УДК 519.8
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).168-175

Н. В. Семенова[1], М. М. Ломага[2]

[1] Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор фіз.-мат. наук
nvsemenova@meta.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5442-5413

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
старший викладач кафедри системного аналізу і теорії оптимізації
mariia.lomaha@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8813-0464

ПРО ІСНУВАННЯ І ОПТИМАЛЬНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ВЕКТОРНОЇ ЗАДАЧІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПУКЛОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ЛІНІЙНИМИ ФУНКЦІЯМИ КРИТЕРІЇВ

Серед векторних задач лексикографічні задачі утворюють досить широкий і важливий клас задач оптимізації. Лексикографічне впорядкування використовується для встановлення правил субординації й пріоритету. Тому значна кількість задач, в тому числі задачі оптимізації складних систем, задачі стохастичного програмування в умовах ризику, задачі динамічного характеру та ін., можна подати у вигляді лексикографічних задач оптимізації. Встановлено умови існування та оптимальності розв'язків багатокритеріальних задач лексикографічної оптимізації з необмеженою множиною допустимих розв'язків на основі використання властивостей рецесивного конусу опуклої допустимої множини, конусу, що лексикографічно впорядковує її відносно критеріїв оптимізації та локальних шатрів, що будуються в граничних точках допустимої множини. Отримані умови можна успішно використовувати при розробці алгоритмів пошуку оптимальних розв'язків зазначених задач лексикографічної оптимізації.

Ключові слова: лексикографічна оптимізація, векторний критерій, існування розв'язків, умови оптимальності, множина Парето, множина Слейтера.

1. Вступ. Лексикографічний підхід до розв'язання багатокритеріальних задач полягає в строгому ранжируванні критеріїв за відносною важливістю і дозволяє домогтися оптимізації більш важливого критерію за рахунок будь-яких втрат за всіма іншими менш важливими критеріями. Найчастіше такі багатокритеріальні задачі виникають при послідовному введенні додаткових критеріїв у звичайні скалярні задачі оптимізації, які можуть мати не єдиний розв'язок. Задачі лексикографічної оптимізації виникають також при моделюванні ієрархічних структур, у стохастичному програмуванні, при розв'язанні деяких задач динамічного характеру тощо [1-3]. У лексикографічному вигляді можна подати векторні задачі динамічного характеру, які полягають у послідовному досягненні часткових цілей. У лексикографічній постановці формулюються задачі оптимізації складних систем, які полягають із взаємозалежних підсистем, що відносяться до різних ієрархічних рівнів.

До можливих методів розв'язання таких задач відноситься використання схеми скаляризації або згортки векторного критерію для одноетапного розв'язання [1, 2]. У [2] для відшукання лексикографічного оптимуму лінійних багатокритеріальних задач оптимізації було запропоновано використання симплексметоду. У [4, 5] задача лексикографічної оптимізації з лінійними обмеженнями зводиться до послідовності лінійних лексикографічних задач шляхом апроксимації функцій критеріїв. У [6] представлено алгоритм, що дозволяє звести розв'язання вхідної задачі лексикографічної оптимізації за допомогою апроксимації допустимої множини до розв'язання послідовності лексикографічних задач лінійного програмування. В однокритеріальній оптимізації ряд алгоритмів пошуку екстремуму побудовано на використанні апарата теорії двоїстості. Це питання є цікавим і для задач багатокритеріальної оптимізації. У статті [7] досліджуються опуклі квадратичні задачі лексикографічної оптимізації на множині, заданій системою лінійних нерівностей, і питання побудови двоїстих до них задач. Двоїсті задачі до вхідної будуються за допомогою відображення Лагранжа, де множники Лагранжа – це векторні змінні, множиною значень кожної з яких є множина векторів простору, розмірність якого рівна кількості часткових критеріїв з введеним на ньому лексикографічним порядком. Метою досліджень, представлених в даній статті, є встановлення умов існування оптимальних розв'язків багатокритеріальних задач лексикографічної оптимізації з необмеженою допустимою множиною та умов оптимальності розв'язків на основі використання властивостей рецесивного конусу опуклої допустимої множини [8], конусу, що лексикографічно її впорядковує відносно критеріїв оптимізації [2] та локальних шатрів [9] в граничних точках допустимої множини.

2. Постановка задачі. У критеріальному просторі R^l вводиться бінарне відношення лексикографічного порядку векторів $z = (z_1, z_2, \dots, z_l)$ і $z' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_l)$ таке, що $z \geq^L z' \Leftrightarrow (z = z') \vee (\exists j \in N_l : \forall i \in N_{j-1}(z_j > z'_j, z_i = z'_i))$, де $N_0 = \emptyset$.

Розглянемо задачу лексикографічної оптимізації наступного вигляду:

$$Z_L(F, X) : \max{}^L\{F\,(x)\,|x \in X\},$$

де $F(x) = (f_1, f_2, \dots, f_l), l \geq 2, f_k(x) = \langle c_k, x\rangle, c_k \in R^n, k \in N_l = \{1, 2, \dots, l\}$, $X = \{x \in R^n | g^i(x) \leq 0, x \geq 0, i \in N_m\}$, $g^i(x)$, $i \in N_m$, – опуклі функції. В задачі лексикографічної оптимізації часткові критерії впорядковані за важливістю. При цьому виникає поняття лексикографічного оптимуму.

Означення 1. *Вектор x лексикографічно переважає вектор x', коли виконується одна з l умов:*
1) $f_1(x) > f_1(x')$;
2) $f_1(x) = f_1(x')$, але $f_2(x) > f_2(x')$;
. . . .
l) $f_j(x) = f_j(x'), j = 1, 2, \dots, l-1$, але $f_l(x) > f_l(x')$.

Означення 2. *Вектор x еквівалентний вектору x', коли за кожним критерієм вектори x та x' мають однакові оцінки, при цьому $x \neq x'$.*

Під розв'язанням задачі $Z_L(F, X)$ будемо розуміти пошук елементів множини $L(F, X)$ лексикографічних оптимальних розв'язків, яку задамо в такий спосіб:

$$L(F, X) = \{x \in X | \upsilon(x, F, X) = \emptyset\},$$

де $\upsilon(x, F, X) = \{x' \in X | \exists j \in N_l : f_j(x') > f_j(x) \wedge j = \min\{i \in N_l : f_i(x') \neq f_i(x)\}\}$.

Безпосередньо з означення лексикографічно оптимальних розв'язків випливає, що множину $L(F, X)$ можна задати за допомогою рекурентних співвідношень. Таким чином,

$$L_i(F, X) = Arg\max\{f_i(x) : x \in L_{i-1}(F, X), i \in N_l\}, \quad (1)$$

де $Arg\max\{\cdot\}$ – множина всіх оптимальних розв'язків відповідної задачі максимізації, $L_0(F, X) = X$, $L_l(F, X) = L(F, X)$.

Із співвідношень (1) випливає справедливість включень послідовності множин

$$X \supseteq L_1(F, X) \supseteq L_2(F, X) \supseteq \ldots \supseteq L_l(F, X) = L(F, X),$$

тобто кожен наступний частковий критерій звужує множину розв'язків, отриманих з урахуванням всіх попередніх часткових критеріїв.

Як відомо [1, 2], множина $L(F, X)$ може бути визначена, як результат розв'язання послідовності l скалярних задач $Z_{L_i}(F, X), i \in N_l$ опуклого програмування з лінійними цільовими функціями. Отже, задачу $Z_L(F, X)$ можна розглядати як задачу послідовної оптимізації.

Відзначимо важливу властивість задач $Z_{L_i}(F, X), i \in N_l$, [8]: будь-який локальний мінімум (максимум) є глобальним мінімумом (максимумом).

Очевидні наступні властивості.

Властивість 1. *Якщо для допустимого розв'язку $x^0 \in X$ $\forall x \in X \setminus \{x^0\}$ виконується нерівність $f_1(x) < f_1(x^0)$, то $x^0 \in L(F, X)$.*

Властивість 2. *Якщо для допустимого розв'язку $x \in X$ $\exists x' \in X \setminus \{x\}$ такий, що $f_1(x') > f_1(x)$, то $x \notin L(F, X)$.*

Згідно [2] введемо означення.

Означення 3. *Вектор $z \in R^l$ називається лексикографічно додатним, якщо перший його ненульовий компонент у порядку зростання індексів компонентів є додатним.*

Будемо позначати лексикографічну додатність вектора $z \in R^l$ як: $z >^L 0$, тут $(>^L)$ – знак відношення лексикографічно більше.

Вектор $z \in R^l$ лексикографічно більше вектора $y \in R^l$ $z >^L y$, якщо вектор $(z - y)$ лексикографічно додатний, $(z - y) >^L 0$. При такому упорядкуванні будь-які два вектори однієї розмірності порівнювані між собою.

Отже, для будь-яких векторів $a, b \in R^l$ $a >^L b$ тоді й тільки тоді, коли існує індекс $1 \leq i \leq l$, такий, що $a_i > b_i$, і якщо $i > 1$, то $a_k = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, i - 1$. Вектор a лексикографічно не менше вектора b, $a \geq^L b$, якщо $a >^L b$ або $a = b$, $(\geq^L)$ – знак відношення лексикографічно не менше.

Означення 4. *Розв'язок $x^* \in X$ задачі $Z_L(F, X)$ будемо називати лексикографічно оптимальним, якщо він не гірше будь-якого іншого допустимого розв'язку $y \in X$ в розумінні відношення $\geq^L$, тобто якщо $F(x^*) - F(y) \geq^L 0$.*

Отже, для довільного $x \in X$ справедливе твердження

$$x \in L(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X | F(y) >^L F(x)\} = \emptyset.$$

У лексикографічній задачі оптимізації досягають як завгодно малого приросту більш важливого критерію за рахунок будь-яких втрат за іншими менш важливими критеріями.

3. Існування лексикографічно оптимальних розв'язків. Існування оптимальних розв'язків на допустимій множині X і структура множини оптимальних розв'язків залежать від властивостей порядку відношення переваги, структури допустимої області X, природи її елементів та ін. Згідно [2] скінченність множини X є достатньою умовою існування оптимальних розв'язків лексикографічної задачі оптимізації. Також множина $L(F,X)$ не порожня, якщо множина векторних оцінок $Y = \{F(x)|x \in X\}$ обмежена і замкнена. Однак у випадку нескінченної допустимої області X множина лексикографічно оптимальних розв'язків може бути порожньою.

Актуальним є вивчення питань можливості розв'язання лексикографічних задач векторної оптимізації, у яких множина допустимих розв'язків необмежена і опукла.

Необмеженість опуклої множини X означає, що $0^+X \setminus \{0\} \notin \emptyset$, де $0^+X = \{y \in R^n | \forall x \in X : x + ty \in X, t \geq 0\}$ – рецесивний конус множини X. Аналіз задачі $Z_L(F,X)$ проведемо з урахуванням властивостей рецесивного конусу 0^+X [8] й конусу $K^L = \{x \in R^n | Cx >^L 0\}$, що лексикографічно впорядковує допустиму множину відносно критеріїв оптимізації, який назвемо також конусом перспективних [10] лексикографічних напрямків задачі $Z_L(F,X)$, оскільки перехід з будь-якої точки $x_1 \in R^n$ в точку $x_2 = x_1 + y$, де y належить конусу K^L, приводить до нерівності $Cx_2 >^L Cx_1$, тобто до лексикографічного зростання значень векторного критерію задачі.

Конус K^L, що визначає лексикографічний порядок у просторі R^l, є опуклим конусом напрямків лексикографічно додатних векторів і його можна подати у вигляді об'єднання множин, що не перетинаються:

$$K^L = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_{l,}$$

де $K_1 = \{x \in R^n | c_1x > 0\}$,

$K_2 = \{x \in R^n | c_1x = 0, c_2x > 0\}$,

....

$K_l = \{x \in R^n | c_1x = 0, c_2x = 0, \ldots, c_{l-1}x = 0, c_lx > 0\}$.

Для довільного $x \in X$ істинне висловлювання [2]:

$$x \in L(F,X) \Leftrightarrow (x + K^L) \cap X = \emptyset. \tag{2}$$

Продовжуючи дослідження питань існування різних видів оптимальних розв'язків векторних задач оптимізації [11-14], розпочаті в роботі [2] для лексикографічних задач, розглянемо необхідні й достатні умови існування лексикографічно оптимальних розв'язків задачі $Z_L(F,X)$.

У випадку опуклої замкненої необмеженої допустимої множини X задачі $Z_L(F,X)$ справедлива теорема.

Теорема 1. *Необхідною умовою існування лексикографічно оптимальних розв'язків задачі $Z_L(F,X)$ є порожній перетин конуса K^L перспективних лексикографічних напрямків і рецесивного конуса 0^+X, тобто*

$$K^L \cap 0^+X = \emptyset. \tag{3}$$

Доведення. Припустимо від супротивного, що множина $L(F,X) \neq \emptyset$, але не виконується умова (3), тобто перетин конусів K^L та 0^+X не порожній: $K^L \cap \cap 0^+X \neq \emptyset$. Тоді $\forall x \in X$ справедливі співвідношення:

$$(x + K^L) \cap X \supseteq (x + K^L) \cap (x + 0^+X) = x + (K^L \cap 0^+X) \neq \emptyset.$$

Враховуючи формулу (2), можна зробити висновок, що множина $L(F,X) = \emptyset$. Але це суперечить умові теореми й тим самим доводить її справедливість.

Обернене твердження теореми в загальному випадку не є вірним. У монографії [2:113] наведено приклад, у якому для допустимої множини виконана умова (3), але множина її крайніх точок є необмеженою, і в результаті множина $L(F,X) = \emptyset$.

Напрямок лексикографічно додатного вектора будемо називати лексикографічно додатним напрямком.

Справедлива теорема.

Теорема 2 [2:113]. *Нехай V – непорожня множина крайніх точок опуклої замкненої множини X. Якщо V – обмежена множина, то множина X має лексикографічний максимум тоді й тільки тоді, коли вона обмежена за всіма лексикографічно додатними напрямками.*

В наших позначеннях за умов теореми 2 множина $L(F,X)$ не порожня тоді й тільки тоді, коли виконується умова (3).

У випадку опуклої необмеженої і багатогранної множини X справедливий наслідок з теореми 2.

Наслідок 1 [2:114]. *Замкнена опукла багатогранна множина має лексикографічний максимум тоді й тільки тоді, коли вона обмежена за всіма лексикографічно додатними напрямками.*

З теореми 1 та наслідку з теореми 2 випливає справедливість наступної теореми.

Теорема 3. *Нехай допустима множина задачі є замкненою опуклою багатогранною множиною. Необхідною і достатньою умовою існування лексикографічно оптимальних розв'язків цієї задачі є виконання рівності* (3).

Зазначимо, що умова багатогранності опуклої замкненої необмеженої множини X є істотною для ствердження того факту, що умова (3) є необхідною й достатньою умовою існування лексикографічно оптимальних розв'язків задачі $Z_L(F,X)$.

4. Умови оптимальності розв'язків. Як відомо [3,10-14], якщо критерії векторної задачі є рівноважливими, під розв'язанням векторної задачі звичайно розуміють знаходження деякої підмножини однієї з таких множин: $P(F,X)$ усіх Парето-оптимальних (ефективних) розв'язків, $Sl(F,X)$ оптимальних за Слейтером розв'язків. Справедливі твердження $\forall x \in X$:

$$x \in P(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X | F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x)\} = \emptyset$$

$$x \in Sl(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X | F(y) > F(x)\} = \emptyset.$$

Очевидно, що $L(F,X) \subseteq P(F,X) \subseteq Sl(F,X)$.

Як відомо з теореми 1 з [3:163], у зв'язку з лінійністю функцій критерію задачі $Z_L(F,X)$ та незалежно від структури допустимої множини X Парето-оптимальні і оптимальні за Слейтером розв'язки можуть або складати всю допустиму множину, або знаходитись лише на її границі. Тому, враховуючи включення $L(F,X) \subseteq P(F,X) \subseteq Sl(F,X)$ при встановленні необхідних і достатніх умов лексикографічної оптимальності розв'язків задачі будемо розглядати лише граничні точки множини X.

Позначимо FrB підмножину граничних точок деякої множини B. Нехай $y \in FrX$. Введемо до розгляду такі множини: $N(y) = \{i \in N_m|\ g_i(y) = 0\}$, $X(y) = \{x \in R^n|\ g_i(x) \leq 0, i \ \in N(y)\}$. Крім того, якщо $g_i(x), i \in N(y)$, – неперервно диференційовні функції в R^n, визначимо множину

$$Q(y) = \{x \in R^n|\ \langle \nabla g_i(y),\ (x - y)\rangle \leq 0, i \in N(y)\},$$

де $\nabla g_i(y)$ – градієнт функції $f_i(x)$ у точці $y, i \in N(y)$. Очевидно, що $\forall y \in FrX$: $N(y) \neq \emptyset, y + 0^+X \subseteq X \subseteq X(y) \subseteq Q(y)$.

Теорема 4. *Нехай $y \in FrX$. Якщо $g_i(x), i \in N(y)$, – неперервно диференційовні функції, то співвідношення*

$$K^L \cap (Q(y) - y) = \emptyset \tag{4}$$

є достатньою умовою для включення $y \in L(C,X)$. Крім того, якщо $\{\bigtriangledown g_i(y)|$ $i \in N(y)\}$ – система лінійно незалежних векторів, то співвідношення

$$K_1 \cap (Q(y) - y) = \emptyset \tag{5}$$

є необхідною умовою для включення $y \in L(C,X)$.

Доведення. *Достатність* умов теореми стає очевидною, враховуючи включення $X \subseteq Q(y)$, а також формулу (2).

Необхідність. Вимога лінійної незалежності векторів $\{\bigtriangledown g_i(y)|i \in N(y)\}$ приводить до виконання співвідношень: $intQ(y) \neq \emptyset$, $intQ(y) = riQ(y)$, де riB – відносна внутрішність деякої множини B.

Нехай $y \in L(C,X)$, тобто згідно формулі (2)

$$(x + K^L) \cap X = \emptyset. \tag{6}$$

Припустимо (від супротивного), що співвідношення (5) не виконується, тобто $K_1 \cap (Q(y) - y) \neq \emptyset$, звідки за наслідком 6.3.2 з [8] $K_1 \cap int(Q(y) - y) \neq \emptyset$. Враховуючи також, що за умов даної теореми сума лінійних оболонок конусів K_1 і $(Q(y) - y)$ збігається з R^n, і згідно з теоремою 3.4 [15:31] робимо висновок про невідокремлюваність конусів $K_1 \cup \{0\}$ та $int(Q(y) - y)$, що є локальними шатрами [9, 15] у точці y множин $(y + K_1) \cup \{y\}$ та X відповідно. Крім того, кожен із цих локальних шатрів не є лінійним підпростором в R^n, оскільки точка $\{0\} \in R^n$ не належить їхнім внутрішностям, а також враховуючи теореми 1.1 та 6.1 з [8]. Тоді відповідно до теореми 1.3 з [15:204] $((y+K_1) \cup \{y\}) \cap X \setminus \{y\} \neq \emptyset$, що суперечить умові (6) і тим самим доводить необхідність виконання співвідношення (5) для будь-якої лексикографічно оптимальної граничної точки $y \in X$ за умов теореми. Доведення теореми завершено.

5. Висновки. Досліджені питання існування та оптимальності розв'язків опуклих задач лексикографічної оптимізації з лінійними функціями критеріїв та необмеженій допустимій множині. На основі проведеного аналізу зазначених задач з урахуванням властивостей конусів перспективних лексикографічних напрямків, рецесивних напрямків та локальних шатрів у граничних точках допустимої множини встановлено необхідні та достатні умови існування та оптимальності розв'язків досліджених задач. Отримані умови можна успішно використовувати при розробці алгоритмів пошуку оптимальних розв'язків зазначених задач лексикографічної оптимізації.

Список використаної літератури

1. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975. 192 с.
2. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород: Ужгородський національний університет, 2002. 312 с.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Физматлит, 2007. 256 с.
4. Ломага М.М., Семенов В.В. Квадратичные задачи лексикографической оптимизации: свойства и решения. *Компьютерная математика.* 2013. № 2. С. 134-143.
5. Семенова Н.В., Ломага М. М., Семенов В.В. Алгоритм решения многокритериальных задач лексикографической оптимизации с выпуклыми функциями критериев. *International Journal "Information Theories and Applications".* Vol. 21, N 3. 2014. P. 254-262.
6. Ломага М. М. Розв'язання задач лексикографічної оптимізації з лінійними функціями критеріїв на опуклій множині. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ.* 2015. №2 (27). С. 66-72.
7. Ломага М. М., Семенова Н.В. Квадратичні лексикографічні задачі оптимізації і відображення Лагранжа. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ.* 2019. №2 (35). С. 127-133.
8. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
9. Болтянский В.Г. Метод шатров в теории экстремальных задач. *Успехи математических наук.* 1975. 30, № 3(183). С. 3–55.
10. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. К.: Наук. думка, 1995. 171 с.
11. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Кононова А. А. Устойчивость и неограниченность задач векторной оптимизации. *Кибернетика и систем. анализ.* 1997. № 1. С. 3–10.
12. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации. *Кибернетика и систем. анализ.* 2000. № 6. С. 39–46.
13. Сергієнко Т.І. Про існування парето-оптимальних розв'язків задачі векторної оптимізації з необмеженою допустимою областю. *Доповіді НАН України.* 2015, № 10. С. 27-31.
14. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною. *Доповіді НАН України.* 2003, № 10. С. 80–85.
15. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

Semenova N. V., Lomaha M. M. On existence and optimality of solutions of a vector problem of lexicographic convex optimization with linear of criteria functions.

Vector problems lexicographic ones constitute a broad and significant class of problems of optimization. Lexicographic ordering is applied to establish rules of subordination and priority. Hence, a lot of problems including the ones of complex system optimization, of stochastic programming under risk, of dynamic character, etc. may be presented in the form of lexicographic problems of optimization. We have revealed conditions of existence and optimality of solutions of multi-criteria problems of lexicographic optimization with an unbounded set of feasible solutions on the basis of applying properties of a recession cone of a convex feasible set, the cone which puts in order lexicographically of a feasible set with respect to optimization criteria and local tent built at the boundary points of the feasible set. Received conditions may be successfully used while developing algorithms for finding optimal solutions of mentioned problems of lexicographic optimization.

Keywords: lexicographic optimization, vector criterion, existence of solutions, optimality conditions, set of Pareto, set of Slater.

References

1. Podinovskiy, V. V., & Gavrilov, V.M. (1975). Optimization on the consistently applied criteria. *Moskow*: *Sov. radio.* [in Russian]
2. Chervak, Y. Y. (2002). Optimizatsiya. Nepokraschuvaniy vibir. *Uzhgorod*: *Uzhgorodskiy natsIonalniy unIversitet* [in Ukrainian].
3. Podinovskiy, V. V., & Nogin, V.D. (2007). Pareto-optimal solutions of multicriteria problems. 2-th publ. *Moscow*: *Fizmatlit* [in Russian].
4. Lomaha, M.M., & Semenov, V.V. (2013). Quadratic problems of lexicographic optimization: properties and solving. *Komp'yuterna mathematica.* N 2. (pp. 134 – 143) [in Ukrainian].
5. Semenova, N.V., Lomaha, M.M., & Semenov, V.V. (2014). Algorithm of solving of multicriteria lexicographic optimization problems with the convex functions of criteria. *International Journal "Information Theories and Applications".* Vol. 21, N 3. (pp. 254–262). [in Russian]
6. Lomaha, M.M. (2015). Solving lexicographic optimization problems with linear functions of criteria on a convex set. *Uzhgorod University Scientific Bulletin. Series*: *Mathematics and Informatics.* N 2(27). (pp. 70 – 75) [in Ukrainian].
7. Lomaha, M.M., & Semenova, N.V. (2019). Quadratic lexicographic problems of optimization and Lagrange's reflection. *Uzhgorod University Scientific Bulletin. Series*: *Mathematics and Informatics.* N 2(35). (pp. 127 – 133) [in Ukrainian].
8. Rockafellar, R. (1973). Convex analysis. *Moscow*: *Mir* [in Russian].
9. Boltyanskyy, V.H. (1975). Tent method in the theory of extreme problems. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk.* 30, N 3(183). (pp. 3–55) [in Russian]
10. Sergienko, T.I., Kozeratska, L. N., & Lebedeva, T. T. (1995). Investigation of stability and parametric analysis of discrete optimization problems. *Kyiv*: *Nauk. dumka.* [in Russian].
11. Sergienko, I.V., Kozeratska, L. N., & Kononova, A.A. (1997). Stability and unboundedness of vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* Vol. 33, N1. (pp. 1–7) [in Russian].
12. Sergienko, I.V., Lebedeva, T.T., & Semenova, N.V. (2000). Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* Vol. 36, N 6. (pp. 823 –828) [in Russian].
13. Sergienko, T.I. (2015). Existence of Pareto-optimal solutions to the vector optimization problem with an unbounded feasible set. *Dopov. NAN Ukraini.* N 10. (pp. 27 – 31) [in Ukrainian].
14. Lebedeva, T. T., Semenova, N.V., & Sergienko, T.I. (2003). Optimality and solvability conditions in linear vector optimization problems with convex feasible region. *Dopov. NAN Ukraini.* N 10. (pp. 80 – 85) [in Ukrainian].
15. Pshenichny, B. N. (1980). Convex analysis and extreme problems. *Moscow*: *Nauka* [in Russian].

Одержано 03.10.2020