх графи містять тільки ізольовані точки:

$$\eta_7 = \{95, 111, 222, 238, 343, 359, 247, 382, 463, 475, 477, 491, 493, 499, 502, 508\},$$

$$\eta_8 = \{191, 253, 319, 379, 415, 431, 443, 445, 471, 478, 487, 494, 505\},$$

$$\eta_9 = \{127, 223, 239, 251, 254, 351, 367, 375, 381\}, \ \eta_{10} = \{503, 510\},$$

$$\eta_{11} = \{447, 479, 495, 507, 509\}, \ \eta_{12} = \{255, 383\}, \ \eta_{15} = \{511\}.$$

Із наведених вище результатів випливають твердження.

Твердження 5. *У класі алгебр* M_2^1 *існує чотириста двадцять чотири функціонально повні алгебри.*

У таблиці 1 наведено число $l-$базисних алгебр, $l = 1, 2, \ldots, 15$ і їх розташування по ярусах $\Omega-$кубу.

Таблиця 1

Базис	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**15**
К-сть/ Ярус	72	105	66	57	39	37	16	13	9	2	5	2	1
2	9												
3	36	14	1										
4	25	61	18	6									
5	2	30	38	39	15								
6			9	12	24	33	6						
7						4	10	13	9				
8										2	5	2	
9													1

Наприклад, на п'ятому ярусі $\Omega-$кубу знаходяться дві однобазисні, тридцять двобазисних, тридцять вісім трибазисних, тридцять дев'ять чотирибазисних і п'ятнадцять п'ятибазисних алгебр. Трибазисні алгебри розташовані наступним чином: одна алгебра на третьому ярусі, вісімнадцять – на четвертому, тридцять вісім – на п'ятому та дев'ять – на шостому ярусі.

Твердження 6. *У класі алгебр* M_2^1 *існує двісті шістдесят п'ять канонічних алгебр.*

Ці алгебри утворюють сигнатурну решітку, яка зображена на рис. 10, і у таблиці 2 наведено їх розподіл за числом базисів.

Таблиця 2

Базис	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**15**
Кількість алгебр	15	40	39	49	39	35	16	13	9	2	5	2	1

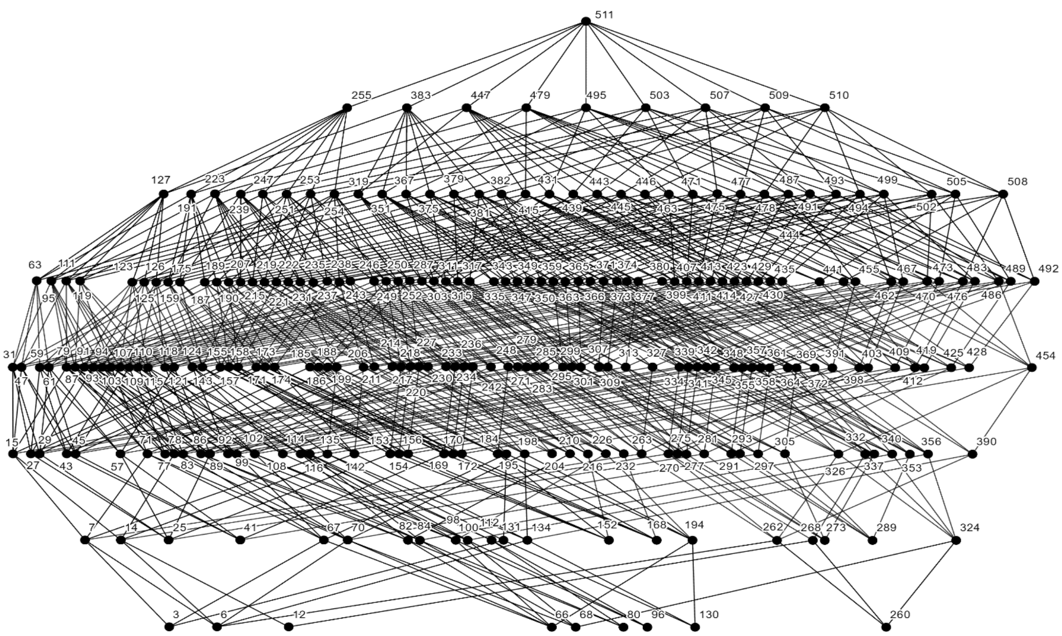

Рис. 10. Канонічні алгебри класу M_2^1.

Всі функціонально неповні алгебри є вільними алгебрами з рангом, що дорівнює потужності сигнатури.

Твердження 7. *У класі алгебр* M_2^1 *існує двісті сорок сім вільних алгебр.*

Розподіл цих алгебр за відповідними рангами наведено у наступній таблиці.

Таблиця 3

Ранг	0	1	2	3	4	5	6
Кількість	88	57	65	27	8	-	2

Вільні алгебри класу M_2^1 утворюють сигнатурний граф (рис. 11), який можемо отримати з сигнатурного кубу множин M_2^1 відтинанням канонічних алгебр.

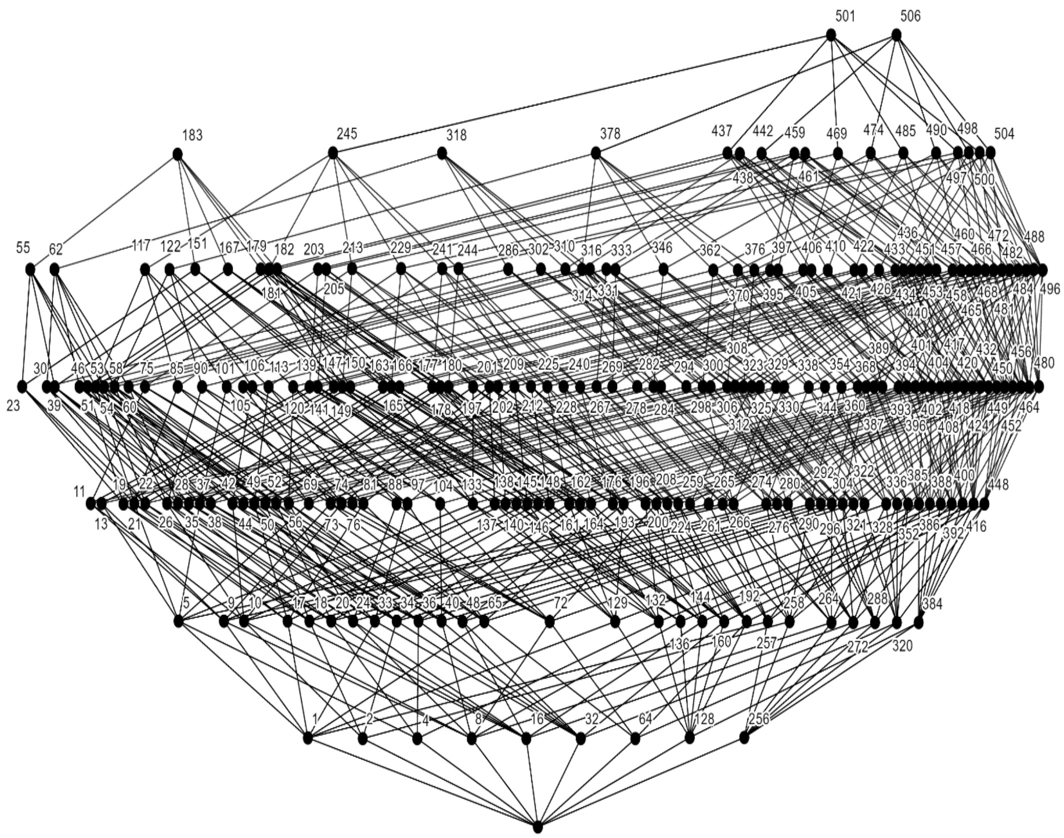

Рис 11. Вільні алгебри класу M_2^1.

Розглянемо узагальнення результатів, отриманих для класу M_2^1 на класи M_2^2, M_2^3, M_2^4, тобто на клас M_2. Клас алгебр M_2^2 утворюють 11-мірні вектори з фіксованими десятою одиничною координатою і одинадцятою нульовою координатою, з яких будується 9-мірний $\Omega-$куб, аналогічний $\Omega-$кубу класу M_2^1. Для кожної $k-$базисної алгебри з класу M_2, існує єдина відповідна $k+1-$базисна алгебра класу M_2^1 (у відповідних алгебрах перші дев'ять координат співпадають).

Аналогічні міркування можна провести і для алгебр класів M_2^3 і M_2^4. Для алгебр класу M_2^3 базисність алгебр у порівнянні з M_2^1 збільшиться на 2. Щоб визначити скільки $k-$базисних алгебр є у класі M_2, потрібно скористатися формулою: $|\eta_k| + 2\,|\eta_{k-1}| + |\eta_{k-2}|$, де $|\eta_k|$ $-$кількість $k-$базисних алгебр у класі M_2^1.

Твердження 8. *У класі алгебр M_2 з 2048 алгебр існує 88 функціонально неповних, а розпроділ функціонально повних алгебр наведений у таблиці 4.*

Таблиця 4

Базис	1	2	3	4	5	6	7	8
К-сть	248	337	348	294	219	172	129	82

Базис	9	10	11	12	13	14	15	16	17
К-сть	51	33	18	14	9	2	1	2	1

7. Висновки. Дослідження теорії булевих функцій є актуальним напрямком у сучасній дискретній математиці. У даній роботі проведені дослідження для класу універсальних алгебр, операції яких мають арність не більше двох. Побудована сигнатурна решітка класу алгебр M_2, потужність якого 2048. Вивчена базисність цих алгебр, побудовані сигнатурні графи для алгебр фіксованої базисності.

Список використаної літератури

1. Birkhoff G. On the structure of abstract algebras. Proceedings of the Cambridge philosophical society; Vol 31, October 1935. p. 433-454.
2. Мальцев А. И. Алгебраические системы. Москва: Наука, 1970. 392 с.
3. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. Москва: Наука, 1973. С. 3-393.
4. Сикорский Р. Булевы алгебры. Москва: Мир, 1969. 375 с.
5. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. Москва: Наука, 1969. 313 с.
6. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. П. Функции алгебры логики и классы Поста. Москва: Наука, 1966. 120 с.
7. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. Москва: Физматгиз, 1962. 476 с.
8. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Киев: Из-во АН УССР, 1964. 324 с.
9. Глушков В. М, Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наук. думка, 1974. С. 65-112.
10. Журавлев Ю. И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. Кибернетика. 1977. №4. С. 14-21, №6 С. 21-27.
11. Журавлев Ю. И. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Москва: Наука, 1977. С. 9-34.
12. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. Москва: Физматлит, 2014. 136 с.
13. Логачев О. А, Сольников А. А. Ященко В. В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии. Москва: МЦНМО, 2004. 470 с.
14. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. Київ: Наукова думка, 2002. 578 с. С. 246-248.

Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V. Investigation of signature cube of universal boolean algebra.

In this paper, the theory of Boolean functions from the point of view of universal Boolean algebras is considered. The present article uses the terminology of well-known authors Kurosh, Maltsev, Post and others. In addition, the paper introduces new concepts such as universal Boolean algebra, $l-$basic algebras, free and canonical algebras. The class of universal Boolean algebras M_2 is also studied, the signature of which includes all single and double operations of two-valued logic. Introducing the concept of the order of equation of algebra signatures were obtained representations of algebras in the form of an 11-digit signature cube. In this paper, cube has been divided into four nine-dimensional cubes M_2^1, M_2^2, M_2^3, M_2^4. A class M_2^1 contains of functionally complete algebras η_0 and a signature graph of this class is constructed, and investigation of these algebras is performed. The class of all functionally complete algebras have been divided into fifteen classes $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{15}$ and the signature graphs of each of these classes were constructed. The structure and types of algebras of these classes were studied. All functionally complete algebras of a class M_2^1 have been represented in the form of a signature graph.

The power of a class M_2^1 and the distribution of algebras in tiers has been established, and a signature graph of canonical algebras of this class has been constructed. The distribution of 259 free algebras on the tiers of the $\Omega-$cube is given and a signature graph of the class of free algebras is constructed.

The obtained results are generalized to classes M_2^1, M_2^2, M_2^3, M_2^4. Based on these results, the distribution 2048 algebras of class M_2 relative to the basicity on the tiers of the $\Omega-$cube is performed.

Keywords: Boolean operations, signature cube, basics of algebras.

References

1. Birkhoff, G. (1935). On the structure of abstract algebras. Proceedings of the Cambridge philosophical society; Vol 31, October p. 433-454.
2. Maltcev, A. Y. (1970). Algebraicheskie sistemy. Moskva: Nauka [in Russian].
3. Kurosh, A. H. (1973). Lekcii po obshchej algebre. Moskva: Nauka, 3-393 [in Russian].
4. Sykorskyi, R. (1969). Bulevy algebry. Moskva: Myr [in Russian].
5. Vladymyrov, D. A. (1969). Bulevy algebry. Moskva: Nauka [in Russian].
6. Yablonskyi, S. V., Havrylov, H. P., & Kudriavtsev, V. P. (1966). Funkcii algebry logiki i klassy Posta. Moskva: Nauka [in Russian].
7. Glushkov, V. M. (1962). Sintez cifrovyh avtomatov. Moskva: Fizmatgiz [in Russian].
8. Glushkov, V. M. (1964). Vvedenie v kibernetiku. Kiev: Iz-vo AN USSR [in Russian].
9. Glushkov, V. M, Cejtlin, G. E., & Yushchenko, E. L. (1974). Algebra. Yazyki. Programmirovanie. Kiev: Nauk. dumka, 65-112 [in Russian].
10. Zhuravlev, YU. I. (1977). Korrektnye algebry nad mnozhestvami nekorrektnyh (evristicheskih) algoritmov. Kibernetika, №4, 14-21, №6, 21-27 [in Russian].
11. Zhuravlev, YU. I. (1977). Diskretnaya matematika i matematicheskie voprosy kibernetiki. Moskva: Nauka, 9-34 [in Russian].
12. Marchenkov, S. S. (2014). Osnovy teorii bulevyh funkcij. Moskva: Fizmatlit [in Russian].
13. Logachev, O. A, Sol'nikov, A. A., & Yashchenko, V. V. (2004). Bulevy funkcii v teorii kodirovaniya i kriptologii. Moskva: MCNMO [in Russian].
14. Kapitonova, Yu. V., Kryvyj, S. L., Letychevskyj, O.A., Luczkyj, G.M., & Pechurin, M.K. (2002). Osnovy dyskretnoyi matematyky. Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].

Одержано 02.10.2020