МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ І СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
„УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КОМП’ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ З КУРСУ ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету, заочного відділення, спеціальність „Міське будівництво та господарство” і „Приладобудування”

Ужгород – 2012

Методичні вказівки і завдання до контрольних робіт з курсу „Вища математика” для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету, заочного відділення, спеціальностей „Міське будівництво та господарство” і „Приладобудування”

Укладач: **Балога С.І., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри комп’ютерних систем та мереж;**

Рецензент: **Щобак Н.М., канд. фіз.-мат. наук, доцент;**

Відповідальний за випуск: **Король І.Ю., канд. фіз.-мат. наук, доцент, зав. кафедри комп’ютерних систем та мереж**

Дані методичні вказівки розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп’ютерних систем та мереж, протокол №4 від 8 листопада 2012 р. та методичної комісії інженерно-технічного факультету, протокол №1 від 9 листопада 2012 р.

ВСТУП

Навчальна дисципліна „Вища математика” базується на нормативній програмі вищої математики за перший курс для студентів вищих навчальних закладів за спеціальностями „Міське будівництво та господарство”, „Технології машинобудування”, „Приладобудування” та „Електронні системи”.

Головна мета викладання даної дисципліни – надати студентам фундаментальні знання з математики, які дозволяють у подальшому засвоювати спеціальні дисципліни, що базуються на математичних поняттях. При цьому значна увага надається виробленню практичних навиків при розв’язанні конкретних задач, вмінню застосовувати математичні методи для дослідження реальних технічних процесів.

Мета методичних вказівок – допомогти студенту в його самостійній роботі по розв’язанню задач з вищої математики.

До кожної теми подаються короткі теоретичні відомості, зразки розв’язання прикладів та вправи для самостійної роботи.

Контрольна робота № 1

Теми: ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ВСТУП В МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. МАТРИЧНІ ОПЕРАЦІЇ. РОЗВ' ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Різновиди матриць

Матрицею називають прямокутну таблицю упорядкованих чисел або виразів, розташованих в m рядках та n стовпцях і записану у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Якщо матриця містить лише один рядок, то її називають ***матрицею-рядком*** або ***вектором-рядком***. Якщо матриця містить лише один стовпець, то її називають ***матрицею-стовпцем*** або ***вектором-стовпцем***.

Матрицю, в якої число рядків дорівнює числу стовпців ($m = n$), називається ***квадратною***.

Взагалі кажучи, $a_{ij} \neq a_{ji}$, але існують матриці, для яких виконується умова $a_{ij} = a_{ji}$ $\left(\forall i \in \overline{1,m};\ j \in \overline{1,n}\right)$. Такі матриці називаються ***симетричними.***

У випадку квадратної матриці, відрізок, який починається і лівому верхньому куті матриці й закінчується в правому нижньому, – ***називається головною діагоналлю;*** іншу діагональ матриці називають ***побічною***.

Процес перетворення рядків матриці в стовпці і навпаки називають ***транспонуванням матриці***. Матрицю, транспоновану до матриці A, позначають A^T.

Квадратну матрицю називають ***діагональною,*** якщо всі її елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю. Елементи головної діагоналі можуть бути як нульовими, так і відмінними від нуля.

Квадратну матрицю називають ***одиничною***, якщо вона є діагональною і всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

Квадратну матрицю називають ***верхньою трикутною,*** якщо всі її елементи, які розташовані нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Нижче наведено приклади усіх, вище розглянутих, різновидів матриць:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ – прямокутна матриця; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ – матриця-рядок;

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець; $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ – квадратна матриця;

$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця; $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця;

$F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ – верхня трикутна матриця; $R = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ – симетрична матриця.

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до квадратної матриці *A,* якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E - одинична матриця.

Пошук оберненої матриці можливий, якщо вона невироджена, тобто її визначник відмінний від нуля.

Визначники та їх обчислення

Визначником (детермінантом) квадратної матриці *A* порядку *n* називається число, яке знаходиться з елементів матриці *A* за певним правилом. Визначник матриці *A* позначають через |A|.

Правило знаходження визначника матриці 2-го порядку: визначник матриці другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей, тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \quad (2)$$

Правило знаходження визначника матриці 3-го порядку: визначник матриці третього порядку знаходять за формулою

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \quad (3)$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{32}$$

Системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими

Системою *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими називають систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad (4)$$

де a_{ij} – коефіцієнти системи, x_j – невідомі, b_i – вільні члени, $i, j = 1.n$ – дискретні змінні.

Матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь

Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

де A – основна матриця системи; X – матриця-стовпчик невідомих; B – матриця-стовпчик вільних членів. Тоді систему (4) запишемо у матричному вигляді

$$A \cdot X = B \tag{5}$$

Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи (5) можна знайти за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{6}$$

Метод Крамера розв'язання системи лінійних рівнянь

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

де Δ – основний визначник; $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ – визначники, які отримують з Δ заміною відповідно $1,2,\dots,$n- го стовпчиків на стовпчик вільних членів.

Теорема (Крамера). Якщо основний визначник системи рівнянь $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} (i = 1,2,\cdots,n). \tag{7}$$

Приклад. Розв'язати матричним методом та методом Крамера систему лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 = 8; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

► Послідовність операцій при розв'язанні матричним методом,

наведено на рис. 1.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Рис.1

При розв'язуванні методом Крамера одержуємо рис.2

$$\Delta := \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right| \qquad \Delta = -3 \qquad \Delta 1 := \left| \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right| \qquad \Delta 1 = -6$$

$$\Delta 2 := \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right| \qquad \Delta 2 = -9 \qquad \Delta 3 := \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right| \qquad \Delta 3 = 9$$

$$x_1 := \frac{\Delta 1}{\Delta} \quad x_1 = 2 \qquad x_2 := \frac{\Delta 2}{\Delta} \quad x_2 = 3 \qquad x_3 := \frac{\Delta 3}{\Delta} \quad x_3 = -3$$

Рис.2

2. ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Вектором називається напрямлений відрізок. Позначають його $\overrightarrow{AB}$, якщо початок вектора знаходиться в точці A, а кінець вектора знаходиться в точці B. Вектор позначають також малою буквою латинського алфавіту, наприклад $\vec{a}$.

Відстань між початком вектора і його кінцем називається ***довжиною*** або ***модулем вектора*** і позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $\left|\vec{a}\right|$.

Вектор, у якого початок збігається з кінцем, називається ***нульовим*** і позначається $\left|\vec{0}\right|$. ***Одиничним*** називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\left|\vec{a}\right|$ називається ортом вектора $\vec{a}$ і позначається $\overrightarrow{a^0}$.

Вектори $\left|\vec{a}\right|$ і $\left|\vec{b}\right|$ називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Вектори $\left|\vec{a}\right|$ і $\left|\vec{b}\right|$ називаються ***рівними***, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини та однаково напрямлені.

Вектор, колінеарний вектору $\vec{a}$, рівний йому за модулем, але протилежно з ним напрямлений, називається протилежним вектором і позначається $-\vec{a}$.

Додавання векторів

Нехай маємо вектори $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$ і $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$. Сума, різниця та множення вектора на число *k* визначаються наступним чином:

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\left(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\right),\ k\cdot\vec{a}=\left(ka_x,ka_y,ka_z\right).$$

Графічно ці операції представлені на рис.1:

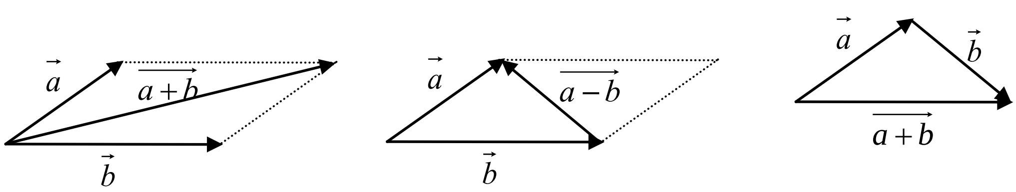


Рис.1

Проекцією вектора AB на вісь *u* називається додатне число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ і вісь *u* мають однаковий напрям, в протилежному випадку проекцією буде від'ємне число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$.(рис.2)

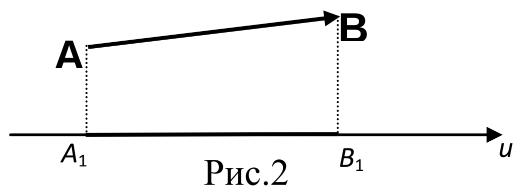


Рис.2

Кутом між вектором і віссю u (або між двома векторами) називається найменший з кутів, на який потрібно повернути один вектор або вісь, щоб він збігався за напрямом з другим вектором або віссю ($0\le\varphi\le\pi$).(рис.3,4)

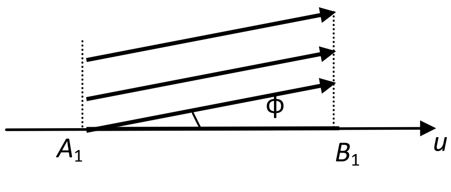


Рис.3

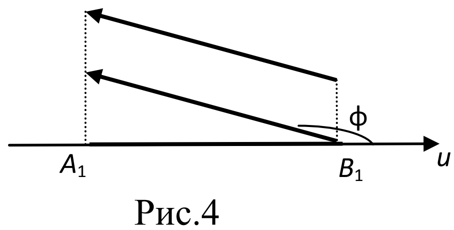


Рис.4

Якщо вектор задано його проекціями, то довжина вектора визначається за формулою $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ або , якщо задані координати точок початку і кінця вектора $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$.

Якщо два вектори $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ колінеарні, то виконується умова $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$ і навпаки.

Якщо два вектори $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ рівні, то виконується умова $a_x=b_x, a_y=b_y, a_z=b_z$ і навпаки.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, що дорівнює добутку дожин цих векторів на косинус кута між ними:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$ де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $(\overrightarrow{\lambda a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
4. Якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0,$ то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0,$ коли кут φ гострий, і $\vec{a}\cdot\vec{b}<0,$ коли кут φ тупий.
5. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно-перпендикулярні.
6. $(\vec{a})^2=|\vec{a}|^2$.

Якщо задано два вектори $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, то скалярний добуток запишеться так $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$.

Косинус кута між векторами знаходиться за формулою

$$\cos\varphi=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi,$ де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Векторний добуток позначається так: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$.
2. $\overrightarrow{\lambda a}\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

4. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.

5. Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює модулю векторного добутку $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Якщо задано два вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то векторний добуток запишеться так $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

Змішаним добутком векторів $\vec{a}\ ,\vec{b},\vec{c}$ називається число $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Якщо задано три вектори $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, то змішаний добуток запишеться так $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Властивості змішаного добутку

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$
2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$
3. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$
4. Модуль змішаного добутку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, віднесених до спільного початку: $V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.
5. Якщо змішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ додатній, то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, а якщо від'ємний, то ліву.
6. Вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній змішаний добуток дорівнює нулю.

Приклад. Обчислити площу трикутника ABC, якщо A(1,0,2), B(1,2,0), C(0,1,2).

► Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$, тоді площа даного трикутника дорівнює половині площі паралелограма побудованого на векторах $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$. Розв'язок наведено на рис.3.

$$AB := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad AC := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S := \frac{|AB \times AC|}{2} \qquad S = 1.732$$

Рис.3

Приклад. Знайти об’єм піраміди з вершинами A(1,2,3), B(0,2,1), C(1,0,1), D(0,4,1).

► Об’єм піраміди дорівнює 1/6 об’єму паралелепіпеда побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Розв’язок наведено на рис.4.

$$AB := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad AC := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad AD := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$V := \frac{|(AB \times AC) \cdot AD|}{6} \qquad V = 0.667$$

Рис.4

Приклад. Перевірити чи лежать чотири точки A(2,2,1), B(1,0,5), C(2,-1,1), D(1,2,3) в одній площині.

Треба перевірити, чи вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ – компланарні, для цього необхідно знайти змішаний добуток цих векторів. Розв’язок представлено на рис.5, з нього робимо висновок, що вектори не компланарні.

$$AB := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad AC := \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad AD := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$V := (AB \times AC) \cdot AD \qquad V = -2$$

Рис.5

Приклад. Дано вершини піраміди A(1,2,1), B(3,0,-2), C(5,2,7), D(-6, -5,8). Знайти довжину висоти піраміди, опущеної з вершини D. Розв’язок представлено на рис.6.

►

$$AB := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad AC := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad AD := \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$V := \frac{(AB \times AC)\cdot AD}{6} \qquad S := \frac{|AB \times AC|}{2}$$

$$V = 51.333 \qquad S = 14 \qquad h := 3\frac{V}{S} \qquad h = 11$$

Рис.6

Приклад. Дано вектори $\vec{a}(1,0,2), \vec{b}(3,1,4), \vec{c}(1,-1,0)$.. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис на множині всіх векторів. Розкласти вектор $\vec{d} = (2,-3,5)$ за цим базисом.

► Знайдемо змішаний добуток векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad c := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (a \times b)\cdot c = -4$$

Рис.7

Так як змішаний добуток не рівний нулю, то вектори лінійно-незалежні і утворюють базис.

Розклад вектора $\bar{d}$ за цим базисом запишеться так $\bar{d} = \alpha_1\bar{a} + \alpha_2\bar{b} + \alpha_3\bar{c}$.

З останньої рівності запишемо систему рівнянь $\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = -3 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 5 \end{cases}$ та розв'яжемо цю систему матричним методом.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad X := A^{-1}\cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 6 \\ -1.75 \\ 1.25 \end{pmatrix}$$

Рис.8

Отже, координати вектора в новому базисі: $\bar{d} = (6;-1.75;1.25)$.

3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої на площині

Будь-яка пряма в декартовій системі координат визначається рівнянням першої степені.

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

– загальне рівняння прямої, де $\vec{n} = \{A, B\}$ – нормальний вектор, який перпендикулярний до заданої прямої.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{2}$$

– рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має своїм нормальним вектором вектор $\vec{n} = \{A, B\}$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{3}$$

– рівняння прямої у відрізках, тобто пряма відтинає вздовж координатних осей відрізки, величини яких відповідно дорівнюють a, b.

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \tag{4}$$

– рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = \{l, m\}$, який називається напрямним вектором даної прямої.

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases} \tag{5}$$

– параметричне рівняння прямої, де t – параметр.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{6}$$

– рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$.

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{7}$$

– рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом $k = tg\alpha$, де α – кут, який утворює пряма з віссю Ох.

$$y = kx + b. \tag{8}$$

– рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{9}$$

– нормальне рівняння прямої, де p – відстань від початку координат до прямої, α – кут, який утворює нормаль прямої з віссю Ох.

Нехай дві прямі задаються у вигляді: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тоді кут між цими прямими обчислюється за формулою (10)

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{10}$$

Нехай дві прямі задаються у вигляді: $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$, тоді кут між цими прямими обчислюється за формулою (11)

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{11}$$

Нехай дві прямі задаються у вигляді: $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}$ та $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}$, тоді кут між цими прямими обчислюється за формулою (12)

$$\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \tag{12}$$

Умови паралельності двох прямих:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, k_1 = k_2, \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}. \tag{13}$$

Умови перпендикулярності двох прямих:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0, k_1 \cdot k_2 = -1, l_1l_2 + m_1m_2 = 0. \tag{14}$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої, що задана в загальному вигляді

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{15}$$

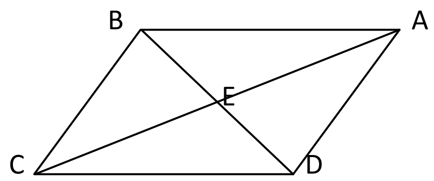
Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої, що задана в нормальному вигляді

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \tag{16}$$

Розв'язання різних типів задач на складання рівняння прямої.

Приклад. Дано рівняння двох сторін паралелограма $8x+3y+1=0,\ 2x+y-1=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $3x+2y+3=0$. Визначити координати вершин цього паралелограма.

►



Нехай $B(x_1;y_1)$ - точка перетину заданих сторін паралелограма, $A(x_2;y_2)$ і $C(x_3;y_3)$ - точки перетину заданої діагоналі з сторонами паралелограма, $D(x_4;y_4)$ - четверта вершина паралелограма. Тоді

Координати точки C знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} 8x_2+3y_2+1=0 \\ 3x_2+2y_2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x_2+6y_2+2=0 \\ 9x_2+6y_2+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_2-7=0 \\ 3x_2+2y_2+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=-3 \end{cases}.$$

Координати точки B знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} 8x_1+3y_1+1=0 \\ 2x_1+y_1-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1+4=0 \\ 2x_1+y_1-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=5 \end{cases}.$$

Координати точки A знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_3+2y_3+3=0 \\ 2x_3+y_3-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3+5=0 \\ 2x_3+y_3-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=5 \\ y_3=-9 \end{cases}.$$

Залишилося знайти координати точки D. Точка $E(x_0;y_0)$ – точка перетину діагоналей паралелограма, ділить кожну з діагоналей навпіл і, отже, вона є серединою відрізків $[AC]$ і $[BD]$. Використовуючи формулу $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ при $\lambda=1$, маємо $x_0=\frac{1+5}{2}=3,\ y_0=\frac{-3-9}{2}=-6$. Далі $3=\frac{x_4-2}{2}$ і $-6=\frac{y_4+5}{2}$, тобто $x_4=8,\ y_4=-17$.

Приклад. Дано рівняння прямої $2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1)$: а)паралельно до даної прямої, б) перпендикулярно до даної прямої.

► Кожна з прямих, рівняння яких ми шукаємо, належить пучку з центром M_0. Згідно з $y-y_0=k(x-x_0)$ обидва шукані рівняння мають вигляд: $y-1=k(x-2)$.

а) підберемо k таким чином, щоб пряма $y-1=k(x-2)$ була паралельна до заданої прямої $2x+3y+4=0$, кутовий коефіцієнт якої $k_1=-\frac{2}{3}$. З умови $k_1=k_2$ паралельності двох прямих маємо: $k=k_1=-\frac{2}{3}$. Отже, $y-1=-\frac{2}{3}(x-2)\Leftrightarrow 2x+3y-7=0$ - рівняння прямої, паралельної до заданої прямої.

б) підберемо k так, щоб пряма $y-1=k(x-2)$ була перпендикулярна до заданої прямої $2x+3y+4=0$. З умови $k_1\cdot k_2=-1$ перпендикулярності двох прямих маємо $k=-\frac{1}{k_1}$ і оскільки $k_1=-\frac{2}{3}$, то $k=\frac{3}{2}$. Отже $y-1=\frac{3}{2}(x-2)\Leftrightarrow 3x-2y-4=0$ - рівняння прямої, перпендикулярної до заданої прямої.

Приклад. Знайти точку, симетричну з точкою $B(-5;13)$ відносно прямої $L: 2x-3y-3=0$.

► Шукана точка $A(x_1;y_1)$ лежить на перпендикулярі, проведеному з точки B до заданої прямої L, причому точка $E(x_0;y_0)$ перетину цього перпендикуляра і прямої L є серединою відрізка $[AB]$ рівняння жмутка прямих з центром в точці B, згідно з $y-y_0=k(x-x_0)$ запишеться у вигляді $y-13=k(x+5)$. Підберемо k так, щоб ця пряма була перпендикулярна до прямої L, кутовий коефіцієнт, якої $k_1=\frac{2}{3}$. З умови $k_1\cdot k_2=-1$ маємо $k=-\frac{1}{k_1}=-\frac{3}{2}$. Отже, $y-13=-\frac{3}{2}(x+5)\Leftrightarrow 3x+2y-11=0$ - рівняння перпендикуляра проведеного через точку B до прямої L. Знайдемо координати x_0 і y_0 точки E, для чого розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases}2x_0-3y_0-3=0\\3x_0+2y_0-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x_0-6y_0-6=0\\9x_0+6y_0-33=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13x_0-39=0\\3x_0+2y_0-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=3\\9+2y_0-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=3\\y_0=1.\end{cases}$$

Оскільки $E(3;1)$ - середина відрізка $[AB]$, то із формул $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ при $\lambda = 1$ маємо $3 = \frac{x_1 - 5}{2}$ і $1 = \frac{y_1 + 13}{2}$, тобто $x_1 = 11$ і $y_1 = -11$.

Приклад . Знайти проекцію точки $A(-8;12)$ на пряму, що проходить через точки $B(2;3)$ і $C(-5;1)$.

► Шукана точка $P(x;y)$ є перетином прямої, яка проходить через точки C і B та перпендикулярна до неї, що проходить через точку A. Спочатку знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки C і B. Згідно з $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$: $\frac{x-2}{-5-2} = \frac{y+3}{1+3} \Rightarrow 4x + 7y + 13 = 0$. Кутовий коефіцієнт прямої, що відповідає цьому рівнянню, $k_1 = -\frac{4}{7}$. Тепер знайдемо рівняння прямої, яка проходить через точку перпендикулярно до знайденої прямої. Рівняння прямої, що проходить через точку A згідно з $y - y_0 = k(x - x_0)$ буде $y - 12 = k(x+8)$. З умови $k_1 \cdot k_2 = -1$ перпендикулярності цієї і знайденої прямої маємо $k = -\frac{1}{k_1} = \frac{7}{4}$. Отже, $y - 12 = \frac{7}{4}(x+8) \Leftrightarrow 7x - 4y + 104 = 0$. Для знаходження координат точки $P(x;y)$ розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 7x - 4y + 104 = 0 \\ 4x + 7y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28x - 16y + 416 = 0 \\ 28x + 49y + 91 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 65y - 325 = 0 \\ 4x + 7y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Приклад. Точка $A(3;1)$ є вершиною квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $L: 2x - y + 5 = 0$. Обчислити площу цього квадрата.

► Покажемо, що вершина A не розташована на стороні, яка лежить на прямій L. Справді, $2 \cdot 3 - 1 + 5 = 10 \neq 0$, тобто координати точки A не задовольняють рівняння прямої L. Таким чином віддаль d від точки A до прямої L є довжиною сторони квадрата. Знайдемо віддаль d за формулою (15) $d = \frac{|2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{5}$.

Площа S квадрата, довжина сторони якого дорівнює d, виражається так $S = d^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 20$ кв.од.

Приклад. Обчислити віддаль d між паралельними прямими $L_1: 6x - 8y + 5 = 0$ і $L_2: 3x - 4y - 10 = 0$.

► Зафіксуємо точку $A(x^*; y^*)$ на одній із прямих, наприклад на прямій L_1. Цю фіксацію можна здійснити, надавши цілком певного значення абсцисі точки, що лежить на прямій L_1. Нехай $x^* = 0$, тоді $6 \cdot 0 - 8 \cdot y^* + 5 = 0 \Leftrightarrow y^* = \frac{5}{8}$. Отже, точка $A\left(0; \frac{5}{8}\right)$ лежить на прямій L_1. Віддаль між двома паралельними прямими L_1 і L_2 є віддаль d від будь-якої фіксованої точки A на прямій L_1 до прямої L_2. В такому разі за формулою (15) $d = 2{,}5$ лін. од.

Лінії другого порядку

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини, яка називається центром кола, є величина стала і називається радіусом кола.

Рівняння

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{1}$$

визначає *коло* радіуса R з центром в точці $(a; b)$. Якщо ж центр, кола сумістити з початком координат, то його рівняння матиме вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{2}$$

Еліпсом називається множина всіх точок площини, сума відстаней яких віх двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є величина стала і більша, ніж відстань між фокусами. Нехай фокуси розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

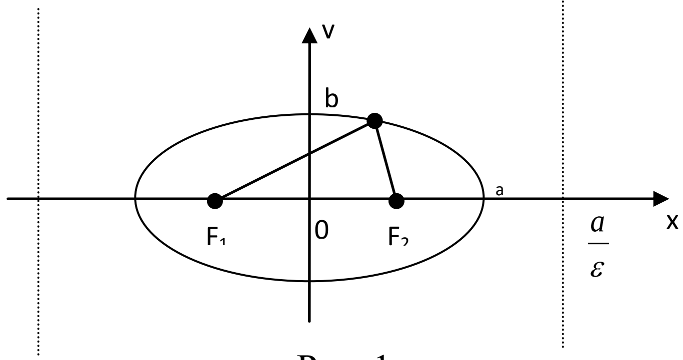


Рис. 1

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

називається канонічним рівнянням еліпса (рис.1); величини a і b називаються відповідно великою і малою піввіссю еліпса; при цьому $b^2 = a^2 - c^2$. Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом еліпса, $\varepsilon < 1$.

Дві прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса. Рівняння еліпса з центром в точці (x_0, y_0):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

Гіперболою називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох фіксованих точок, що називаються фокусами, є ненульова стала величина і менша за відстань між фокусами. Нехай фокуси розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат: $F_1(-c;\,0)$ і $F_2(c;\,0)$.

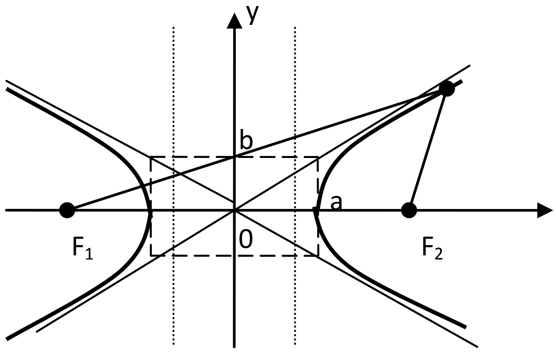


Рис. 2

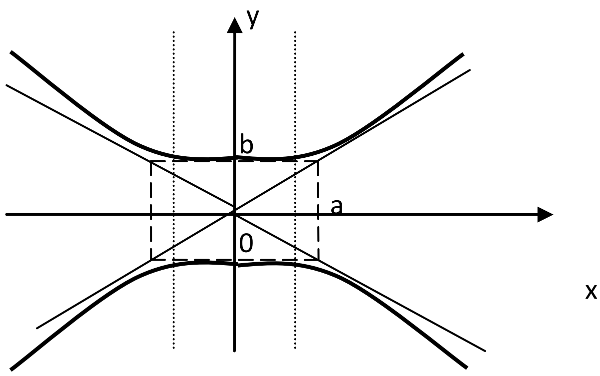


Рис. 3

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (5)$$

називається канонічним рівнянням гіперболи (рис.2); величини a і b називаються відповідно дійсною і уявною піввіссю гіперболи; при цьому $b^2 = c^2 - a^2$.

Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a}$ називається ексцентриситетом гіперболи $\varepsilon > 1$. Дві прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами гіперболи. Дві прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ називаються асимптотами гіперболи.

Рівняння

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

задає рівнянням спряженої гіперболи до гіперболи (5) (рис.3).

Рівняння гіперболи з центром в точці (x_0, y_0) :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (7)$$

Нехай задано деяку пряму *L:* $x=-p/2$ і точку $F(-p/2;0)$ поза нею.

Параболою називається множина всіх точок площини, рівновіддалених від точки *F* (фокуса) і прямої *L* (директриси).

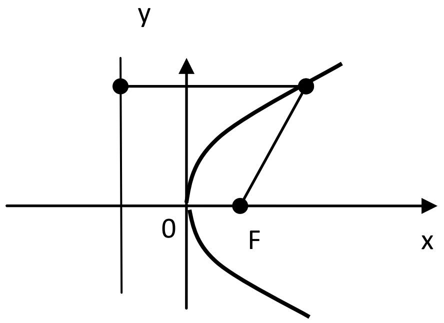


Рис. 4

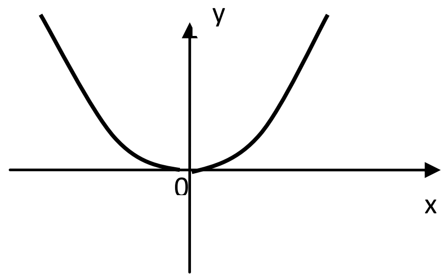


Рис. 5

Рівняння $y^2=2px$, (8) називається канонічним рівнянням параболи, а величина p – параметром параболи (рис. 4). Рівняння

$$x^2=2py, \qquad (8)$$

називається рівнянням параболи, а величина *p* – параметром параболи(рис.5).

Розв'язання типових задач на складання рівняння кривих другого порядку

Завдання 1. Скласти рівняння кола, до проходить через точку $A(6;\,2)$, а його центр співпадає з точкою $B(2;\,-1)$

► Рівняння кола будь-якого радіуса *R* з центром в точці $B(2;\,-1)$ згідно з (1) запишеться так: $(x-2)^2+(y+1)^2=R^2$. Залишається знайти радіус $R=\left|\overline{AB}\right|$, тобто $R=\sqrt{(6-2)^2+(2+1)^2}=5$. Таким чином, $(x-2)^2+(y+1)^2=5^2$ – шукане рівняння.

Завдання 2. Скласти рівняння діаметра кола $(x-2)^2+(y+1)^2=16$, що проходить через середину хорди, яка лежить на прямій $x-2y+3=0$.

► Оскільки діаметр, що проходить через середину хорди, перпендикулярний до неї, то нам потрібно знайти рівняння прямої, яка проходить через центр заданого кола перпендикулярно до прямої $x-2y+3=0$. Порівнюючи задане рівняння кола з рівнянням (1), бачимо, що його центр *C* має координати $a=2$ і $b=-1$. Згідно з $y-y_0=k(x-x_0)$ рівняння пучка прямих із центром у точці $C(2;-1)$ буде мати вигляд $y+1=k(x-2)$ Підберемо кутовий коефіцієнт k цієї прямої так, щоб вона була перпендикулярною до прямої $x-2y+3=0$, кутовий коефіцієнт якої $k_1=\frac{1}{2}$. З умови $k_1 \cdot k_2=-1$ перпендикулярності двох прямих маємо $k=-\frac{1}{k_1}=-2$. Таким чином, $y+1=-2(x-2) \Rightarrow 2x+y-3=0$ – шукане рівняння.

Завдання 3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, що: а) його велика вісь дорівнює 10, а віддаль між фокусами $2c=8$; б) віддаль між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{15}$; в) його мала вісь дорівнює 10 і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{12}{13}$.

► Якщо фокуси еліпса розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, то його рівняння буде канонічним**,** тобто $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

а) Дані умови можна записати так: $2a=10 \Rightarrow a=5$ і $2c=8 \Rightarrow c=4$, тому $b^2=5^2-4^2=3^2$ Таким чином, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ – шукане рівняння.

б) Дано $2c=6 \Rightarrow c=3$ і $\varepsilon=\frac{3}{5}$. Відомо, що $\varepsilon=\frac{c}{a}$, тобто, $\frac{3}{a}=\frac{3}{5} \Rightarrow a=5$. Далі, $b^2=5^2-3^2=4^2$. Отже, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ – шукане рівняння.

в) Дано $2b=10 \Rightarrow b=5$ і $\varepsilon=\frac{12}{13}$. Оскільки $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то $\frac{c}{a}=\frac{12}{13} \Rightarrow c=\frac{12}{13}a$. Тому, що $b^2=a^2-c^2$, то $25=a^2-\left(\frac{12}{13}a\right)^2 \Rightarrow 25=\frac{(169-144)a^2}{169} \Rightarrow a^2=169$**.** Отже, $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$ **–** шукане рівняння**.**

Завдання 4. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо а) віддаль між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$; б) $2a=16$ і $\varepsilon=\frac{3}{2}$; в) $2b=6$ і віддаль між директрисами дорівнює $\frac{32}{5}$.

► Якщо фокуси гіперболи розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, то її рівняння буде канонічним, тобто $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

а) Дано $2c=6 \Rightarrow c=3$ і $\varepsilon=\frac{3}{2}$. Оскільки $\varepsilon=\frac{c}{a}$ то $\frac{3}{2}=\frac{3}{a} \Rightarrow a=2$. Далі $b^2=9-4=5$. Отже, шукане рівняння: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

б) Дано $2a=16 \Rightarrow a=8$ і $\varepsilon=\frac{5}{4}$. Оскільки $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то $\frac{5}{4}=\frac{c}{8} \Rightarrow c=10$. Далі $b^2=100-64=36$. Отже, $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ – шукане рівняння.

в) Дано $2b=6 \Rightarrow b=3$ і віддаль між директрисами дорівнює $\frac{32}{5}$. Оскільки $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ – рівняння директрис, то віддаль між ними дорівнює $2\frac{a}{\varepsilon}$, отже, $2\cdot\frac{a}{\varepsilon}=\frac{32}{5} \Rightarrow \frac{a}{\varepsilon}=\frac{16}{5} \Rightarrow \frac{a}{\frac{a}{c}}=\frac{16}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{c}=\frac{16}{5} \Rightarrow a^2=\frac{16}{5}c$. Далі $b^2=c^2-a^2$ тобто, $9-c^2-\frac{16}{5}c \Rightarrow 5c^2-16c-45=0 \Rightarrow [(c=5)\, або\, (c=-1{,}8)]$. c – може бути тільки додатнім і тому залишається $c=5$. Тоді $a^2=\frac{16}{5}c=\frac{16}{5}\cdot 5=16$ і, нарешті, $b^2=25-16=9$. Таким чином, $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ – шукане рівняння.

Завдання 5. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо парабола розташована симетрично відносно осі *OX* і проходить через точку $A(9;\,6)$.

► Якщо вершина параболи знаходиться в початку координат, а сама парабола симетрична відносно осі *OY*, то її рівняння буде мати вигляд $y^2=2px$. Оскільки точка $A(9;\,6)$ лежить на параболі, то її координати повинні задовольняти це рівняння. тобто, $6^2=2\cdot p\cdot 9 \Rightarrow p=2$. Отже, $y^2=4x$ – шукане рівняння.

4. ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Границя функції в точці. Нехай функція $y=f(x)$ задана в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Число b називається границею функції $y=f(x)$ *при x, що прямує до* x_0 *(або в точці* x_0*), якщо для будь-якого* $\varepsilon>0$ *(як завгодно малого), знайдеться таке додатне число* $\delta=\delta(\varepsilon)$*, що для всіх x, таких, що* $|x-x_0|<\delta$ *виконується нерівність* $|f(x)-b|<\varepsilon$.Це записується так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.

Односторонні границі. При дослідженні функцій корисні поняття односторонніх границь.

Число b називається ***границею функції*** $y = f(x)$ ***справа (зліва)*** *при* $x \to x_0$, $x > x_0$ $(x \to x_0,\ x < x_0)$, *якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$, *знайдеться таке додатне число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *що для всіх x, таких, що* $0 < x - x_0 < \delta$ $(0 < x_0 - x < \delta)$ *виконується нерівність* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Позначають це так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b \right)$.

Границя функції на нескінченності. Поняття границі функції $y = f(x)$ на нескінченності тісно пов'язане з поняттям границі числової послідовності $\{x_n\}$. Якщо у випадку числової послідовності змінна *n*, зростаючи, приймає лише цілі значення, то у випадку границі функції змінна *x*, змінюючись, приймає будь-які значення.

Число b називається границею функції $y = f(x)$ *при* x*, яке прямує до нескінченності* $(x \to \infty)$, *якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$, *знайдеться таке додатне число* $M > 0$ $(M = M(\varepsilon))$, *що для всіх* x *таких, що* $|x| > M$, *справедлива нерівність* $|f(x) - b| < \varepsilon$.У цьому випадку границя записується так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

Нескінченні границі. У попередніх випадках малося на увазі, що *b* – певне число. Іноді потрібно розглядати нескінченні границі.

Кажуть, що функція $y = f(x)$ має своєю границею ∞ (або $+\infty$ чи $-\infty$) при $x \to x_0$, якщо *для будь-якого* $M > 0$, *знайдеться таке додатне число* $\delta > 0$, *що для всіх* x *таких, що* $|x - x_0| < \delta$, *справедлива нерівність* $|f(x)| > M$. Це позначають так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \right)$.Аналогічно можна розглядати односторонні нескінченні границі: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$

Завдання 1. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{5x + 2}{2x + 3} \right)$.

► Оскільки $x \to 4$, то чисельник дробу прямує до числа $5 \cdot 4 + 2 = 22$, а знаменник – до числа $2\cdot 4+3=11$. Тоді $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{5x+2}{2x+3}\right)=\dfrac{22}{11}=2$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

► У даному випадку чисельник і знаменник дробу при $x\to 2$ прямує до нуля (маємо невизначеність типу $0/0$). Для знаходження границі розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо дріб на $x-2$ і отримаємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x-6}=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

► Помножимо чисельник і знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{2x+7}$.

► Чисельник і знаменник дробу необмежено зростає при $x\to\infty$. У цьому випадку говорять, що має місце невизначеність типу ∞/∞. Розділивши чисельник і знаменник на x, одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{2+\frac{7}{x}}=\frac{3}{2},$$

оскільки при $x\to\infty$ кожен із дробів $\dfrac{5}{x}$ і $\dfrac{7}{x}$ прямує до нуля, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}=0$ і $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{x}=0$.

Практичне обчислення границь

Практичне обчислення границь базується на наступній теоремі.

Теорема. Якщо кожна із функцій $f(x)$ та $g(x)$ має границю при $x\to x_0$ або при $x\to\infty$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}g(x)=b$, то справедливі рівності:

1) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}g(x)$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}g(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)}$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x) \neq 0\right)$.

Використовуються також границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ – перша важлива границя.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{z\to\infty} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$ – друга важлива границя.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $a > 0$, $a \neq 1$. Зокрема, при $a = e$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$. Зокрема, при $a = e$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = 1$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\alpha \in R$.

5. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Похідна функції однієї змінної

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $X = (a, b)$ (можливо нескінченому). Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо їй довільного приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in X$. Тоді функція $y = f(x)$ в точці x_0 дістане приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Похідною функції *$y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.* Позначають похідну одним із символів: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$. Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

називають ***диференціальним відношенням***. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то цю похідну позначають y', $f'(x)$ або $\frac{d}{dx} f(x)$. *Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називають* ***диференційованою в точці*** x_0. *Функцію, диференційовану в кожній точці $x \in X$, називають* ***диференційованою на проміжку*** *X. Операцію відшукання похідної називають* ***диференціюванням***.

Правила диференціювання

Диференціювання суми, різниці, добутку й частки

Теорема. *Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані в точці $x \in X$, то функції $u(x) \pm v(x), u(x) \cdot v(x), \frac{u(x)}{v(x)}$ (в останньому випадку вважається, що $v(x) \neq 0$) також диференційовані в цій точці й справедливі такі рівності:*

$$1)\ (u \pm v)' = u' \pm v';\ 2)\ (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';\ 3)\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Диференціювання складної функції

Теорема. *Нехай $y = f(\varphi(x))$ – складна функція, де $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовані функції своїх аргументів. Точніше, зовнішня функція $y = f(u)$ в точці $u = \varphi(x)$ має похідну (по u) $y'_u(u) = f'_u(u)$, а внутрішня функція $u = \varphi(x)$ у точці x – похідну (по x) $u'_x = \varphi'(x)$. Тоді складна функція $y = f(\varphi(x))$ диференційована в точці x, причому її похідна обчислюється за формулою*

$$f'_x(\varphi(x)) = f'_u(u) \cdot \varphi'(x) \text{ або } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

№	Похідна основної елементарної функції	Похідна складної елементарної функції $u = u(x)$	Частинний випадок
1	$(C)' = 0$		
2	$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},\ \alpha \in R$	$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'_x,\ \alpha \in R$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3	$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'_x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\left(e^x\right)' = e^x$
4	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0,\ a \neq 1$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x, a > 0,\ a \neq 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$	
6	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'_x$	
7	$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$	
8	$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$	
9	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\lvert x \rvert < 1)$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$	
10	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\lvert x \rvert < 1)$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$	
11	$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$	
12	$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$	

Похідна функції, заданої параметрично

Нехай функцію $y = f(x)$ задано параметрично: $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$.

Теорема 4. *Припустимо, що функція* $x = \varphi(t)$ *на сегменті* $[a,\ b]$ *задовольняє теорему про існування похідної оберненої функції, а функція* $\psi(t)$ *має похідну на інтервалі* $(a,\ b)$. *Тоді існує похідна* y'_x, *яка обчислюється за формулою* $y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}$.

Приклад. Знайти похідну функції, заданої параметрично: $y(t) = a \cdot \cos t$, $x(t) = a \cdot \sin t$.

►

$$y(t) := a\cdot\cos(t) \qquad x(t) := a\cdot\sin(t) \qquad \frac{\frac{d}{dt}y(t)}{\frac{d}{dt}x(t)} \rightarrow \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}$$

Похідна функції, заданої неявно

Нехай неявна функція $y = y(x)$ задана рівнянням $F(x, y) = 0$.

Теорема 5. *Якщо функція* $F(x, y)$ *задовольняє теоремі про існування і є диференційованою за своїми змінними, то похідна* $y'(x)$ *обчислюється за формулою* $y'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

Останню формулу легко одержати, якщо ліву і праву частину рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати по x, вважаючи y функцією від x, а саме $F'_x + F'_y \cdot y'(x) = 0$, і одержане рівняння розв'язати відносно $y'(x)$.

Приклад. Знайти похідну функції, заданої неявно: $x^2 + y^2 - 2y + 3x - 1 = 0$.

► Лістинг знаходження похідної має вигляд:

$$F(x,y) := x^2 + y^2 - 2y + 3x - 1 \qquad -\frac{\frac{d}{dx}F(x,y)}{\frac{d}{dy}F(x,y)} \rightarrow \frac{-(2\cdot x + 3)}{(2\cdot y - 2)}$$

Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x, тобто існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Тоді для досить малого околу точки x має місце рівність $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Звідси $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$, де $o(\Delta x)$ – нескінченно мала вищого порядку порівняно з Δx.

Означення. *Диференціалом функції* $y = f(x)$ ***у точці*** x ***називають головну, лінійну відносно*** Δx ***частину приросту функції в цій точці***

$$dy = f'(x)\Delta x \text{ або } dy = f'(x)dx. \quad (3)$$

Означення. *Другим диференціалом* d^2y ***або*** *диференціалом другого порядку* ***називається диференціал від диференціала першого порядку***

$$d^2y = d(dy) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2. \quad (4)$$

Приклад. Користуючись означенням знайти диференціали першого і другого порядків функції $y = arctg\,x$.

► За формулами (3), (4) знаходимо: $dy = \dfrac{1}{1+x^2}dx$, $d^2y = \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx^2$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом, методом Крамера та методом Гаусса. Перевірити правильність знайдених розв'язків.

№	Система рівнянь	№	Система рівнянь	№	Система рівнянь
1	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = 1 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$	7	$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -13 \\ x_2 + 4x_3 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -11 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$	13	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 18 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 12 \\ 8x_1 + x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 12 \\ 3x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$

5	$\begin{cases}5x_1+3x_2+2x_3=1\\4x_1+x_2+9x_3=23\\2x_1+6x_3=16\end{cases}$	10	$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=4\\4x_1+5x_3=7\\3x_1+2x_2+4x_3=7\end{cases}$	15	$\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3=1\\x_2+5x_3=-1\\6x_1+x_2-3x_3=-19\end{cases}$

Завдання 2.

Дано вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Знайти:

а) $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+3\cdot\vec{b}-\vec{c}, \vec{a}\cdot\vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}, (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$;

б) площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

в)об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$;

г) довести, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис на множині всіх векторів. Розкласти вектор $\vec{d}=(20,-27,35)$ за цим базисом.

1. $\vec{a}=\{2;-2;1\},\vec{b}=\{2;3;6\},\vec{c}=\{1,0,-2\}$; 2. $\vec{a}=\{4;-2;-4\},\vec{b}=\{6;-3;2\},\vec{c}=\{0,2,3\}$;

3. $\vec{a}=\{3;-5;2\},\vec{b}=\{2;-5;-7\},\vec{c}=\{-2,1,2\}$; 4. $\vec{a}=\{3;-1;5\},\vec{b}=\{1;2;-3\},\vec{c}=\{2,3,1\}$;

5. $\vec{a}=\{3;-1;5\},\vec{b}=\{1;2;-3\},\vec{c}=\{2,3,1\}$; 6. $\vec{a}=\{3;-1;5\},\vec{b}=\{1;2;-3\},\vec{c}=\{2,3,1\}$;

7. $\vec{a}=\{5;0;-5\},\vec{b}=\{-2;1;2\},\vec{c}=\{2,-2,3\}$; 8. $\vec{a}=\{2;6;-1\},\vec{b}=\{2;0;-1\},\vec{c}=\{1,-2,3\}$;

9. $\vec{a}=\{4;-2;-3\},\vec{b}=\{0;1;3\},\vec{c}=\{-1,3,5\}$; 10. $\vec{a}=\{-2;1;1\},\vec{b}=\{1;5;0\},\vec{c}=\{1,0,5\}$;

11. $\vec{a}=\{2;2;1\},\vec{b}=\{6;3;2\},\vec{c}=\{1,3,4\}$; 12. $\vec{a}=\{2;-3;1\},\vec{b}=\{1;-2;3\},\vec{c}=\{-1,-3,5\}$;

13. $\vec{a}=\{2;-3;1\},\vec{b}=\{1;-2;3\},\vec{c}=\{-1,-3,5\}$; 14. $\vec{a}=\{2;-3;1\},\vec{b}=\{-1;3;2\},\vec{c}=\{1,0,4\}$;

15. $\vec{a}=\{0;2;4\},\vec{b}=\{6;3;2\},\vec{c}=\{-1,3,2\}$.

Завдання 3.

1. Площа трикутника *S=8* кв.од.: дві його вершини $A(1;-2)$ *і* $B(2;3)$, а третя вершина лежить на прямій $2x+y-2=0$. Визначити координати цієї вершини.
2. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат: а) паралельно; б) перпендикулярно до прямої $3x-4y+5=0$.
3. Знайти проекцію точки $A(4;6)$ на пряму $5x-4y-3=0$.
4. Дано вершини трикутника $A(1;-1), B(2;1), C(3;2)$. Знайти рівняння висоти проведеної з вершини *B*.

5. Знайти точку, симетричну з точкою $B(8;-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $C(3;-4)$ *і* $D(-1;-2)$.

6. Знайти кут між прямими $3x+2y-4=0$ *і* $5x-2y+17=0$.

7. Точка $A(-4;5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x-y+8=0$. Скласти рівняння сторін цього квадрата, що проходять через точку *А*, та рівняння іншої його діагоналі.

8. З точки $A(-2;3)$ під кутом α до осі Ox напрямлено промінь світла. Дійшовши до осі Ox, промінь відбивається. Знайти рівняння прямих, на яких лежать напрямлений і відбитий промені, якщо $tg\alpha=\sqrt{3}$.

9. Визначити, при яких значеннях m і n пряма $(m+2n-3)x+(2m-n+1)y+6m+9=0$ паралельна до осі ординат і відтинає на осі абсцис відрізок, величина якого дорівнює *–3*. Записати рівняння цієї прямої.

10. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x-2y-5=0$ *і* $2x+3y+7=0$, а також одну з його вершин $A(-2;1)$. Обчислити площу цього прямокутника.

11. Обчислити віддаль між паралельними прямими $4x-3y+15=0$ і $8x-6y+25=0$.

12. Скласти рівняння бісектрис кутів, що утворюються при перетині двох прямих $x-2y-3=0$ *і* $2x+4y+7=0$.

13. Обчислити відхилення точки $A(-2;1)$ від прямої $L:3x-4y+15=0$.

14. Знайти кут між прямими, заданими рівняннями:
а) $3x-2y+7=0$ *і* $2x+3y-3=0$; б) $5x-y+7=0$ *і* $3x+2y=0$.

15. Дана пряма $L:2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $A(2;1)$ під кутом $\alpha=45^0$ до даної прямої.

Завдання 4.

1. Рівняння однієї із сторін квадрата $x+3y-5=0$. Скласти рівняння трьох інших сторін квадрата, якщо $P(-1,0)$ – точка перетину його діагоналей. Зробити малюнок.

2. Дані рівняння однієї із сторін ромба $x-3y+10=0$ і однієї з його діагоналей $x+4y-4=0$; діагоналі ромба перетинаються в точці $P(0,1)$. Знайти рівняння інших сторін ромба. Зробити малюнок.

3. Рівняння двох сторін паралелограма $x+2y+2=0$ і $x+y-4=0$, а рівняння однієї з його діагоналей $x-2=0$. Знайти координати вершин паралелограма. Зробити малюнок.

4. Дані дві вершини $A(-3,3)$ і $B(5,-1)$ і точка $D(4,3)$ перетину висот трикутника. Скласти рівняння його сторін. Зробити малюнок.

5. Дані вершини $A(-3,-2)$, $B(4,-1)$, $C(1,3)$ трапеції *ABCD* *(AD‖BC)*. Відомо, що діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Знайти координати вершини *D* цієї трапеції. Зробити малюнок.
6. Дані рівняння двох сторін трикутника $5x-4y+15=0$ і $4x+y-9=0$. Його медіани перетинаються в точці $P(0,2)$. Скласти рівняння третьої сторони трикутника. Зробити малюнок.
7. Дані дві вершини $A(2,-2)$ і $B(3,-1)$ і точка $P(1,0)$ перетину медіан трикутника *ABC*. Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної через третю вершину *C*. Зробити малюнок.
8. Дані рівняння двох висот трикутника $x+y=4$ і $y=2x$ і одна з його вершин $A(0,2)$. Скласти рівняння сторін трикутника. Зробити малюнок.
9. Дані рівняння двох медіан трикутника $x-2y+1=0$ і $y-1=0$ і одна з його вершин $A(1,3)$. Скласти рівняння його сторін. Зробити малюнок.
10. Дві сторони трикутника задані рівняннями $5x-2y-8=0$і $5x+2y+8=0$, а середина третьої сторони співпадає з початком координат. Скласти рівняння цієї сторони. Зробити малюнок.

11. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від початку координат і від точки $A(5,0)$ відноситься як *2:1*.

12. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки $A(-1,0)$ в два рази менша відстані її від прямої $x=-4$.

13. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки $A(2,0)$ і від прямої $5x+8=0$ відносяться, як *5:4*.

14. Скласти рівняння і побудувати лінію, кожна точка якої знаходиться в два рази далі від точки $A(4,0)$, як від точки $B(1,0)$.

15. Скласти рівняння і побудувати лінію, відстань кожної точки якої від точки $A(2,0)$ і від прямої $2x+5=0$ відносяться, як *4:5*.

Завдання 5.

1. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(1;-1)$, якщо пряма $5x-12y+9=0$ є дотичною до цього кола.

2. Яка лінія визначається рівнянням: а) $y=-\sqrt{25-x^2}$; б) $x=-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}$?

3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо: а) його мала вісь дорівнює 24, а віддаль між фокусами $2c=10$; б) його велика вісь

дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$; в) віддаль між його директрисами дорівнює 5 і $2c = 4$; г) його мала вісь дорівнює 6, а віддаль між директрисами – 13.

4. Дано рівняння еліпса $9x^2 + 5y^2 = 45$. Знайти: а) його півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.

5. Визначити точки еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ віддаль яких до лівого фокуса дорівнює 2,5.

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо: а) віддаль між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$; б) рівняння її асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і віддаль між фокусами $2c = 20$; в) віддаль між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

7. Визначити точки гіперболи $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{32} = 1$ віддаль яких до правого фокуса дорівнює 4,5.

8. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо а) парабола розташована симетрично відносно осі OX і проходить через точку $A(-1;\ 3)$; б) парабола розташована симетрично відносно осі OY і проходить через точку $A(4;\ -8)$

9. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі, ординат симетрично відносно початку координат, якщо рівняння її асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$, а віддаль між директрисами дорівнює $22\frac{2}{13}$.

10. Дано рівняння еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{64} = 1$. Знайти: а) його півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.

11. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо рівняння її асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$, а віддаль між директрисами дорівнює $12\frac{4}{5}$.

12. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо парабола розташована симетрично відносно осі OY і проходить через точку $C(1;\,1)$.

13. Яка лінія визначається рівнянням a) $y=+\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$; b) $x=-5\sqrt{-y}$?

14. Яка лінія визначається рівнянням a) $y=-\sqrt{x^2-16}$; b) $x=-3\sqrt{-y}$?

15. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, що віддаль між його директрисами дорівнює 32 і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

Завдання 6.

1. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності або позбувшись ірраціональності:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$, 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}-2}$, 3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{16-x^2}{3-\sqrt{5+x}}$,

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, 5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$, 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x+8}{x-2}$,

7) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{-10x^2-6x+5}{5x^2+8x+3}$, 8) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2-6x+4}{x^3-8}$, 9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{5x^2-8x+3}$,

10) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-6x+4}{x^3-8}$, 11) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$, 12) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$,

13) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-x\right)$, 14) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3+3}{1+5x^2-2x^3}$; 15) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

2. Знайти границі функцій, застосувавши першу та другу важливі границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}$,

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$, 6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$, 7) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^x$, 8) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-4x}$,

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, 10) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$, 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$, 12) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)^x$,

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}$, 14) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$, 15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot\sin x}$.

Завдання 7.

№	Знайти y'	Знайти y'	Знайти y', dy, y'', d^2y
1.	$y=x^4+\frac{3}{x}+2\sqrt{x}$	$y=x^2\sin x+\frac{\ln x}{x^2}$	$y=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
2.	$y=5x+\frac{9}{x^3}+7\sqrt[5]{x^4}$	$y=x^2 tgx+\frac{x}{e^x}$	$y=tg^4\left(\frac{x}{4}\right)$
3.	$y=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}+x^3$	$y=(x^2-1)\sin x+\frac{2^x}{x}$	$y=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-5x\right)^4$
4.	$y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{x}+x^4$	$y=x^5(x^3-5)+\frac{x}{3^x}$	$y=tg^4\left(\frac{x}{3}\right)$
5.	$y=\frac{1}{10x^5}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}+x^3$	$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}+(x^3-1)\sin x$	$y=\sin\left(\frac{1}{x}+3\sqrt{x}\right)$
6.	$y=\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}-x^4$	$y=\frac{\sin x}{x^2}+x^3(x^2-5)$	$y=\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)$
7.	$y=3x-6\sqrt{x}+\frac{2}{x^3}$	$y=\frac{2x}{\cos x}+x\arcsin x$	$y=\ln\left(3x+\frac{1}{\ln x}\right)$
8.	$y=6\sqrt[3]{x}-4x^5+\frac{1}{x^4}$	$y=\frac{2x}{x^2+1}+x\arccos x$	$y=\sin\left(e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)$
9.	$y=6x^2-\sqrt[4]{x}+\frac{7}{x^3}$	$y=\frac{4x}{x^2-6}+x\,arctg\,x$	$y=6\cos\left(\frac{x}{3}\right)$
10.	$y=x+\frac{6}{x^3}-7\sqrt[3]{x^2}$	$y=\frac{x}{2x-1}+x\,arcctg\,x$	$y=\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)$
11.	$y=x^4-\frac{7}{x^2}-\sqrt[5]{x}$	$y=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x^2+1}}+e^x\ln x$	$y=\left(\frac{1}{e^x}-3x\right)^{10}$
12.	$y=\frac{x^3}{3}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{x}\cos+\frac{e^x}{x^2}$	$y=\sin\sqrt{\frac{x^2}{3}+1}$
13.	$y=\frac{10}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^8}+\frac{2}{5}x^5$	$y=(x^2+x)tgx+\frac{x}{e^x+4}$	$y=10e^{\sin(5x^2+x)}$
14.	$y=\frac{x^7}{7}-\frac{5}{x^5}+2\sqrt{x}$	$y=\frac{2x^2}{\cos x}+x\arccos x$	$y=\ln(x^2+\ln x)$
15.	$y=9x+6\sqrt{x}+\frac{2}{x^8}$	$y=\frac{tgx}{x^2}+x^3(x^2+9)$	$y=\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)$

Контрольна робота № 2

Теми: ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ. ОБЧИСЛЕННЯ НЕВИЗНВЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ.

Монотонність функції

Означення 1. *Функцію* $f(x)$ *називають* ***зростаючою (спадною)*** *на деякому проміжку* $X=(a,b)$, *якщо для будь-яких* $x_1, x_2 \in X$ *таких, що* $x_1 < x_2$, *виконується нерівність* $f(x_1) < f(x_2)$ *(відповідно* $f(x_1) > f(x_2)$*).*

Теорема 1 (достатні умови строгої монотонності). *Якщо функція* $f(x)$ *диференційовна на проміжку* X *і* $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ *на* X, *то функція* $f(x)$ *є строго зростаюча (спадна) на цьому проміжку.*

Якщо функція $f(x)$ *диференційовна на проміжку* X *і* $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ *на* X, *то функція на цьому проміжку не спадає (не зростає).*

Теорема 2 (необхідна умова зростання). *Якщо диференційовна на проміжку* X *функція зростає (спадає), то* $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ *на* X.

Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на $X = (-\infty, +\infty)$ і має похідну $y' = 3x^2 > 0$, якщо $x \neq 0$ і рівну нулю, якщо $x = 0$.

З наведених теорем випливає, що інтервали монотонності можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю (їх називають ***стаціонарними точками***), або точками, де похідна не існує. Точки в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються ***критичними точками*** або ***критичними точками першого роду***.

Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$ треба:

1) Знайти область визначення функції; 2) знайти похідну даної функції.

3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує; 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної.

На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Приклад. Знайти інтервали монотонності функції $y=(2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$ та побудувати її графік.

► 1) Область визначення $(-\infty,+\infty)$;

2) Похідна $y'=\dfrac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x-2}}$;

3) Критичні точки: $x_1=1$ – похідна дорівнює нулю, $x_2=2$ – похідна не існує. Інтервали, знак похідної та поведінку функції показано в наведеній таблиці, а графік функції на рис. 1.

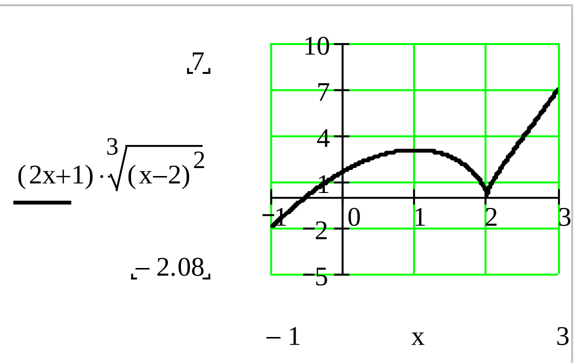


Рис. 1

x	$(-\infty;1)$	$(1;2)$	$(2;+\infty)$
$y'(x)$	+	–	+
$y(x)$	зростає	спадає	зростає

Локальний екстремум функції

Означення 2. *Точку x_0 називають* ***точкою строгого локального мінімуму (максимуму) функції*** $f(x)$, *якщо при всіх $x\neq x_0$ із деякого δ-околу точки x_0 виконується нерівність $f(x)>f(x_0)$ (відповідно $f(x)<f(x_0)$).*

Якщо в деякому δ-околі точки x_0 виконується нерівність $f(x)\geq f(x_0)$ (відповідно $f(x)\leq f(x_0)$), то точку x_0 називають ***точкою локального мінімуму (максимуму) функції*** $f(x)$.

Точки локального мінімуму й локального максимуму функції називають ***точками локального екстремуму****, а значення функції в цих точках називають відповідно* ***локальними мінімумом*** *і* ***локальним максимумом*** *або* ***локальним екстремумом****.*

Теорема 3 (необхідні умови екстремуму). *Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці функція диференційовна, то* $f'(x_0)=0$.

З даної теореми випливає, що не всяка точка x_0, в якій похідна $f'(x_0)=0$, є екстремальною точкою.

Наприклад функція $y=x^3$ має похідну $y=3x^2$, що дорівнює нулю в точці $x=0$, але не має в цій точці екстремуму.

Проте існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, функція $y=|x|$ має в точці $x=0$ має мінімум, але не має в цій точці похідної. Це не означає, що кожна точка, в якій функція не має похідної, обов'язково є точкою екстремуму. Наприклад функція $y=\sqrt[3]{x}$ не диференційовна в точці $x=0$ і не має в цій точці екстремуму. Графіки розглянутих функцій, наведено на рис. 2.

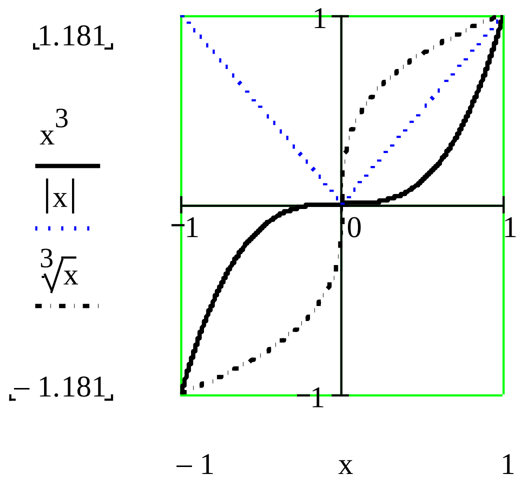


Рис. 2

Теорема 4 (перша достатня умова локального екстремуму). *Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0-\delta;\, x_0+\delta)$ точки x_0, в якому функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$, крім, можливо, точки x_0, тоді:*

1) *якщо в інтервалі $(x_0-\delta;\, x_0)$ похідна $f'(x)>0$, а в інтервалі $(x_0;\, x_0+\delta)$ похідна $f'(x)<0$, то x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$;*

2) *якщо в інтервалі $(x_0-\delta;\, x_0)$ похідна $f'(x)<0$, а в інтервалі $(x_0;\, x_0+\delta)$ похідна $f'(x)>0$, то x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$;*

3) *якщо в обох інтервалах $(x_0-\delta;\, x_0)$ і $(x_0;\, x_0+\delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.*

Зауважимо, що першу достатню умову екстремуму можна сформулювати і так: *Якщо при переході зліва на право через критичну точку x_0 похідна функції $y=f(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції $y=f(x)$, а якщо з мінуса на плюс – то точкою мінімуму.*

З теорем 4 і 5 випливає таке правило дослідження функції на екстремум:

Правило 1. *Щоб дослідити функцію $f(x)$ на екстремум, треба:*

1. *Знайти стаціонарні точки заданої функції, розв'язавши рівняння $f'(x_0)=0$, причому з розв'язків вибрати тільки дійсні і ті, які є внутрішніми точками області визначення функції.*

2. *Знайти критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує (якщо критичних точок функція $f(x)$ не має, то вона не має і екстремумів).*

3. *Дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення знайденими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь одній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише при переході через критичну точку. Якщо $f'(x)$ при переході через критичну точку (зліва на право) змінює знак з + на –, то ця точка є точкою максимуму. Якщо $f'(x)$ змінює знак з – на +, то ця точка є точкою мінімуму. Якщо при переході через критичну точку знак похідної не змінюється, то розглядувана критична точка не є екстремальною точкою заданої функції.*

Результати досліджень доцільно звести в таблицю.

Приклад. Користуючись першим правилом, дослідити на екстремум функцію $y=\sqrt[3]{x^2}e^x$.

► Знаходимо похідну $f'(x)=\dfrac{2+3x}{3\sqrt[3]{x}}e^x$. Похідна $f'(x)$ при $x=-\dfrac{2}{3}$ дорівнює нулю і не існує при $x=0$. Отже $x_1=-\dfrac{2}{3}$ і $x_2=0$ – критичні точки даної функції. Визначимо знаки похідної на інтервалах неперервності:

$$f'(-1)=\frac{2-3}{\sqrt[3]{-1}}e^{-1}>0,\quad f'\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2-1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}}e^{-\frac{1}{3}}<0,\quad f'(1)=\frac{2+3}{\sqrt[3]{1}}e^{1}>0,\quad f\left(-\frac{2}{3}\right)\approx 0.4,$$

$f(0)=0$. На основі знайдених значень складемо таблицю

x	$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	∞	+
$f(x)$	↗	$\max\approx 0.4$	↘	$\min=0$	↗

Таким чином, точка $x_1=-\dfrac{2}{3}$ – точка локального максимуму, а $x_2=0$ – точка локального мінімуму.

Теорема 5 (друга достатня умова локального екстремуму). *Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0)=0$, і в околі точки x_0*

існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0) \neq 0$. *Тоді, якщо* $f''(x_0) > 0$, *то* x_0 *– точка локального мінімуму; якщо* $f''(x_0) < 0$, *то* x_0 *– точка локального максимуму.*

На основі теореми 6 можна сформулювати друге правило дослідження функції на екстремум:

Правило 2. *Щоб дослідити функцію* $f(x)$ *на екстремум, треба:*

1. *Знайти стаціонарні точки заданої функції.*

2. *Знайти похідну другого порядку в стаціонарних точках.*

Якщо при цьому в стаціонарній точці x_0 *похідна* $f''(x_0) \neq 0$, *то* x_0 *є екстремальною точкою заданої функції, а саме точкою мінімуму, якщо* $f''(x_0) > 0$, *і точкою максимуму, якщо* $f''(x_0) < 0$.

Приклад. Користуючись другим правилом, дослідити на екстремум функцію $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 18x + 8$.

► Знаходимо похідну першого порядку $f'(x) = 6x^2 - 30x - 84$, прирівнюємо її до нуля і розв'язуємо утворене рівняння: $6x^2 - 30x - 84 = 0$. Отже, стаціонарні точки: $x_1 = -2$, $x_2 = 7$.

Знаходимо похідну другого порядку: $f''(x) = 12x - 30$ і обчислюємо її значення в стаціонарних точках: $f''(-2) = -54 < 0$, $f''(7) = -54$. В точці $x_1 = -2$ функція має максимум $f(-2) = 100$, а в точці $x_2 = 7$ – мінімум $f(7) = -629$.

Теорема 6. (третя достатня умова локального екстремуму). *Нехай в околі стаціонарної точки* x_0 *існує неперервна похідна* $f^{(n)}(x)$, *причому:*

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тоді:*

1) *якщо* n – парне і $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x)$ *має в точці* x_0 *локальний максимум;*

2) *якщо* n – парне і $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x)$ *має в точці* x_0 *локальний мінімум;*

3) *якщо* n – непарне, то $f(x)$ *в точці* x_0 *локального екстремуму не має.*

Приклад. Користуючись теоремою 6, дослідити на екстремум функцію $f(x) = x^4$.

► Знаходимо похідну першого порядку: $f'(x)=4x^3$, прирівнюємо її до нуля і розв'язуємо утворене рівняння: $4x^3=0$. Звідси дістаємо одну стаціонарну точку $x=0$. Точок, в яких похідна першого порядку не існує, немає. Знаходимо похідну другого порядку: $f''(x)=12x^2$. Підставивши значення $x=0$, маємо $f''(0)=0$. Отже, друге правило тут застосувати не можна. Обчислимо похідну третього порядку: $f'''(x)=24x$. Підставивши значення $x=0$, матимемо $f'''(0)=0$. Знайдемо наступну похідну: $f^{IV}(x)=24\neq 0$.

Отже: $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$, а $f^{IV}(0)\neq 0$. Оскільки перша відмінна від нуля похідна є похідною парного порядку, то в точці $x=0$ функція $f(x)=x^4$ має екстремум. Оскільки $f^{IV}(0)=24>0$, то в цій точці функція має мінімум $f(0)=0$.

Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді, згідно з теоремою Вейєрштрасса, функція на цьому відрізку досягає свого найбільшого і найменшого значень. Якщо ця функція досягає свого найбільшого (найменшого) значення на інтервалі (a,b), то воно, очевидно, буде максимумом (мінімумом) функції $f(x)$. Але функція може досягати свого найбільшого (найменшого) значення на одному з кінців відрізка $[a,b]$. Звідси випливає таке правило знаходження точок, в яких функція набуває найбільшого (найменшого) значень.

Правило 3. *Щоб знайти найбільше (найменше) значення неперервної функції на відрізку* $[a,b]$, *треба знайти усі локальні максимуми (мінімуми) і порівняти їх зі значеннями функції, яких вона набуває на кінцях відрізка. Найбільше (найменше) число серед знайдених чисел і буде найбільшим (найменшим) значення функції на відрізку* $[a,b]$.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ на відрізку $[-2;\,2{,}5]$.

► Знаходимо стаціонарні точки. Для цього обчислимо похідну $f'(x)=6x^2-6x-12$. Прирівнюючи цю похідну до нуля і розв'язуючи рівняння $6x^2-6x-12=0$, дістанемо стаціонарні точки: $x_1=-1,\ x_2=2$. Точок, в яких похідна не існує, немає.

Обчислимо значення функції в точках x_1, x_2, а також на кінцях відрізка, тобто в точках: $x_3 = -2,\ x_4 = 2{,}5$. Маємо

$$f(-1) = 8,\ f(2) = -19,\ f(-2) = -3,\ f(2{,}5) = -16{,}5.$$

Таким чином, найменше значення $f(2) = -19$, а найбільше – $f(-1) = 8$.

Опуклість та угнутість графіка. Точки перегину

Означення 3. *Крива $y = f(x)$ називається опуклою (угнутою) на інтервалі (a, b), якщо усі точки графіка функції лежать нижче (вище) точок її дотичних на цьому інтервалі.*

Теорема 7. *Якщо в усіх точках інтервалу (a, b) друга похідна $f''(x) > 0$, то крива $y = f(x)$ є угнутою на цьому інтервалі; якщо $f''(x) < 0$ на інтервалі (a, b) то крива опукла на цьому інтервалі.*

Означення 4. *Точкою перегину графіка неперервної функції називається точка, яка розділяє інтервали, в яких функція опукла і угнута.*

Правило 4. *Точка $x=x_0$ буде точкою перегину кривої $y = f(x)$, якщо: $f''(x_0) = 0$ або не існує, а знаки $f''(x)$ зліва ($x<x_0$) та справа ($x>x_0$) різні.*

Приклад. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$.

► Знаходимо похідні першого та другого порядків:
$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x,\quad f''(x) = 36x^2 - 48x + 12.$

Прирівнюємо $f''(x)$ до нуля: $36x^2 - 48x + 12 = 0$. Звідси знаходимо корені: $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 1$.

В інтервалах $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, $(1, +\infty)$ похідна $f''(x) > 0$, а в інтервалі $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ похідна $f''(x) < 0$. Тому в інтервалах $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, $(1, +\infty)$ крива вгнута, а в інтервалі $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ – опукла. Точки $\left(\frac{1}{3}; \frac{335}{27}\right) \approx (0{,}33; 12{,}41)$, $(1; 13)$ – точки перегину кривої (рис. 3).

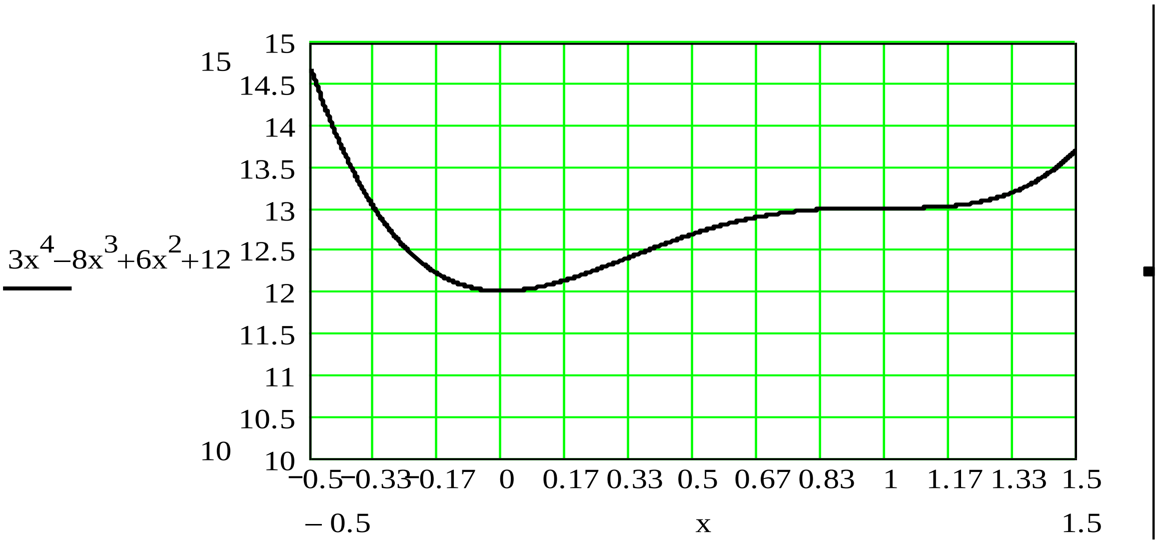


Рис. 3

Асимптоти кривої

Означення 5. *Пряму лінію називають асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань точки M кривої від цієї прямої прямує до нуля при віддалені точки M в нескінченість.*

Асимптоти бувають вертикальні, горизонтальні та похилі.

Пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою, якщо хоча б одна із границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$.

Якщо лише $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = b$, то функція має лише односторонню асимптоту.

Пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Рівняння похилої асимптоти має вигляді $y = kx + b$, де k і b – коефіцієнти, які обчислюються за формулами: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$.

Приклад. Знайти асимптоти кривої $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

► Знайдемо вертикальні асимптоти. Оскільки $f(x)$ не визначена в точці $x = -2$ і

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x} \to \infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x} \to -\infty$$

то $x = 0$ – вертикальна асимптота.

Знайдемо похилу асимптоту

$$k := \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x\cdot x} \to 2 \quad b := \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x} - k\cdot x \to 5 \quad y := k\cdot x + b \to 2\cdot x + 5$$

Таким чином, дана крива має дві асимптоти: $x=0$ і $y=2x+5$.

Схема дослідження функції та побудова її графіка

Найбільш наглядне уявлення про зміну функції дає її графік. Тому побудова графіка є заключним етапом дослідження функції, на якому використовуються усі результати її дослідження.

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік треба:

1. *Знайти область існування функції.*
2. *Знайти, якщо це можна, точки перетину графіка функції з координатними осями. Для цього треба розв'язати діві системи рівнянь*

$$\begin{cases} y=f(x); \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=f(x); \\ x=0, \end{cases}$$

Перша дає точку перетину з віссю Ox, а друга – з віссю Oy.

3. *Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.*
4. *Знайти точки розриву і дослідити їх.*
5. *Знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів, та значення функції в цих точках.*
6. *Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину.*
7. *Знайти асимптоти кривої.*
8. *Побудувати графік функції.*

Приклад. Дослідити та побудувати графік функції $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

► Досліджувана функція визначена і неперервна для всіх значень x, крім $x=1$. Функція не є ні парною, ні непарною. Її графік не має точок перетину з віссю Ox, оскільки $x^2+1>0$.

Далі, знайдемо вертикальні асимптоти. Для цього знайдемо границі:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x-1}\to -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x-1}\to \infty$$

Знайдені границі показують, що пряма $x=1$ є вертикальною

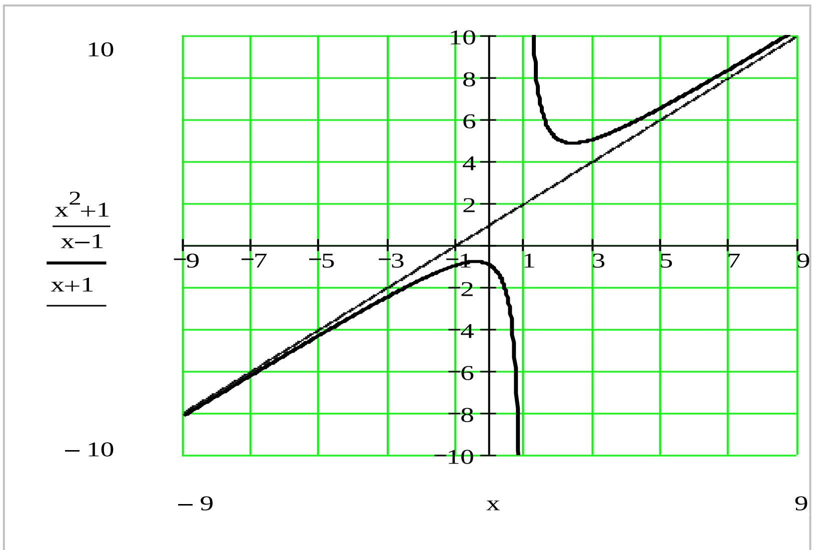


Рис. 4

асимптотою.

Знайдемо похідну даної функції та точки, в яких вона перетворюється в нуль

$$\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)' = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Таким чином похідна дорівнює нулю в точках $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, а отже, вони є точками екстремуму. Ці точки розбивають усю числову вісь на три проміжки: $(-\infty, 1-\sqrt{2}), (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}), (1+\sqrt{2}, +\infty)$, всередині кожного з яких похідна $f'(x)$ зберігає постійний знак. Легко переконатись, що в першому і третьому проміжках $f'(x) > 0$ і, таким чином, тут функція зростає, у другому проміжку $f'(x) < 0$ і, отже, тут функція спадає. Її друга похідна

$$\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)'' = \frac{4}{(x-1)^3},$$

відмінна від нуля на всій області визначення, а це означає, що графік даної функції точок перегину не має. Оскільки на проміжку $(-\infty, 1)$ друга похідна $f''(x) < 0$, то графік даної функції на даному проміжку є опуклим, а в точці x_1 ця функція має локальний максимум; на проміжку $(1, +\infty)$ похідна $f''(x) > 0$, а тому тут графік функції угнутий, а в точці x_2 ця функція має локальний мінімум.

Знаходимо похилу асимптоту:

$$k = \lim_{t\to\infty} \frac{x^2+1}{(x-1)x} = 1, \; b = \lim_{t\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - kx = 1, \; y = kx + b = x + 1.$$

Графік функції $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ зображено на рис 4.

2. ОБЧИСЛЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Поняття первісної та невизначеного інтеграла

Означення 1. *Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку $\langle a,b \rangle$, якщо $F(x)$ диференційовна на $\langle a,b \rangle$ і в кожній точці $x \in \langle a,b \rangle$* $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, первісною функції $f(x)=x^2$ є функція $F(x)=\frac{x^3}{3}$, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{3x^2}{3}=x^2.$$

Теорема 1. *Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку $\langle a,b\rangle$, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому самому проміжку має вигляду $F(x)+C$, де C – довільна стала.*

Означення 2. *Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для заданої функції $f(x)$ називають **невизначеним інтегралом** і позначають $\int f(x)dx$, отже*

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C. \tag{1}$$

Тут $\int$ – знак інтеграла, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування, C – стала інтегрування.

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x)+C$.

4. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$, то $\int f(u)\,du = F(u)+C$.

Наприклад, $\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$. Користуючись властивістю 4, можемо записати формулу $\int udu=\frac{u^2}{2}+C$, де $u=\varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну. Зокрема: $\int \sin x\,d\sin x=\frac{\sin^2 x}{2}+C$; $\int \ln x\,d\ln x=\frac{\ln^2 x}{2}+C$.

5. $\int C\,f(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$, де C – стала.

6.

$$\int[C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\ldots+C_nf_n(x)]dx = C_1\int f_1(x)\,dx + C_2\int f_2(x)\,dx+\ldots+C_n\int f_n(x)\,dx.$$

Таблиця основних інтегралів

№ п/п	$\int f(x)\,dx = F(x)+C$	Перевірка умовою $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$
1	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\right)' = x^n$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$
3	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$	$\left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right)' = \frac{\ln a\cdot a^x}{\ln a} = a^x$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$
5	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$(\sin x + C)' = \cos x$
6	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$
7	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}dx = tg\,x + C$	$(tg\,x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}dx = -ctg\,x + C$	$(-ctg\,x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$	$\left(\arcsin\frac{x}{a}+C\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$
10	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\,\frac{x}{a}+C$	$\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C\right)' = \frac{1}{x^2+a^2}$

Додамо до основної таблиці інтегралів ще три інтеграли, які часто використовуються:

1) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

2) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$;

3) $\int \sqrt{a+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a+x^2} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{a+x^2}\right| + C$.

Методи інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла та таблиці основних інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням.*

Приклад. Зайти інтеграл: а) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$.

► $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx=\int\left(x+2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx=\int\left(x+2x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$

$=\int xdx+2\int x^{\frac{1}{6}}dx+\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{x^2}{2}+2\frac{x^{7/6}}{7/6}+\frac{x^{1/3}}{1/3}+C=\frac{x^2}{2}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+C$.

Метод заміни змінної. Внесення функції під знак диференціала

Суть цього методу полягає у введені під знаком інтеграла такої нової змінної, що після підстановки і заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної дістають табличний інтеграл, або інтеграл, який легко зводиться до табличних. Обгрунтування такого методу дається теоремою.

Теорема. *Нехай* $F(x)$ *– первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* $\langle a,b\rangle$, *тобто* $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ *і нехай функція* $x=\varphi(t)$, ($dx=\varphi'(t)\,dt$) *визначена і диференційовна на проміжку* $\langle\alpha,\beta\rangle$, *причому множина значень цієї функції є проміжок* $\langle a,b\rangle$. *Тоді справедлива формула*

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(t))+C.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{(2x+1)^2}$.

► Виконаємо заміну $2x+1=t$, $2dx=dt$, звідки $dx=\frac{1}{2}dt$. Підставивши одержані вирази в заданий інтеграл, дістанемо:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int t^{-2}dt=-\frac{1}{2}t^{-1}+C=-\frac{1}{2}\frac{1}{2x+1}+C.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{\ln^7 x dx}{x}$.

► Використаємо метод внесення функції під знак диференціала. Очевидно, що $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$. Тоді

$$I=\int\frac{\ln^7 x dx}{x}=\int\ln^7 x\cdot\frac{dx}{x}=\int\ln^7 x d(\ln x)=[\ln x=t]=\int t^7dt=\frac{1}{8}t^8+C=\frac{1}{8}\ln^8 x+C.$$

***Наслідок* 1**. *Якщо підінтегральний вираз можна розкласти на множники $f(\varphi(x))$ та $\varphi'(x)dx$, то доцільно зробити заміну $\varphi(x)=t$. Тоді* $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int f(t)dt$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int e^{\sin x}\cos x dx$.

► Оскільки підінтегральний вираз можна представити у вигляді добутку і $e^{\sin x}\cos x dx=e^{\sin x}(\sin x)'\,dx$, то ввівши заміну $\sin x=t$, $\cos x dx=dt$, дістанемо $\int e^{\sin x}\cos x dx=\int e^t dt=e^t+C=e^{\sin x}+C$.

***Наслідок* 2**. *Якщо підінтегральна функція має вигляд $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, тобто, у чисельнику є похідна від знаменника, то за допомогою заміни $\varphi(x)=t$, $\varphi'(x)dx=dt$ інтеграл зводиться до табличного.*

Справді, $\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln(\varphi(x))+C$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\frac{3\cos 3x}{1+\sin 3x}dx$.

► Скориставшись наслідком 2, дістанемо

$$\int\frac{3\cos 3x}{1+\sin 3x}dx=\int\frac{(1+\sin 3x)'}{1+\sin 3x}dx=\begin{bmatrix}1+\sin 3x=t\\ 3\cos 3x dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln(1+\sin 3x)+C.$$

Метод інтегрування частинами

Цей метод застосовується, якщо під інтегралом є добуток функцій.

Нехай $u=u(x)$, $v=v(x)$, тоді $d(u\cdot v)=u\cdot dv+v\cdot du$. Інтегруємо обидві частини $\int d(u\cdot v)=\int u\cdot dv+\int vdu$. Звідки, з врахуванням властивості 3 невизначеного інтеграла, дістанемо формулу для інтегрування частинами $\int udv=uv-\int vdu$.

Приклад. Знайти інтеграл $I=\int arctg\, x dx$.

► Використавши інтегрування частинами, дістанемо

$$I=\begin{bmatrix} u=arctg\,x, & dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{1+x^2}, & v=\int dx=x \end{bmatrix}=x\,arctg\,x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\,arctg\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

Інтегрування основних класів функцій

Інтегрування раціональних функцій

Нехай треба знайти інтеграл від раціональної функції $\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$.

Враховуючи те, що раціональну функцію можна подати у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу, дістанемо:

$$\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=\int S_l(x)dx+\int\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}dx.$$

Інтеграл від многочлена береться безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дробу зводиться до інтегрування найпростіших раціональних дробів.

Інтегрування найпростіших дробів

Найпростішими* (*елементарними*) *дробами називаються дроби вигляду:

$I.\ \dfrac{A}{x-a};$ $\qquad II.\ \dfrac{A}{(x-a)^k},\ k\ge 2,\ k\in N;$

$III.\ \dfrac{Bx+C}{x^2+px+q},\ p^2-4q<0;$ $\quad IV.\ \dfrac{Dx+E}{(x^2+px+q)^k},\ p^2-4q<0,\ k\ge 2,\ k\in N.$

Інтегрування найпростіших дробів I та II типів не представляє труднощів. Справді,

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

Розглянемо інтегрування раціонального дробу III типу $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ на прикладі.

Приклад. Знайти інтеграл $I=\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

► Виділимо в чисельнику дробу вираз, який є похідною від знаменника, після чого розіб’ємо на два інтеграли:

$$I=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+5\int\frac{1}{x^2-4x+8}dx.$$

Перший інтеграл береться зразу, оскільки в чисельнику є похідна від знаменника. Другий інтеграл зводиться до табличного, якщо виділити в знаменнику повний квадрат і зробити заміною $x-2=t$:

$$I=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+5\int\frac{1}{(x-2)^2+2^2}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2}+C\,.$$

Інтегрування раціональних дробів за допомогою розкладу на найпростіші дроби

Якщо підінтегральний дріб неправильний, то необхідно з нього спочатку виділити цілу частину, а потім правильний раціональний дріб розкласти на най простіші дроби.

Приклад. Знайти інтеграл $I=\displaystyle\int\frac{1}{x^5-x^2}dx$.

► Розкладемо знаменник на множники:

$x^5-x^2=x^2(x^3-1)=x^2(x-1)(x^2+x+1)$.

Тоді

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Звільнившись від знаменника, дістанемо:

$$1=Ax(x-1)(x^2+x+1)+B(x-1)(x^2+x+1)+Cx^2(x^2+x+1)+(Dx+E)x^2(x-1).$$

При $x=0$ маємо $1=-B$, тобто $B=-1$; при $x=1$ маємо $1=3C$, тобто $C=\dfrac{1}{3}$.

Перепишемо попередню рівність у вигляді

$$1=(A+C+D)\cdot x^4+(C+B+E-D)\cdot x^3+(-E+C)\cdot x^2-Ax-B.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $x^2,\,x^3,\,x^4$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C-E=0,\\ B+C-D+E=0,\\ A+C+D=0,\end{cases}$$

з якої знаходимо: $E=\dfrac{1}{3},\ D=-\dfrac{1}{3},\ A=0$. Таким чином,

$$\frac{1}{x^5-x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

Підставивши в інтеграл дістанемо:

$$\int\frac{1}{x^5-x^2}dx=-\int\frac{1}{x^2}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\cdot$$

Інтегрування раціональних виразів, що містять тригонометричні функції

Інтеграл вигляду $\int R(\sin x,\cos x, tg\,x, ctg\,x)dx,$ де R є раціональною функцією від $\sin x$, $\cos x$, $tg\,x$, $ctg\,x$, за допомогою підстановки $t=tg\frac{x}{2}$, яка називається *універсальною тригонометричною підстановкою*, зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно нової змінної t, а отже, виражається через елементарні функції.

Дійсно, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $tg\,x=\frac{2t}{1-t^2}$, $ctg\,x=\frac{1-t^2}{2t}$, $x=2arctg\,t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, тому

$$\int R(\sin x,\cos x, tg\,x, ctg\,x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1-t^2},\frac{1-t^2}{2t}\right)\frac{2}{1+t^2}dt=\int R_1(t)dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від t.

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{1}{4\sin x+3\cos x+5}dx$.

► Підінтегральна функція є раціональна відносно $\sin x$ і $\cos x$. Використавши універсальну підстановку, дістанемо:

$$I=\int\frac{1}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t^2+4t+4}dt=\int\frac{1}{(t+2)^2}dt=-\frac{1}{t+2}+C$$

Повертаючись до старої змінної, одержимо

$$I=\int\frac{1}{4\sin x+3\cos x+5}dx=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

Зауваження. На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо $\sin x$ і $\cos x$ входять у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

Разом з тим, в окремих випадках, для знаходження інтеграла вигляду $I=\int R(\sin x,\cos x)dx$ можна обійтися без універсальної тригонометричної підстановки.

1⁰. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\sin x$ тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $\cos x = t$, $-\sin x dx = d\cos x = dt$.

2⁰. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є непарною відносно $\cos x$, тобто: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

3⁰. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ сукупно, тобто: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тоді можна скористатись підстановкою $tg\, x = t$ або $ctg\, x = t$. У цьому випадку: $tg\, x = t$, $x = arctg t$,

$$dx = \frac{1}{1+t^2}dt,\ \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Приклад. Знайти інтеграл $I = \int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

► Підінтегральна функція є непарною відносно $\cos x$, тому скористаємось підстановкою $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$.

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)\sin^2 x\, d\sin x =$$

$$= \int (1-t^2)\cdot t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

► Підінтегральна функція є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$ сукупно, а тому можна скористатись підстановкою $tg\, x = t$.

$$I = \int \frac{(1+t^2)^2(1+t^2)}{t^4(1+t^2)}dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1\right)dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C =$$

$$= -\frac{1}{3tg^3 x} - \frac{2}{tg\, x} + tg\, x + C.$$

Інтегрування деяких типів функцій, що містять ірраціональності

1. Інтеграл вигляду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{l}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ за допомогою підстановки $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$ при $ad \neq bc$, де n спільний знаменник дробів $\frac{m}{l}, \ldots, \frac{r}{s}$ зводиться до інтеграла від раціональної функції від t.

Зокрема, при $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$ інтеграл і підстановка мають вигляд: $\int R\left(x, x^{\frac{m}{l}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$, $t^n = x$.

Приклад. Знайти інтеграл $I = \int \frac{1}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} + (2x+1)^{\frac{1}{2}}} dx$.

► Оскільки спільним знаменником дробів $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ є число $n = 6$, то виконаємо підстановку $2x+1 = t^6$, $dx = 3t^5 dt$. Отже,

$$I = \int \frac{3t^5 dt}{t^4 + t^3} = 3\int \frac{t^2 dt}{t+1} = 3\int \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt = 3\int \left(t + 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{3}{2} t^2 + 3t + 3\ln|t+1| + C.$$

Повернемося до старої змінної. Оскільки $t = \sqrt[6]{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{6}}$, то

$$I = \frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{3}} + 3(2x+1)^{\frac{1}{6}} + 3\ln\left((2x+1)^{\frac{1}{6}} - 1 \right) + C.$$

3. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Обчислення визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a, b]$ визначена неперервна функція $y = f(x)$ така, що $f(x) \geq 0$ для усіх $x \in [a, b]$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n частин: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Довжина цих частин $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Виберемо точки ξ_k такі, що $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ і обчислимо $f(\xi_k)$. Інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називається сума вигляду

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k. \qquad (1)$$

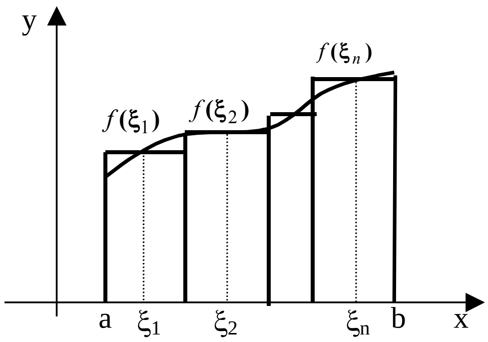


Рис. 1

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називається границя інтегральної суми (1) при умові, що довжина найбільшого із елементарних відрізків прямує до нуля

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k. \qquad (2)$$

Геометрично інтегральна сума або визначений інтеграл (у даному випадку) виражають площу криволінійної трапеції.

Основні властивості визначеного інтеграла:

1. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$;

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

3. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$;

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad c \in [a;b]$;

6. Якщо m та M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b] \quad (a < b)$, тобто $m \le f(x) \le M$, то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

7. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, де $a < b$ то знайдеться таке значення $\xi \in [a,b]$, що виконується рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Число $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ називається середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Правила обчислення визначеного інтеграла

Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то визначений інтеграл обчислюється за формулою

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі. Нехай функція f(x) неперервна на відрізку $[a,b]$. Зробимо підстановку $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна разом з своєю похідною $\varphi'(t)$ на $\alpha \le t \le \beta$, $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$. Тоді, якщо складна функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha, \beta]$, то має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (4)$$

Інтегрування частинами. Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a,b]$. Тоді має місце формула

$$\int_a^b udv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (5)$$

Невласні інтеграли

Невласними інтегралами називаються: 1) інтеграли з нескінченими межами; інтеграли від необмежених функцій.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і інтегрована на довільному відрізку $[a,t]$, Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$, то її називають *невласним інтегралом першого роду* від функції $f(x)$ на інтервалі $[a,+\infty]$ і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Якщо границя існує і скінчена, то невласний інтеграл називається *збіжний*, у протилежному випадку – *розбіжний*.

Аналогічно визначається невласні інтеграл на $(-\infty,b]$ і $(-\infty,+\infty)$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Точку $x = b$ називають *особливою точкою функції* $f(x)$, якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to b-0$.

Нехай функція неперервна на відрізку $[a,b-\delta]$ при довільному $\delta > 0$такому, що $b-\delta > a$; тоді, якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx$, то її називають *невласним інтегралом другого роду* і записують: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx$.

Аналогічно, якщо $x = a$ – особлива точка, то невласний інтеграл визначається так: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\delta}^b f(x)dx$.

У даних випадках говорять, що інтеграли збігаються.

Якщо вказані границі нескінченні або не існують, то інтеграл також називається невласним інтегралом, але розбіжним.

Обчислення площ плоских фігур

1. Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x) \ge 0,\ \ y = 0,$ $x = a,\ x = b$ обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Приклад. Знайти площу фігури, обмежену параболою $y = 4x - x^2$ і віссю Ox.

► Парабола перетинає вісь Ox в точках $O(0,0)$ і $M(4,0)$, тому площу фігури можна знайти за формулою (7).

$$\boxed{S := \int_0^4 \left(4\cdot x - x^2\right) dx \to \frac{32}{3}}$$

2. Площа фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ ($f_2(x) \ge f_1(x)$), $x = a,\ x = b$, знаходиться за формулою

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \tag{8}$$

Приклад. Знайти площу фігури, обмежену параболою $y = (x-1)^2$ і гіперболою $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1$.

► Для обчислення площі фігури спочатку потрібно знайти межі інтегрування. Для цього потрібно знайти абсциси точок перетину параболи і гіперболи, тобто розв'язати рівняння $x^2 - \dfrac{(x-1)^4}{2} = 1$ або систему рівнянь: $y = (x-1)^2,\ x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1$. Таким чином межами інтегрування є: $a = x_1 = 1$, $b = x_2 = 3$. Після цього площу фігури можна знайти за формулою (8).

$$\int_1^3 (\sqrt{2(x^2-1)} - (x-1)^2)dx = \frac{10}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\ln(3\sqrt{2}+4) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\ln(2).$$

3. Якщо лінія задана параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),$ то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією лінією, віссю Ox та прямими $x = a,\ x = b$, знаходиться за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt. \tag{9}$$

Обчислення довжини дуги плоскої кривої

1. Якщо крива задана явно $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, тоді її довжина обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (11)$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1$ ($y \geq 0$).

► З рівняння кривої знаходимо: $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$. Довжину дуги знаходимо за формулою (11).

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\,dx = \frac{13}{27}\sqrt{13} - \frac{8}{27}$$

2. Якщо крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, тоді її довжина обчислюється за формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (12)$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої $x = \cos^5 t$, $y = \sin^5 t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

► Знайдемо похідні за параметром: $x' = -5\cos^4 t \sin t$, $y' = 5\sin^4 t \cos t$. Довжину дуги знаходимо за формулою (12). Якщо знайдені похідні підставити у формулу (12), то одержимо результат

$$L := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{2}\cdot\sin(2\cdot t)\cdot\sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\cdot\sin(2\cdot t)^2\right)}\,dt \to \frac{5}{4} + \frac{5}{96}\cdot\sqrt{3}\cdot\ln(3) - \frac{5}{48}\cdot\sqrt{3}\cdot\ln\left(7\cdot\sqrt{3} - 12\right)$$

або $\quad \frac{5}{4} + \frac{5}{96}\cdot\sqrt{3}\cdot\ln(3) - \frac{5}{48}\cdot\sqrt{3}\cdot\ln\left(7\cdot\sqrt{3} - 12\right) = 1.725$

Об'єм тіла обертання

Об'єм тіла, що утворене обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $x = a$ і $x = b$ та віссю Ox ($y = 0$), обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (14)$$

Якщо фігура, обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$

$(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ і прямими $x = a$ і $x = b$, обертається навколо осі Ox, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2 \right) dx . \tag{15}$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лінією $y = \sqrt{(x-1)^3}$ і прямою $x = 2$.

► Скориставшись формулою (14), дістанемо

$$\boxed{V := \pi \cdot \int_1^2 (x-1)^3 \, dx \to \frac{1}{4} \cdot \pi}$$

Обчислення площі поверхні обертання

Нехай крива задана неперервною функцією $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, обертається навколо осі Ox. Тоді, площа поверхні, яка утворюється при обертанні графіка функції $y = f(x)$ навколо осі Ox, обчислюють за формулою

$$S = 2\pi \int f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx . \tag{16}$$

Приклад. Обчислити площю поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox дуги синусоїди $y = \sin 2x$ від $x = 0$ до $x = \dfrac{\pi}{2}$.

► Знаходимо $f'(x) = 2\cos 2x$. Тоді, скориставшись формулою (16), одержимо

$$\boxed{S := 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cdot \sqrt{1 + 4\cos(2x)^2} \, dx \to 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{4} \cdot \ln\left(2 + \sqrt{5}\right) \right) \qquad S = 9.292}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти інтервали монотонності функцій:

1) $y = x(1 + \sqrt{x})$; 2) $y = x^3(2x - 5)$; 3) $y = \ln(1 + x^2)$; 4) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$;

5) $y = (x-2)^5(2x+1)^4$; 6) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$; 7) $y = x - e^x$;

8) $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$; 9) $y = 2x^2 - \ln x$; 10) $y = x^2 e^{-x}$.

2. Дослідити на екстремум функції:

1) $y = x^2(1 - x\sqrt{x})$; 2) $y = x + \sqrt{3 - x}$; 3) $y = x^3 - 3x + 2$; 4) $y = \dfrac{x}{\ln x}$;

5) $y = \dfrac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}}$; 6) $y = -x^2\sqrt{x^2 + 2}$; 7) $y = x - \ln(1 + x^2)$; 8) $y = x - \ln(1 - x)$;

9) $y = x + \sqrt{3 - x}$; 10) $y = x(1 - x\sqrt{x})$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функцій:

1) $f(x) = x^4 - 8x^2$ на відрізку $[-1; 3]$;

2) $f(x) = 3x - x^3$ на відрізку $[-2; 3]$;

3) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на відрізку $[-3; 1]$;

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$ на відрізку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

5) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ на відрізку $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$;

6) $f(x) = x^4 + 4x$ на відрізку $[-2; 2]$;

7) $f(x) = 81x - x^4$ на відрізку $[-1; 4]$;

8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x$ на відрізку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

9) $f(x) = 3 - 2x^2$ на відрізку $[-1; 3]$;

10) $f(x) = x^3 - 12x + 7$ на відрізку $[0; 3]$.

4. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривих:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$; 2) $f(x) = 2 + (x - 5)^{5/3}$;

3) $f(x) = (x + 2)^6 + 2x + 2$; 4) $f(x) = (x + 1)^4 + e^x$;

5) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$; 6) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;

7) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$; 8) $f(x) = (x - 4)^5 + 4x + 4$;

9) $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$; 10) $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

5. Знайти асимптоти кривих:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x - 2}}$; 2) $y = x + 2arctg\, x$; 3) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$;

4) $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$; 5) $y = 2x + arctg\dfrac{x}{2}$; 6) $y = x^2e^{-x}$;

7) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$; 8) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$; 9) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; 10) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

6. Дослідити та побудувати графіки функцій:

1) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$; 2) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$; 3) $y=\sqrt{1-x^3}$; 4) $y=e^{-x^2}$; 5) $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$;
6) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$; 7) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$; 8) $y=(x-1)e^{3x+1}$; 9) $y=(x-1)\sqrt{x}$;
10) $y=16x(x-1)^3$.

7. Обчислити невизначені інтеграли:

1. а) $\int\dfrac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; б) $\int\dfrac{dx}{x^2-7x+10}$; в) $\int\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;
   г) $\int\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2\dfrac{dx}{x}$; д) $\int\dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$.
2. а) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tgx}}$; б) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$; в) $\int\dfrac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx$;
   г) $\int\dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$; д) $\int ctg^4 xdx$.
3. а) $\int\left[\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{-2}dx$; б) $\int\dfrac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$; в) $\int\dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;
   г) $\int\dfrac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}dx$; д) $\int\dfrac{xdx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.
4. а) $\int\dfrac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}dx$; б) $\int\arccos xdx$; в) $\int\dfrac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$;
   г) $\int\dfrac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$; д) $\int\dfrac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
5. а) $\int\dfrac{x+arctgx}{1+x^2}dx$; б) $x^2e^{-x}dx$; в) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; г) $\int\dfrac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$; д) $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$.
6. $\int\dfrac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$; б) $\int(x^2+1)\ln 2xdx$; в) $\int\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\dfrac{dx}{x^2}$;
   г) $\int\dfrac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$; д) $\int\dfrac{(\sin x+\sin^3 x)}{\cos 2x}dx$.
7. а) $\int e^x\ln(1+3e^x)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{(x+1)(2x-3)}$; в) $\int\dfrac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}dx$;
   г) $\int\dfrac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}$; д) $\int\sin 2x\cos 5xdx$.

8. а) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$; в) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$; г) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$;

д) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}dx$.

9. а) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$; в) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; г) $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$; д) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$.

10. а) $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$; б) $\int x^2\sin 4xdx$; в) $\int \frac{x+5}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx$; г) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$; д) $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$.

8. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

1. $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$. 2. $\int_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2+x+1}$. 3. $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$. 4. $\int_{-\infty}^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$. 5. $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$.

6. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$. 7. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$. 8. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$. 9. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$. 10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

9.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=3x^2+1$ і прямою $y=3x+7$.

2. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=\frac{1}{4}(x^2-3x)$ і віссю абсцис та прямою $x=5$.

3. Обчислити площу фігури обмеженої кривою $y=\ln x$ і прямими $x=e,\ x=e^2,\ y=0$.

4. Обчислити площу фігури обмеженої кривою $y=\arcsin x$ і прямими $x=0,\ y=\frac{\pi}{2}$.

5. Знайти довжину дуги кривої $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ між точками її перетину з віссю абсцис.

6. Знайти довжину дуги кривої $y=\frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi x}{2}$ від $x=\frac{1}{2}$ до $x=\frac{3}{2}$.

7. Знайти об’єм тіла, утвореного обертання навколо осі Ox фігури, обмеженої віссю Ox і параболою $y=2x-x^2$.

8. Знайти об’єм тіла, утвореного обертання навколо осі Ox фігури, обмеженої віссю параболою $y=x^2$ та $y=\sqrt{x}$.

9. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням однієї арки циклоїди $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ навколо осі абсцис.

10. Обчислити площу поверхні кулі, утвореної обертанням кола $x^2+y^2=R^2$ навколо діаметра.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дубовик В.П.* Вища математика: Навч. посібник // Дубовик В.П., Юрик І.І. – Київ: Вища шк., 1993. - 648 с.

2. *Дубовик В.П.* Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник // Дубовик В.П., Юрик І.І. та ін..– Київ: Вища шк., 1999. - 480 с.

3. *Король І.Ю.* Методичні вказівки і завдання до лабораторних робіт з курсу „Лінійна алгебра та аналітична геометрія” для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету, напрям підготовки „Комп’ютерна інженерія” // Король І.Ю., Горват П.П., Гапак О.М., Мигалина С.І. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла”, 2008. – 72с.

4. *Король І.Ю.* Методичні вказівки і завдання до лабораторних робіт з курсу „Математичний аналіз. Основні розділи” для студентів 1-го курсу інженерно-технічного факультету, спеціальність „Комп’ютерні системи та мережі” // Король І.Ю., Горват П.П., Гапак О.М., Мигалина С.І. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла”, 2007. -– 119 с.

5. *Овчинников П.П.* Вища математика: Підручник // Овчинников П.П. У 2 чт. – К.: Техніка, 2000. – Ч.. 1. – 792 с.

6. *Овчинников П.П.* Вища математика: Підручник // Овчинников П.П. У 2 чт. – К.: Техніка, 2000. – Ч.. 2. – 792 с.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии // Клетеник Д. В. – М.: Наука, 1972.- 240 с.

2. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа // Берман Г.Н. – М.: Наука, 1977.- 416 с.