Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Ужгородський національний університет»

П. В. Слюсарчук, Т. В. Боярищева, М. С. Герич, О. О. Погоріляк,
О. О. Синявська, Г. І. Сливка-Тилищак

Комплексний аналіз

Навчальний посібник

Ужгород – 2020

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161.5я73
К-63

Рецензенти:

Курченко О. О. – доктор фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

Маринець В. В. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики ДВНЗ «УжНУ»;

Малик І. В. – доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Рекомендовано до друку вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет» (протокол № 6 від 17 вересня 2020 року).

К-63 Комплексний аналіз: навчальний посібник / П. В. Слюсарчук, Т. В. Бояриащева, М. С. Герич, О. О. Погоріляк, О. О. Синявська, Г.І. Сливка-Тилищак. – Ужгород: «Шарк», 2020. – 174 с.

ISBN 978-617-7796-10-6

У навчальному посібнику стисло викладаються основні поняття та методи комплексного аналізу: комплексні числа, функції комплексної змінної, аналітичні функції та конформні відображення, інтеграл функції комплексної змінної, степеневі ряди та ряди Лорана, лишки, перетворення Лапласа.

Розрахований для студентів університетів спеціальностей «математика», «прикладна математика», «статистика» та студентів технічних вузів.

ISBN 978-617-7796-10-6

Зміст

Передмова

Комплексний аналіз входить у освітні програми усіх математичних спеціальностей, а його розділи – і технічних. При його викладанні значна увага приділяється основним поняттям та методам комплексного аналізу.

У даному навчальному посібнику систематично і стисло викладаються основні питання програми з комплексного аналізу: комплексні числа, функції комплексної змінної, аналітичні функції та конформні відображення, інтеграл функції комплексної змінної, степеневі ряди та ряди Лорана, особливі точки, лишки, перетворення Лапласа. Наводяться ілюстративні приклади. До кожного розділу наведено вправи, із яких можна вибирати завдання для практичних занять та для самостійного розв'язування. У кінці посібника наведено завдання для модульних контрольних робіт. Засвоївши матеріал у запропонованому обсязі, студенти самостійно зможуть опановувати спеціальну літературу з комплексного аналізу.

Розрахований для студентів університетів спеціальностей «математика», «прикладна математика», «статистика» та студентів технічних вузів.

При написанні даного навчального посібника використано тривалий досвід викладання даного курсу на математичному факультеті Ужгородського національного університету та літературу (без спеціального посилання), що наведена в кінці навчального посібника.

Розділ 1. Комплексні числа

1.1. Комплексні числа

Вираз виду $z = a + bi,\ a \in R, b \in R,$ де i – уявна одиниця (задовольняє умові $i^2 = -1$) – називається *комплексним числом*. Вірніше, наведений запис є однією із форм запису комплексного числа, а саме *алгебраїчною формою комплексного числа.* При цьому, число a називається *дійсною частиною*, а b – *уявною частиною* числа z (позначається $a = Re\, z,\ b = Im\, z$). Множину всіх комплексних чисел будемо позначати $\mathbb{C}$.

Алгебраїчна форма запису дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між $\mathbb{C}$ та двовимірним простором R^2 – точками площини R^2. Так, комплексному числу $z = a + bi$ відповідає точка (a, b); зокрема, числу i – точка (0, 1). Точку (a, b) будемо розглядати як зображення комплексного числа $z = a + bi$. В такій інтерпретації площину R^2 будемо називати *комплексною площиною*. Дійсним числам відповідають точки на осі абсцис, тому її будемо називати *дійсною віссю*, а уявним числам bi – точки на осі ординат, тому її будемо називати *уявною віссю*. Два комплексні числа рівні, якщо рівні відповідно їх дійсні і уявні частини.

Комплексне число $\bar{z} = a - bi$ називається комплексно спряженим до $z = a + bi$. Виконуються рівності:

$$Re\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad Im\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Над комплексними числами можна виконувати алгебраїчні дії за наступними правилами, які є аналогічними до дій над многочленами, враховуючи при цьому означення числа *i.*

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i,$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Справедливі також такі властивості, що легко перевіряються:

$$z\bar{z}=|z|^2,\qquad \overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2},\qquad \overline{z_1z_2}=\bar{z_1}\bar{z_2},\qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_1}}.$$

Приклад 1. Обчислити

$$\frac{2-i}{2+i},\qquad \left(\frac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^3.$$

Розв'язування.

$$\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-4i+i^2}{4-i^2}=\frac{4-4i-1}{4+1}=\frac{3-4i}{5}.$$

Оскільки $i^2=-1$, то $i^4=1$, $i^5=i\cdot i^4=i, i^{19}=i\cdot i^2\cdot i^{16}=-i$. Отже,

$$\left(\frac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^3=\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^3=\left(\frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^3=\left(\frac{1+3i}{1+1}\right)^3=\frac{1+9i-27-27i}{8}=$$

$$=-\frac{26}{8}-\frac{18}{8}i=-\frac{13}{4}-\frac{9}{4}i.$$

Інша можлива форма запису комплексного числа – *тригонометрична.* Для неї потрібно визначити наступні характеристики, що є полярними координатами точки (*x, y*).

Модулем комплексного числа $z=x+iy$ називається величина $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. За цим $|z|=0$ лише, якщо $z=0$. $\forall z=x+iy$, $|x|\le|z|$, $|y|\le|z|$, $\big||x|-|y|\big|\le|z|\le|x|+|y|$; $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$, $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1+\ z_2|\le|z_1|+|z_2|$. *Аргументом* комплексного числа z називається кут φ між додатнім напрямком дійсної осі і радіус-вектором точки z, позначається $\varphi=Arg\ z$. Він визначається з точністю до $2\pi k$, відрахований проти годинникової стрілки є додатнім, за – від'ємним. *Головним значенням аргументу,* що позначається $arg\ z$, називають кут φ в межах $(-\pi,\pi]$ (зустрічається умова $(0, 2\pi]$). Для $z=0$ аргумент не визначається. Оскільки координати радіус-вектора точки $z=x+iy$ є його проекції на координатні осі, то

$$x=|z|cos\varphi,\qquad y=|z|sin\varphi.$$

Отже,

$$z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$$

називають *тригонометричною формою* комплексного числа.

Значення аргументу можна знайти, розв'язавши систему тригонометричних рівнянь

$$cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Зручними для використання є також наступні формули:

$$argz = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \ \ x > 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, \ \ x < 0, y \geq 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, \ \ x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \ \ x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \ \ x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Тригонометрична форма комплексного числа зручна для знаходження добутку і частки комплексних чисел:

$$z_1 z_2 = |z_1|(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)|z_2|(cos\varphi_2 + isin\varphi_2) =$$
$$= |z_1||z_2|\big(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)}{|z_2|(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\big(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

При множенні комплексних чисел модулі перемножаються, а аргументи додаються, при діленні – модулі діляться, а аргументи віднімаються.

Користуючись формулою для добутку, отримаємо також формулу для *n*-го степеня комплексного числа, що називається *формулою Муавра*:

$$z^n = |z|^n(cosn\varphi + isinn\varphi).$$

Приклад 2. Обчислити $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^6$.

Розв'язування. Запишемо $1 - \sqrt{3}i$ у тригонометричній формі. $|z| = \sqrt{1+3} = 2, tg\varphi = -\sqrt{3}$. Отже, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Тому

$$(1-\sqrt{3}i)^6 = \left(2\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^6 =$$

$$= 2^6\left(cos\left(-\frac{6\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{6\pi}{3}\right)\right) = 64\big(cos(-2\pi) + isin(-2\pi)\big) = 64.$$

Формулу Муавра зручно використовувати для виведення формул кратних кутів, що використовуються в елементарній математиці.

Приклад 3. Вивести формули для $sin5\alpha$ і $cos5\alpha$.

Розв'язування. Для отримання зображення $sin5\alpha$ і $cos5\alpha$ здійснимо такі перетворення.

$$(cos\alpha + isin\alpha)^5 = cos5\alpha + isin5\alpha.$$

З іншого боку

$$(cos\alpha + isin\alpha)^5 = cos^5\alpha + 5cos^4\alpha \cdot isin\alpha + 10cos^3\alpha \cdot (isin\alpha)^2 +$$

$$+10cos^2\alpha \cdot (isin\alpha)^3 + 5cos\alpha \cdot (isin\alpha)^4 + (isin\alpha)^5 =$$

$$= (cos^5\alpha - 10cos^3\alpha \cdot sin^2\alpha + 5cos\alpha \cdot sin^4\alpha) +$$

$$+i(5cos^4\alpha \cdot sin\alpha - 10cos^2\alpha \cdot sin^3\alpha + sin^5\alpha).$$

Прирівнявши дійсні та уявні частини одержаних виразів, отримаємо:

$$cos5\alpha = cos^5\alpha - 10cos^3\alpha \cdot sin^2\alpha + 5cos\alpha \cdot sin^4\alpha,$$

$$sin5\alpha = 5cos^4\alpha \cdot sin\alpha - 10cos^2\alpha \cdot sin^3\alpha + sin^5\alpha.$$

Коренем n-го степеня із комплексного числа z називається комплексне число w, *n*-а степінь якого дорівнює z: $w^n = z$.

Запишемо шукане значення w у тригонометричній формі

$$w = |w|(cos\theta + isin\theta)$$

і піднесемо до *n*-го степеня $w^n = |w|^n(cosn\theta + isinn\theta)$. Оскільки $w^n = z$, $|w|^n = |z|$, тому $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (арифметичне значення кореня), $n\theta = \varphi + 2\pi k,$ звідки $\theta = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$, $k \in Z$.

Існує n різних коренів *n*-го степеня з комплексного числа z:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \ \ k = 0,1,\dots,n-1.$$

Якщо розташувати точки w_k на комплексній площині, то помітимо, що вони утворюють вершини правильного n-кутника з центром у початку координат.

1.2. Розширена комплексна площина

Площина, на якій зображуються комплексні числа, називається *комплексною площиною*.

У тривимірному просторі із прямокутною декартовою системою координат $O\xi\eta\zeta$ розглянемо сферу $S = \{(\xi, \eta, \zeta): \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0\}$ (із центром у точці (0,0,1/2) і радіусом 1/2). Площину $O\xi\eta$ сумістимо із площиною $\mathbb{C}$ так, щоб вісь $O\xi$ співпадала з віссю Ox, а вісь $O\eta$ з віссю Oy. Із точки $N(0,0,1)$ проведемо промінь, що перетинає площину $\mathbb{C}$ у точці $z = x + iy$. Точку $P(\xi, \eta, \zeta)$, в якій даний промінь перетинає сферу S назвемо *стереографічною проекцією* точки $z = x + iy$.

Стереографічна проекція визначає взаємно однозначну відповідність між точками $z = x + iy$ комплексної площини $\mathbb{C}$ і точками (ξ, η, ζ) на сфері S без її точки N. Точці N поставимо у відповідність точку $z = \infty$ (*нескінченно віддалену* точку). Якщо до комплексної площини $\mathbb{C}$ добавити точку $z = \infty$, то одержимо *розширену комплексну* площину: $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$. Так встановлюється взаємно однозначна відповідність між точками сфери S і розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$. Таку інтерпретацію комплексних чисел запропонував Ріман. Це дозволяє нескінченно віддалену точку розглядати як рівноправний елемент $\overline{\mathbb{C}}$.

Для знаходження формул, що описують це проектування, напишемо рівняння прямої, яка проходить через точки $(0,0,1)$ і $(x,y,0)$:

$$\xi = xt,\ \eta = yt,\ \zeta = -t + 1.$$

Підставимо ці значення у рівняння сфери

$$x^2t^2 + y^2t^2 + (-t+1)^2 + t - 1 = 0,$$

$$(|z|^2 + 1)t^2 - t = 0, \qquad t = \frac{1}{|z|^2 + 1}.$$

Підставляючи $t = \frac{1}{|z|^2+1}$ у рівняння прямої $\xi = xt,\ \eta = yt,\ \zeta = -t + 1$, одержуємо шукані формули

$$\xi = \frac{x}{|z|^2 + 1};\ \eta = \frac{y}{|z|^2 + 1};\ \zeta = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1}.$$

1.3.Множини точок комплексної площини

У даному пункті введемо деякі поняття, які ми будемо надалі використовувати.

Нехай $z_k = x_k + iy_k,\ k = 1,2,\ z_k \in \mathbb{C}$. Введемо метрику $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Тоді множина $\mathbb{C}$ з введеною метрикою $|z_1 - z_2|$ є метричним простором.

Множина $U(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \delta\}$ – круг із центром в точці z_0 і радіусом δ, називається δ–околом точки z_0, а множина $\dot{U}(z_0, \delta) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < \delta\}$ називається проколотим δ–околом точки z_0. Околом нескінченно віддаленої точки $z = \infty$ називають множину $U(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > r\}$ – зовнішність круга із центром в точці $z_0 = 0$ і радіусом r.

Точка $z_0 \in G$ називається *внутрішньою точкою* множини G, якщо існує $U(z_0, \delta)$ такий, що $U(z_0, \delta) \subset G$. Множина G називається *відкритою*, якщо всі її точки – внутрішні.

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ називається *граничною точкою* множини G, якщо для будь-якого $\delta > 0$ $\dot{U}(z_0, \delta) \cap G \neq \emptyset$ (будь-який проколотий δ–окіл точки z_0 містить точки множини G). Точка $z = \infty$ буде граничною точкою множини G, якщо будь-який окіл $U(\infty, r)$ містить точки множини G. Множина $\bar{G}$, яка містить всі точки множини G і всі її граничні точки, називається *замиканням* множини G. Множина, яка містить всі свої граничні точки, називається *замкненою*.

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ називається *межовою* точкою множини G, якщо будь-який її окіл має непорожній перетин як із множиною G так і з доповненням до неї. Множину всіх межових точок множини G позначають ∂G.

Множина $G \subset \mathbb{C}$ називається *зв'язною*, якщо кожні дві її точки z_1 і z_2 можна з'єднати за допомогою ламаної, всі точки якої належать множині G. Відкрита зв'язна множина називається *областю*.

Нехай функції $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ неперервні на $[\alpha, \beta]$, $z(t) = x(t) + iy(t)$. Неперервна комплекснозначна функція $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ визначає *неперервну лінію* (криву, дугу). Значення цієї функції називають точками лінії, а рівняння $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ – *рівнянням лінії* (в параметричній формі). Для неперервної лінії можна фіксувати один із двох взаємно протилежних напрямів обходу лінії, що відповідають зростанню або спаданню параметра. У першому випадку $z(\alpha)$ є початок, а $z(\beta)$ – кінець лінії, у другому – ці точки міняються місцями. Якщо $z(\alpha) = z(\beta)$, то лінія називається *замкнутою*. Якщо якась точка лінії відповідає двом або більше значенням параметра, принаймні одне із яких відмінне від α і від β, то таку точку називають *кратною* (точка самоперетину). Лінія, яка не містить кратних точок, називається *простою* або *жордановою* лінією. Якщо, крім того, $z(\alpha) = z(\beta)$, то лінія називається *замкнутою простою* або *жордановою* лінією.

Якщо $x'(t)$ і $y'(t)$ неперервні на $[\alpha, \beta]$ і $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0, t \in [\alpha, \beta]$, то лінія називається *гладкою*. Якщо, крім того, $z'(\alpha) = z'(\beta)$, то лінія називається *замкнутою гладкою* лінією. Неперервна лінія називається *кусково-гладкою*, якщо її можна розбити на скінченне число частин, кожна із яких є гладкою лінією.

Кожна замкнута проста лінія L ділить комплексну площину на дві різні області, для яких L є спільною межею. Одна із них обмежена (називається внутрішністю L), а друга – необмежена (називається зовнішністю L).

Область G називається *однозв'язною*, якщо для кожної замкненої жорданової кривої, яка повністю лежить в G, її внутрішність лежить в G. Інакше G називається *багатозв'язною*. Область називається *n-зв'язною*, якщо її межа складається з n замкнених жорданових кривих.

Надалі будемо вважати, що межа ∂G області G складається із скінченної кількості замкнутих простих ліній. Додатнім напрямком обходу ліній, що входять у ∂G, вважаємо такий, коли при русі по лінії область G залишається зліва.

1.4.Границя послідовності комплексних чисел

Комплексне число $z_0 \in \mathbb{C}$ називається *границею послідовності* точок z_n ($z_n \in \mathbb{C}$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > n_\varepsilon$ виконується нерівність $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Позначається $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

У цьому випадку послідовність називається *збіжною*, інакше – *розбіжною*.

Нескінченно віддалена точка ∞ є границею послідовності z_n ($\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > n_\varepsilon$ виконується нерівність $|z_n| > \varepsilon$.

Послідовність z_n називається обмеженою, якщо існує $C > 0$, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|z_n| \le C$.

Збіжна послідовність є обмеженою.

Із наведених означень випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ еквівалентна умові: послідовність дійсних чисел $|z_n - z_0|$ є нескінченно малою ($|z_n - z_0| \to 0$ при $n \to \infty$). А $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ еквівалентна умові: послідовність дійсних чисел $|z_n|$ є нескінченно великою ($|z_n| \to \infty$ при $n \to \infty$).

Із відзначеного і нерівностей

$$|x_n - x_0| \le |z_n - z_0|, |y_n - y_0| \le |z_n - z_0|,$$

$$|z_n - z_0| \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|,$$

випливає наступна теорема.

Теорема 1.1. Для того, щоб $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, $z_n = x_n + iy_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$, необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ (послідовність $z_n = x_n + iy_n$ є збіжною тоді і тільки тоді, коли збіжними є послідовності дійсних чисел x_n і y_n).

Властивості:

1. Якщо $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, то $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$.

Якщо $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$ і $\lim_{n\to\infty} arg z_n = arg z_0$, то $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$.

2. Якщо $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} (c_1 z_n + c_2 w_n) = c_1 z_0 + c_2 w_0;$$

$$\lim_{n\to\infty} (z_n w_n) = z_0 w_0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0} \quad (w_0 \neq 0).$$

Послідовність z_n називають фундаментальною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > n_\varepsilon$ і всіх $m > n_\varepsilon$ виконується нерівність $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Із властивостей послідовностей дійсних чисел випливають наступні теореми.

Теорема 1.2. (Критерій Коші). Послідовність комплексних чисел збіжна тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна.

Теорема 1.3. Довільна обмежена послідовность комплексних чисел містить збіжну підпослідовність.

1.5. Числові ряди з комплексними членами

Нехай задано послідовність комплексних чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ Символ виду $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \cdots$, де $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$, називається *числовим рядом*. Сума $z_1 + z_2 + \dots + z_n = S_n$ називається *n-ю частинною сумою* числового ряду.

Якщо існує $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{C}$, то ряд називається *збіжним*. Інакше ряд називається *розбіжним*. При цьому число S називається *сумою* числового ряду.

Теорема 1.4. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + i y_n)$ збіжний тоді і тільки тоді, коли ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ є одночасно збіжними.

Це випливає з рівності $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k + i \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Із цієї теореми випливає, що при дослідженні збіжності рядів із комплексними членами можна використовувати ознаки збіжності рядів із дійсними членами.

Зокрема, випливає *необхідна умова* збіжності числового ряду. Якщо числовий $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ряд збіжний, то $z_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Розглянемо ряд $1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$, члени якого утворюють геометричну прогресію. Оскільки $S_n = \frac{1-z^n}{1-z}$ при $z \neq 1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z} = S$ при $|z| < 1$ і $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ при $|z| > 1$. Тобто, заданий ряд є збіжним тільки при $|z| < 1$ і

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z}.$$

Із критерію Коші збіжності числової послідовності одержуємо *критерій Коші* збіжності числового ряду.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ буде збіжним тоді і тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > n_\varepsilon$ і всіх $m > n_\varepsilon$ виконується нерівність $|S_n - S_m| < \varepsilon$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається *абсолютно збіжним,* якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ збіжний. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збіжний, а $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називають *умовно збіжним*.

Із критерію Коші збіжності ряду слідує

Теорема 1.5. Абсолютно збіжний ряд є збіжним.

Теорема 1.6. Для того, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ був абсолютно збіжним, необхідно і достатньо, щоб ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ були абсолютно збіжні.

Це твердження випливає із нерівностей $|x_n| \leq |z_n|$, $|y_n| \leq |z_n|$, $|z_n| \leq |x_n| + |y_n|$.

Приклад 4. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{i^n}{2^n}\right)$.

Розв'язування. Оскільки

$$\left|\frac{1}{n^2}+\frac{i^n}{2^n}\right| \le \frac{1}{n^2}+\frac{1}{2^n},$$

а ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ збіжні, тому збіжним буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2}+\frac{i^n}{2^n}\right|$. Ряд з модулів збіжний, тому заданий ряд буде абсолютно збіжний.

Теорема 1.7. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ існує мажорантний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, тобто такий, що $\forall n \in \mathbb{N}\quad |z_n| \le c_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ буде абсолютно збіжним.

1.6. Вправи до розділу 1

1.1. Виконати дії (обчислити)

$$a)\ i+\frac{1}{i};\ b)(2+i)(2-i);\ c)\frac{5i-3}{i-1};\ d)\frac{1+i}{1-i};\ e)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3;\ f)\frac{i^5+2}{i^{19}+1};$$

$$g)\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3};\ h)\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x};\ i)3-i+\frac{2i}{1+i};\ j)1+\frac{i}{1-i}.$$

1.2. Знайти модуль і аргумент комплексного числа

$$a)-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ b)\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2};\ \ c)-5;\ \ d)-1-i;\ \ e)\frac{7}{2}-i\frac{7\sqrt{3}}{2};\ \ f)-1-i\sqrt{3};$$

$$g)(-4+3i)^3;\ \ h)(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^6;\ \ i)-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}.$$

1.3.Знайти всі значення коренів

$$a)\ \sqrt[8]{1};\ \ b)\ \sqrt[3]{i};\ \ c)\ \sqrt[4]{-1};\ \ d)\ \sqrt{1-i};\ \ e)\ \sqrt[6]{-8};\ \ f)\ \sqrt{-4+3i};$$

$$g)\ \sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}};\ \ h)\ \sqrt[5]{2-3i}.$$

1.4. Чи однакові множини значень а) $\sqrt{i^4}$ *і* $\left(\sqrt{i}\right)^4$*; b)* $\sqrt[3]{i^4}$ *і* $\left(\sqrt[3]{i}\right)^4$*?*

1.5. Розв'язати рівняння

$$a)\ z^4+1=0;\ \ b)\ z^8=1+i;\ \ c)\ \bar{z}=z^3;\ \ d)\ \bar{z}-2z=1+2i;$$

$$e)\ z\bar{z}=2z-1;\ \ f)\ z\bar{z}+2i=2\bar{z}+4;\ \ g)\ z+\bar{z}=2z^2;$$

$$h)\ z^2-(2+i)z+2i=0;\ \ i)\ z^2-(5+2i)z+5+5i=0;$$

$$j)\ (z^2+z+1)(z^2+z+2)-12=0.$$

1.6. Комплексне число задовольняє умову $|z-12i| \leq 6\sqrt{2}$. Знайти межі головного значення аргументу z.

1.7. При яких $a \in R$ корені рівняння $(a-1)z + 2ai\bar{z} = -2 + i(a-1)$ задовольняють умови $Re\, z > 0,\ Im\, z > 0$.

1.8. Не користуючись формулою коренів, обчислити

$\sqrt{5-12i}$ і $\sqrt{24+7i}$.

1.9. Довести, що при векторній інтерпретації комплексних чисел додаванню комплексних чисел відповідає додавання відповідних векторів за правилом паралелограма, а відніманню комплексних чисел відповідає віднімання відповідних векторів

1.10. Довести рівність

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

і вияснити її геометричний зміст.

1.11. Довести нерівності

$$a)\ |z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

$$b)\ |z_1-z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|;$$

$$c)\ \left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \leq |\arg z|,\ \ z \neq 0.$$

1.12. Довести: якщо $z_1+z_2+z_3 = 0$ і $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то точки z_1, z_2, z_3 є вершинами правильного трикутника, вписаного в коло $|z| = 1$.

1.13. Які лінії визначаються рівняннями:

$$a)\ z = (1+i)t;\ \ b)\ z = t + \frac{i}{t};\ \ c)\ z = t^2 + \frac{i}{t^2};$$

$$d)\ z^2 + \bar{z}^2 = 2a^2;\quad e)\ |z-2| = |1-2\bar{z}|;\quad f)\ |z| = Re\, z + 1;$$

$$g)\ Im\frac{z-1}{z+1} = 0;\quad h)\ \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = a > 0\ ?$$

1.14. Зобразити на комплексній площині множини точок:

$$a)\ \{z: |z-1| \leq |z+1|\};\quad b)\ \left\{z: Re\big(z(1-i)\big) < \sqrt{2}\right\};$$

$$c)\{z: 2|z| > |1+z^2|\};\quad d)\ \{z: 2|z| > |z-i||z+i|\}.$$

1.15. За означенням границі, довести:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5i}{n^2+i}=2.$$

1.16. Знайти границі послідовностей:

$$a)\ z_n=\frac{n+1}{2n}+i\frac{2^n}{n!};\quad b)\ z_n=\sqrt{n^2+n}-n+i\ \ln\frac{n+2}{n+3}.$$

1.17. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y).$$

1.18. Дослідити на збіжність ряди

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+i\frac{2^n}{n!}\right);\ \ b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^n}+i\frac{2^n}{3^n n}\right);\ \ c)\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}+i\frac{1}{n^2+1}\right).$$

1.19. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n};\ \ b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^3};\ \ c)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{in}{3n+i}\right)^n.$$

Розділ 2. Функції комплексної змінної

2.1. Поняття функції комплексної змінної

Нехай задано дві множини $D \subset \mathbb{C}$ (або $\overline{\mathbb{C}}$) і $G \subset \mathbb{C}$ (або $\overline{\mathbb{C}}$). Якщо кожному комплексному числу $z \in D$ поставлено у відповідність одне або декілька комплексних чисел $w \in G$, то кажуть, що на множині D задано функцію $w = f(z)$.

Якщо кожному числу $z \in D$ відповідає лише одне число $w \in G$, то функція $w = f(z)$ називається *однозначною* в D. Якщо деяким (або кожному) числу $z \in D$ відповідає більш як одне число $w \in G$, то функція $w = f(z)$ називається *многозначною* (багатозначною).

Прикладами многозначних функцій є функції $w = \sqrt[n]{z}$, $w = Arg\, z$.

Нехай кожне $w \in G$ має прообраз $z \in D$. Тоді функція $w = f(z)$ встановлює відповідність між точками множин D і G. У цьому випадку функція $w = f(z)$ здійснює відображення множини D на множину G.

Для кожного $w \in G$ множина $\{z: f(z) = w\}$ непорожня. Функцію, яка кожному $w \in G$ ставить у відповідність множину всіх точок z із D, для яких $f(z) = w$, називають *оберненою* до функції $f(z)$ і позначають $z = f^{-1}(w)$.

Нехай функція $f(z)$ є однозначною в D. Функція $w = f(z)$ називається однолистою в D, якщо для будь-яких $z_1 \neq z_2$ із D випливає, що $f(z_1) \neq f(z_2)$. Якщо $f(z)$ є *однолистою* в D, то із умови $f(z_1) = f(z_2)$ для деяких $z_1,\ z_2$ із D випливає, що $z_1 = z_2$. У однолистої функції (і тільки такої) обернена є однозначною.

Із визначення комплексних чисел $z = x + iy$ випливає, що задання функції $w = f(z)$ рівносильне заданню двох функцій $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ від двох змінних x і y. Тобто, будь-яку функцію $w = f(z)$ можна подати у вигляді

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

де $u(x,y) = Ref(z)$, $\quad v(x,y) = Imf(z)$. І навпаки, із рівностей $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ і y= $\frac{z-\bar{z}}{2i}$, одержимо

$$f(z) = f(x+iy) = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right),$$

що задана на множині комплексних чисел $z = x + iy,\ z \in D$.

Якщо $f(z) = w_0$ для всіх $z \in D$, то таку функцію називають сталою на множині D.

Надалі, якщо не сказано інше, будемо розглядати тільки однозначні функції.

2.2. Границя функції комплексної змінної

Означення 2.1. Нехай функція $f(z)$ задана на множині $D \subset \mathbb{C}$, z_0 – гранична точка множини D. Число $w_0 \in \mathbb{C}$ називається границею функції $f(z)$ в точці z_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого $z \in D$, для якого $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Позначаємо: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ або $f(z) \to w_0$ при $z \to z_0$.

Нехай $U(z_0, \delta) = \{z: |z - z_0| < \delta\}$ – δ–окіл точки z_0, круг із центром в точці z_0 і радіусом δ, $\dot{U}(z_0, \delta) = \{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$ проколотий δ–окіл точки z_0. $U(\infty, r) = \{z: |z| > r\}$ – окіл нескінченно віддаленої точки – зовнішність кола $\{z: |z| = r\}$ із центром в точці $z_0 = 0$ і радіусом r. Використовуючи ці поняття, сформулюємо різні варіанти означення границі функції:

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого $z \in \dot{U}(z_0, \delta) \cap D$ $\quad f(z) \in U(w_0, \varepsilon)$;

$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = w_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $z \in U(\infty, \delta) \cap D$ $\quad f(z) \in U(w_0, \varepsilon)$;

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $z \in \dot{U}(z_0, \delta) \cap D \quad f(z) \in U(\infty, \varepsilon)$;

$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $z \in U(\infty, \delta) \cap D \quad f(z) \in U(\infty, \varepsilon)$.

Теорема 2.1. Нехай функція $f(z)$ задана на множині $D \subset \mathbb{C}$, z_0 (можливо $z_0 = \infty$) – гранична точка множини D. Число $w_0 \in \mathbb{C}$ (можливо $w_0 = \infty$) буде границею функції $f(z)$ в точці z_0 тоді і тільки тоді, коли для довільної послідовності точок z_n із множини D такої, що $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$, виконується співвідношення $f(z_n) \to w_0$ при $n \to \infty$.

Доведення аналогічне до доведення відповідної теореми із математичного аналізу (пропонуємо самостійно його відновити).

Із теореми 2.1 і властивостей границі послідовності випливає наступна теорема.

Теорема 2.2. 1) Якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f_0 \in \mathbb{C}$ і $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g_0 \in \mathbb{C}$, тоді

$$\lim_{z \to z_0} \big(f(z) + g(z)\big) = f_0 + g_0, \ \lim_{z \to z_0} \big(f(z) g(z)\big) = f_0 g_0,$$

$$\lim_{z \to z_0} \big(f(z)/g(z)\big) = f_0/g_0 \text{ за умови } |g_0| \neq 0.$$

2) Нехай $\varphi: D \to G$, $f: G \to \mathbb{C}$. Якщо $z_0 \in D$, $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi_0 \in G$ і $\lim\limits_{\varphi \to \varphi_0} f(\varphi) = f_0 \in \mathbb{C}$, то $\lim\limits_{z \to z_0} f\big(\varphi(z)\big) = f_0$.

Теорема 2.3. Нехай $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, $z \in D$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Для того, щоб $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$ необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0$ і $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0$.

2.3. Неперервність функції комплексної змінної

Означення 2.2. Нехай функція $f(z)$ задана на множині D, $z_0 \in D$. Функція $f(z)$ називається *неперервною* в точці z_0, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функція $f(z)$ називається неперервною в точці $z = \infty$, якщо функція $f\left(\frac{1}{z}\right)$ неперервна в точці $z = 0$.

Із теореми 2.3 випливає, що $f(z)$ неперервна в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ тоді і тільки тоді, коли функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ неперервні в точці (x_0, y_0).

З властивостей границь випливає: 1) якщо $f(z)$ і $g(z)$ неперервні в точці z_0, то $f(z) + g(z)$, $f(z)g(z)$, $f(z)/g(z)$ (за умови, що $g(z_0) \neq 0$) будуть неперервними в цій точці функціями; 2) якщо $\varphi(z)$ неперервна в точці z_0, а $f(\varphi)$ неперервна в точці $\varphi_0 = \varphi(z_0)$, то $f(\varphi(z))$ неперервна в точці z_0.

Функція називається неперервною на множині, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Функцію $f(z)$ називають *обмеженою* на множині D, якщо існує додатне число M, що $|f(z)| \leq M$ для всіх $z \in D$.

Теорема 2.3. Якщо $f(z)$ неперервна на компактній (замкненій і обмеженій) множині, то вона обмежена на цій множині, а її модуль досягає на цій множині своїх найбільшого і найменшого значень.

Функцію $f(z)$ називається *рівномірно неперервною* на множині D, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-яких $z_1 \in D$ і $z_2 \in D$, для яких $|z_1 - z_2| < \delta$, виконується нерівність $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Теорема 2.4 (Кантора). Якщо функція $f(z)$ неперервна на компактній множині D, то вона рівномірно неперервна на D.

Нехай на множині $G \subset \mathbb{C}$ задано *многозначну* функцію $w = F(z)$. Така функція не є числовою функцією, бо числу ставиться у відповідність деяка множина. Функція $w = Arg\, z$, $0 < |z| < \infty$, є многозначною. Оскільки $Arg\, z = arg\, z + 2\pi k,\ k \in Z$, то вона є нескінченнозначною функцією.

Означення 2.3. Нехай в області G задано многозначну функцію $w = F(z)$, а в області $D \subset G$ неперервна функція $f(z)$ така, що для будь-якого $z \epsilon D$ $f(z) \in F(z)$. Тоді функція $f(z)$ називається *однозначною віткою* многозначної функції $F(z)$.

Нехай $F(z) = \{0, z\}$. Тоді функції $f(z) = 0$ і $f(z) = z$ є однозначними вітками функції $F(z)$, але функція $f(z) = \begin{cases} z, & Re\, z \geq 0, \\ 0, & Re\, z < 0 \end{cases}$ не є однозначною віткою функції $F(z)$, бо порушується умова неперервності в точках уявної осі.

Нехай в області G задано многозначну функцію $F(z)$ і існує система областей $\{D_\alpha\}$, $D_\alpha \subset G$, а в кожній області D_α – неперервна функція $f_\alpha(z)$, яка є однозначною віткою многозначної функції $F(z)$. Якщо для будь-якого $z \epsilon G$ і для будь-якого $w \in F(z)$ існує D_α і існує $f_\alpha(z)$ такі, що $z \in D_\alpha$ і $f_\alpha(z) = w$, тоді кажуть, що многозначна функція $F(z)$ розпадається в області G на однозначні вітки.

2.4. Деякі елементарні функції

2.4.1. Степенева функція і корінь. Поняття про Ріманову поверхню

Степенева функція $w = z^n$, де n – натуральне число, є однозначною і неперервною на всій комплексній площині. При $n = 1$ вона задає взаємно однозначне відображення всієї комплексної площини на себе. При $n > 1$ функція $w = z^n$ промінь $L_\alpha = \{z : Arg\, z = \alpha\}$ відображає у промінь $L_{n\alpha} = \{w : Arg\, w = n\alpha\}$, кути з вершиною в точці $z = 0$ збільшуються в n разів.
Будь-які дві точки z_1, z_2, у яких модулі рівні, а аргументи відрізняються на величину, що кратна $\frac{2\pi}{n}$, відображаються в одну точку, тому функція $w = z^n$ при $n > 1$ в $\mathbb{C}$ не є однолистою. Але в кожній із множин

$$D_\alpha^k = \left\{z : \alpha + \frac{2\pi k}{n} \leq Arg\, z < \alpha + 2\pi(k+1)/n\right\},\ k = 0,1, \dots, n-1$$

функція $w = z^n$ при $n > 1$ є однолистою. Кожна із множин

$$D_0^k \backslash \overline{\left\{z : Arg\, z = \frac{2\pi k}{n}\right\}}$$

однолисто відображається на область $\Delta = \mathbb{C} \backslash \overline{L_0}$ (комплексна площина з розрізом по додатній частині дійсної осі).

В цій області однозначною є функція $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_k$ вітка функції $\sqrt[n]{w}$, оберненої до $w = z^n$. Її називають коренем n го степеня.

Нехай точка w робить один оберт проти годинникової стрілки (в додатному напрямі) по колу $|w| = 1$. Тоді $Arg\,w$ зросте на 2π, а $Arg\,z$ зросте на $\frac{2\pi}{n}$. Отже, після одноразового обходу w по колу $|w| = 1$ відповідне значення z змінюється від $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_k$ до $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_{k+1}$, а після n кратного обходу кола $|w| = 1$ відповідне значення z змінюється від $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_k$ до $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_{k+n} = \left(\sqrt[n]{w}\right)_k$. Тобто вітки $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_{k+n}$ і $z = \left(\sqrt[n]{w}\right)_k$ співпадають.

Розглянемо n областей $\Delta = \mathbb{C}\backslash\overline{L_0}$ і позначимо їх $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$. Покладемо їх послідовно одна на другу (Δ_k на Δ_{k+1}) і уявно склеїмо нижній розріз листа Δ_k з верхнім розрізом листа Δ_{k+1} $(k = 1,2, \dots, n-2)$, а нижній розріз листа Δ_{n-1} з верхнім розрізом листа Δ_0. Так побудована поверхня називається *рімановою поверхнею* функції $z = \sqrt[n]{w}$. Функція $w = z^n$ взаємно однозначно і неперервно відображає $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ на ріманову поверхнею функції $z = \sqrt[n]{w}$ за виключенням $w = 0$.

2.4.2. Показникова функція і логарифм

Існують різні підходи до визначення показникової функції. Ми розглянемо один із них. Розглянемо довільне фіксоване $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $w_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Оскільки $\frac{z}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то для достатньо великих n точка $1 + \frac{z}{n}$ буде лежати в правій півплощині, тому $\left|\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right| < \frac{\pi}{2}$. Збіжність послідовності w_n випливає із збіжності послідовностей $|w_n|$ і $\arg w_n$:

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left|1 + \frac{x+iy}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2\right)^{n/2} =$$

$$= e^x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \arg w_n = \lim_{n\to\infty} \left(n \arg\left(1 + \frac{x+iy}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(n \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x}\right) = y.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\ \sin y).$$

Покладемо за означенням

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z,$$

$$e^z = e^x(\cos y + i\ \sin y).$$

Оскільки $Re\ e^z = e^x \cos y$ і $Im e^z = e^x \sin y$ є неперервними в R_2 функціями, то e^z є неперервною в $\mathbb{C}$.

Функція $w = e^z$ у всій комплексній площині відмінна від нуля: $e^z \neq 0$; $|e^z| = e^x$; $\operatorname{Arg} e^z = y$. Із визначення e^z при $x = 0$ одержуємо формулу Ейлера:

$$e^{iy} = \cos y + i\ \sin y.$$

Нехай $z_k = x_k + iy_k,\ k = 1,2$. Тоді

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\ \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\ \sin y_2) =$$
$$= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}.$$

Отже,

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Покладаючи в цій рівності $z_1 = z$ і $z_2 = -z$, одержимо

$$e^0 = 1,\ \ e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

Оскільки функції $\cos y$ і $\sin y$ періодичні з періодом 2π, то функція e^z періодична з періодом $2\pi i$. Число $2\pi i$ називається основним періодом функції e^z. Звідси випливає, що для того, щоб показникова функція була однолистою в області D, необхідно і досить, щоб в цій області не було пар точок z_1 і z_2, для яких

$$z_1 - z_2 = 2\pi i n,\ \ n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Прикладом такої області є довільна смуга комплексної площини із сторонами, що паралельні до дійсної осі і шириною 2π:

$$D = \{z \colon y < Im\, z \leq y + 2\pi, y \in R\}.$$

Функція $w = Ln\, z$, що обернена до показникової функції $z = e^w$, називається *логарифмічною*. Вона визначена у $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ і є нескінченнозначною, бо показникова є періодичною.

Із рівності $z = e^w = e^{Re\, w + iIm\, w}$ одержуємо $|z| = e^{Re\, w}$, $Arg\, z = Im\, w + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Тому $Re\, w = \ln|z|,\ Im\, w = arg\, z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Отже, всі значення $Ln\, z$ для $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ визначаються за формулою

$$Ln\, z = \ln|z| + i\, Arg\, z,$$

або

$$Ln\, z = \ln|z| + i(arg\, z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Вираз $\ln|z| + i\, arg\, z$ називають *головним значенням логарифма* і позначають $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i\, arg\, z,\ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Відзначимо, що $\ln|z|$ є звичайним логарифмом дійсного числа.

Для будь-яких z_1 і z_2, відмінних від нуля,

$$Ln\,(z_1 z_2) = Ln\, z_1 + Ln\, z_2,\ Ln\,(z_1/z_2) = Ln\, z_1 - Ln\, z_2.$$

Множина $Ln\,(z_1 z_2)$ складається із сум двох доданків, один із яких належить множині $Ln\, z_1$, а другий – $Ln\, z_2$.

$$Ln\,(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\, Arg\,(z_1 z_2) =$$

$$= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\, Arg\, z_1 + i\, Arg\, z_2 = Ln\, z_1 + Ln\, z_2.$$

Доведення другої рівності аналогічне.

Функція вигляду $w = z^\mu = e^{\mu\, Ln\, z},\ \mu = \alpha + i\beta,$ називається *загальною степеневою* функцією.

Приклад 1. Знайти i^i.

Розв'язування. Оскільки $i^i = e^{i\, Ln\, i}$, а

$$Ln\, i = \ln|i| + i(arg\, i + 2\pi k) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

то

$$i^i = e^{i\, Ln\, i} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

2.4.3. Тригонометричні функції, обернені тригонометричні функції

Функції

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

і

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

називають, відповідно, тригонометричними і гіперболічними функціями. Із визначення $\sin z$ і $\cos z$ одержуємо рівність

$$\cos z + i \sin z = e^{iz},$$

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \quad \cos iz = \operatorname{ch} z.$$

Якщо $z = x$, то $\sin z = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}(\cos x + i \ \sin x - \cos x + i \ \sin x) = \sin x$, аналогічно, $\cos z = \cos x$, одержуємо відомі тригонометричні функції. Кожна функція $\sin z$, $\cos z$ неперервна в $\mathbb{C}$ і має основний період 2π; $\sin z$ є непарною і перетворюється в нуль у точках $z = \pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$; $\cos z$ є парною і перетворюється в нуль у точках $z = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$. Дійсно,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0, \qquad e^{iz} - e^{-iz} = 0, \qquad e^{2iz} = 1, \ \ 2iz = Ln\, 1 = i2\pi k,$$

$$z = \pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогічно перевіряється для $\cos z$.

Якщо тригонометричні функції $\sin x$ і $\cos x$ дійсної змінної є обмеженими, то в комплексній площині функції $\sin z$ і $\cos z$ є необмеженими. Дійсно, $|\cos iy| = \operatorname{ch} y \to +\infty \ \ (y \to \infty)$ і $|\sin iy| = |\operatorname{sh} y| \to +\infty \ \ (y \to \infty)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin z = 1$.

Розв'язування.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 1, \qquad e^{iz} - e^{-iz} = 2i, \qquad e^{2iz} - 2ie^{iz} - 1 = 0, \ \ e^{iz} = i,$$

$$iz = Ln\, i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Формули, відомі із тригонометрії, справедливі і для комплексних чисел. Із рівностей

$$\left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} \pm e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} \mp e^{-iz_2}\right) =$$
$$= 2\left(e^{i(z_1+z_2)} \pm e^{-i(z_1+z_2)}\right)$$

одержуємо теореми додавання

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2,$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.$$

Справедливі також формули, що легко перевіряються:

$$cos^2 z+sin^2 z=1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm z\right)=\mp\sin z,\quad \cos(\pi\pm z)=-\cos z,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm z\right)=\cos z,\quad \sin(\pi\pm z)=\mp\sin z.$$

Для комплексних чисел визначимо

$$\mathrm{t}g\, z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \mathrm{ctg}\, z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Функції $w=Arcsin\, z$, $w=Arccos\, z$, $w=Arctg\, z$, $w=Arcctg\, z$, що обернені до відповідних тригонометричних функцій $z=\sin w$, $z=\cos w$, $z=\mathrm{t}g\, w$, $z=\mathrm{ctg}\, w$, називаються *оберненими тригонометричними* функціями.

Із рівняння $z=\sin w$ знаходимо $z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$, $e^{iw}-e^{-iw}=2iz$, $e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0$, $\left(e^{iw}-iz\right)^2=1-z^2$, $e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2}$,

$$w=-iLn\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),$$

$$Arcsin\, z=-iLn\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right).$$

Аналогічно

$$Arccos\, z=-iLn\left(z+\sqrt{z^2-1}\right).$$

2.5. Вправи до розділу 2

2.1. Довести, що функція $w=\frac{1}{1+z^2}$ обмежена на множині $\{z\colon |z|\geq 2\}$.

2.2. Функцію $w=f(z)$ подати у вигляді $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$:

$$a)\ w=z^3+1;\ b)\ w=\frac{\bar{z}}{z+1};\ c)\ w=\frac{z-1}{z+2}.$$

2.3.Довести неперервність функції $w=f(z)$ у точці $z=z_0$:

$$a)\ w=\frac{z-1}{z+2},\quad z_0=i;\ b)\ w=\frac{|z|}{z},\qquad z_0=i.$$

2.4. Знайти образи ліній при відображенні $w=f(z)$

$$a)\ w = z^2:\ x = y, \qquad \arg z = \alpha, \qquad |z| = r\,;$$

$$b)\ w = \frac{1}{z}:\ |z| = r, |z-1| = 1, y = x, y = 0\,,\ \ x = c, \qquad \arg z = \alpha\,;$$

$$c) w = z - \frac{1}{z}:\ |z| = r\,;$$

$$d)\ w = \frac{z-1}{z+1}:\ Im\, z = 1\,;$$

$$e) w = \frac{z}{z+1}:\ |z| = 2\ .$$

2.5. Знайти суми (спростити)

$$a)\ \ \cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x\,;$$

$$b)\ \sin x - \sin 2x + \cdots + (-1)^{n-1} \sin nx.$$

2.6. Довести: $\sin 2z = 2\sin z\ \cos z\,;\ \sin z_1 + \sin z_2 = 2\sin\frac{z_1+z_2}{2}\ \cos\frac{z_1-z_2}{2}$.

2.7. Знайти $a)\ e^{\pi i},\ e^{\frac{\pi}{2}i},\ e^{1-\frac{\pi}{2}i},\ e^{3+i},\ e^{2-3i};\ b)\ \ln(-1)\,, \mathrm{Ln}(-1)\,;\ \ln i\,, \mathrm{Ln}\, i\,;$

$c)\ \mathrm{Ln}(-i)\,, \mathrm{Ln}(1+i)\,, \mathrm{Ln}(-3+4i)\,;\ \ d)\ 1^i,\ \ 2^i, 2^{1+i},\ \ i^{1+i}, (1+i)^i, 1^{\sqrt{2}}, (-2)^{\sqrt{2}};$

$$e)\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}, \left(-1+i\sqrt{3}\right)^{1-i}, (3-4i)^{1+i}, (3+4i)^{1+i}, \qquad \left(-\sqrt{3}+i\right)^{-i}.$$

2.8. Знайти

$$\sin(x+iy)\,, \cos(x+iy)\,, \sin i\,, \cos i\ \,, \sin(1+2i)\,, \cos(1+i)\,, tg(2-i).$$

2.9. Розв’язати рівняння

$$a)\ \sin z = \frac{4i}{3};\ b)\ \cos z = \frac{3i}{4};\ c)\ \mathrm{tg}\, z = \frac{5i}{3};\ \ d)\ \sin z - \cos z = i.$$

2.10. Довести формули

$$a)\ Arccos\ z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2-1}\right);$$

$$b)\ Arctg\ z = \frac{1}{2i} Ln\ \frac{1+iz}{1-iz};$$

$$c)\ Arcctg\ z = \frac{1}{2i} Ln\ \frac{iz-1}{iz+1}.$$

2.11. Знайти

$$Arcsin\, 3, \qquad Arcsin\ i, \qquad Arcsin\left(\sqrt{2}-i\right).$$

Розділ 3. Похідна функції комплексної змінної. Конформні відображення

3.1. Диференційовність функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана

Нехай функція $f(z)$ задана в області $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$, $z = z_0 + \Delta z \in G$. Тоді $\Delta z = z - z_0$ називають приростом аргументу, а $\Delta f = f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ – приростом функції.

Означення 3.1. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$, то така границя називається похідною функції $f(z)$ в точці z_0 та позначається $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

При цьому функція $f(z)$ називається *диференційовною* у точці z_0.

Оскільки

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) = \alpha(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0,$$

то приріст функції $f(z)$, що має похідну в точці z_0 , зображається у вигляді

$$\Delta f = f'(z_0) \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z,$$

або

$$\Delta f = f'(z_0) \cdot \Delta z + o(|\Delta z|),\ \Delta z \to 0. \qquad (3.1)$$

Отже, *похідна функції $f(z)$ в точці z_0 існує тоді і тільки тоді, коли приріст функції $f(z)$ в точці z_0 зображається у вигляді (3.1).*

Якщо функція має похідну в точці z_0, то вона неперервна в цій точці.

Нехай $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Тоді

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) =$$
$$= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i\big(v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\big) =$$
$$= \Delta u + i\Delta v.$$

Якщо функція $f(z)$ має похідну в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, то покладаючи у означенні похідної $\Delta z = \Delta x$, а потім $\Delta z = i\Delta y$, із попередньої рівності одержимо існування частинних похідних $\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$ і рівності

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}, \qquad f'(z_0) = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

Відзначимо, що ці рівності можна використовувати для знаходження похідних. Навпаки, якщо функції u та v диференційовні, як функції двох змінних, в точці (x_0, y_0), тоді

$$|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \rho,$$

$$\Delta u = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|), \qquad \Delta z \to 0,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|), \qquad \Delta z \to 0.$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + o(|\Delta z|), \qquad \Delta z \to 0.$$

Тобто, приріст функції $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ зображається у вигляді

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|), \Delta z \to 0, \tag{3.2}$$

де $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$.

Якщо приріст функції $w = f(z)$ в точці z_0 можна зобразити у вигляді (3.2), то функція $f(z)$ називається *диференційовною в точці* z_0 *в розумінні* $\mathbb{R}^2$.

Це еквівалентно диференційовності функцій u та v в точці (x_0, y_0).

Оскільки

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta y, \Delta x = \frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2},\ \Delta y = \frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i},$$

то

$$\Delta w = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i} + o(|\Delta z|) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{\Delta z} + o(|\Delta z|), \Delta z \to 0.$$

Покладемо

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right).$$

Тоді

$$\Delta w=\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|),\Delta z\to 0. \tag{3.3}$$

Функцію $f(z)$ назвемо *диференційовною в розумінні* $\mathbb{C}$, якщо вона диференційовна в розумінні $\mathbb{R}^2$ і $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$.

Умова $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ еквівалентна умовам

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases} \tag{3.4}$$

Умови (3.4) називають умовами Коші-Рімана (C.R.).

Відзначимо, що диференційовність в розумінні $\mathbb{C}$ не зводиться до диференційовності в розумінні $\mathbb{R}^2$, бо додатково вимагається виконання умов Коші-Рімана.

Наприклад, функція $f(z)=x+2yi$ в розумінні $\mathbb{C}$ не диференційовна, бо $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial v}{\partial y}=2$ і умови (3.4) не виконуються. Проте функції $u(x,y)=x, v(x,y)=2y$ є диференційовними,

3.2. Поняття моногенності, аналітичності. Умови моногенності, аналітичності

Нехай функція $f(z)$ задана в області $G\subset\mathbb{C}$, $z_0\in G$. Функція $f(z)$ називається *моногенною* в точці z_0, якщо вона має похідну в цій точці. Якщо функція $f(z)$ має похідні в кожній точці деякої області, то вона називається *моногенною в цій області*.

Функція $f(z)$ називається *аналітичною (голоморфною, правильною)* в точці z_0, якщо вона має неперервну похідну в деякому околі цієї точки. Якщо функція аналітична в кожній точці деякої області, то вона називається *аналітичною в цій області*.

Функція, яка аналітична в $\mathbb{C}$, називається *цілою*.

Функція називається аналітичною в замкненій області $\bar{G}$, якщо вона аналітична в деякій області D, що містить $\bar{G}$.

Функція $f(z)$ називається аналітичною в точці $z = \infty$, якщо функція $f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналітична в точці $z = 0$.

Теорема 3.1. Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена в деякому околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$ і функції u та v мають в цьому околі неперервні частинні похідні. Для того, щоб функція $f(z)$ була моногенною в точці z_0, необхідно і достатньо, щоб у цій точці виконувалися умови Коші-Рімана.

Доведення. Необхідність. Нехай функція $f(z)$ має похідну в точці z_0. Тоді, як показано у попередньому пункті,

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u + i\Delta v.$$

Покладемо у означенні похідної $\Delta z = \Delta x$, тоді $\Delta f = \Delta_x u + i\Delta_x v$, а

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i\frac{\Delta_x v}{\Delta x},$$

Оскільки існує похідна, то

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Покладемо у означенні похідної $\Delta x = 0$, $\Delta z = i\Delta y$, тоді $\Delta f = \Delta_y u + i\Delta_y v$,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\Delta_y u}{i\Delta y} + i\frac{\Delta_y v}{i\Delta y}\right) = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Тобто,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Прирівнюючи дійсні і уявні частини, одержимо виконання умов Коші-Рімана в точці z_0.

Достатність. Нехай у точці z_0 виконуються умови Коші-Рімана. Із неперервності частинних похідних функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$ в околі точки (x_0,y_0) випливає їх диференційованість у цій точці:

$$\Delta u = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|), \qquad \Delta z \to 0,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|), \qquad \Delta z \to 0.$$

Тоді

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v =$$

$$= \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y\right) + o(|\Delta z|).$$

Використовуючи умови Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, приріст Δf можна записати у вигляді

$$\Delta f = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta y + i\left(\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta y\right) +$$

$$+ o(|\Delta z|) =$$

$$= \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|) =$$

$$= \left(\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\right)\Delta z + o(|\Delta z|).$$

Із (3.1) випливає, що $f(z)$ має в точці z_0 похідну

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x},$$

а це означає, що $f(z)$ в точці z_0 є моногенною. ■

Теорема 3.2. Нехай функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ задана в області G і функції u та v мають в цій області неперервні частинні похідні. Для того, щоб функція $f(z)$ була аналітичною в області G необхідно і достатньо, щоб в області G виконувалися умови Коші-Рімана.

Доведення. Якщо функція $f(z)$ аналітична в області G, то вона моногенна в області G, тому за теоремою 3.1 в кожній точці області G виконуються умови Коші-Рімана. Навпаки, із виконання умов Коші-Рімана випливає, що функція $f(z)$ моногенна в області G і в кожній точці області G існує похідна

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Оскільки частинні похідні $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ неперервні в області G, то $f'(z)$ неперервна в області G, отже функція $f(z)$ аналітична в області G. ■

Приклад 1. Показати, що функція e^z є аналітичною в $\mathbb{C}$ і знайти її похідну.

Розв'язування. Оскільки $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, то $u = e^x\cos y$, $v = e^x\sin y$.

Знайдемо їх частинні похідні: $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$. Отже, виконуються умови Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ і частинні похідні неперервні у кожній точці $\mathbb{R}^2$, тому функція e^z є аналітичною в $\mathbb{C}$. Її похідну можна знайти за формулою $f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$. Звідки,

$$f'(z) = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z.$$

У наступному розділі ми покажемо, що аналітична в області G функція має в цій області похідні всіх порядків. Зокрема, для такої функції u і v мають неперервні в області G частинні похідні другого порядку. Продиференціюємо першу із умов Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

по змінній x, а другу – по y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

і додамо одержані рівності, тоді одержимо

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Якщо першу із умов Коші-Рімана продиференціюємо по змінній y, а другу − по x, і віднімемо результати, то одержимо

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Рівняння $\Delta u = 0$ і $\Delta v = 0$ називають *рівняннями Лапласа*. Будь-яка функція, яка є розв'язком рівняння Лапласа, називається *гармонійною*. Отже, дійсна і уявна частина аналітичної функції є гармонійними функціями, їх називають спряженими.

Відзначимо, що за відомою дійсною (уявною) частиною аналітичної функції, її уявна (дійсна) частина визначається з точністю до сталої. Нехай u – відома функція. Підставивши її у рівняння Коші-Рімана, одержимо дві рівності із яких знаходимо v.

Приклад 2. За відомою дійсною частиною $u = x^2 - y^2 - 3x$ аналітичної функції, знайти її уявну частину v.

Розв'язування. Підставимо $u = x^2 - y^2 - 3x$ у кожну із умов Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тоді одержимо рівняння

$$2x - 3 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Із другого рівняння знаходимо

$$v = \int 2y dx + \varphi(y) = 2xy + \varphi(y)$$

і підставимо v у перше із одержаних рівнянь $2x - 3 = \frac{\partial v}{\partial y}$, тоді одержимо $2x - 3 = 2x + \varphi'(y)$. Звідки, $\varphi(y) = -3y + C$, а

$$v = 2xy - 3y + C.$$

3.3. Правила і формули диференціювання. Похідні деяких елементарних функцій

Із означення похідної і властивостей границі функції випливає, що основні правила диференціювання функції дійсної змінної, поширюються і на функції комплексної змінної.

1. Якщо $f(z) = k = const$, то $f'(z) = 0$.
2. Нехай $f_1(z),\ f_2(z)$ моногенні в точці z, тоді моногенними в точці z будуть функції $cf_1(z),\ c \in \mathbb{C}, f_1(z) + f_2(z),\ f_1(z) \cdot f_2(z),\ \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ при $f_2(z) \neq 0$, причому
$$(cf_1(z))' = cf_1'(z),$$
$$(f_1(z) + f_2(z))' = f_1'(z) + f_2'(z),$$
$$\left(f_1(z) \cdot f_2(z)\right)' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z),$$
$$\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \frac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{(f_2(z))^2}.$$
3. Нехай функція $f(z)$ моногенна в точці z_0, а функція $\varphi(w)$ моногенна в точці $w_0 = f(z_0)$, тоді $\varphi(f(z))$ буде моногенною в точці z_0, причому
$$\left(\varphi\left(f(z)\right)\right)' = \frac{d}{dz}\varphi(f(z))|_{z_0} = \varphi'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$
4. Нехай функція $f(z)$ однолистна і неперервна в області D, та многогенна в точці z_0, причому $f'(z_0) \neq 0$. Тоді існує обернена функція $g(w)$, яка буде моногенною в точці $w_0 = f(z_0)$, причому $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Тепер перейдемо до виведення похідних деяких елементарних функцій.

Нехай $f(z) = az + b$ – лінійна функція. Оскільки для довільного $z \in \mathbb{C}$ $\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = a\Delta z$, то $f'(z) = a$. Зокрема, $(z)' = 1$.

Розглянемо функцію $f(z) = z^n,\ z \in \mathbb{N}$. Покажемо, що
$$(z^n)' = nz^{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$
При $n = 1$ $(z)' = 1$, отже формула правильна. Нехай $(z^{n-1})' = (n-1)z^{n-2}$, тоді $(z^n)' = (z \cdot z^{n-1})' = z' \cdot z^{n-1} + z \cdot (z^{n-1})' = z^{n-1} + z(n-1)z^{n-2} = nz^{n-1}$.

У попередньому пункті при розв'язуванні прикладу ми довели, що

$$(e^z)' = e^z.$$

Використовуючи означення тригонометричних функцій

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

і правило диференціювання складної функції, одержуємо

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} \cdot i + e^{-iz} \cdot i\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \cos z,$$

$$(\sin z)' = \cos z,$$

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{i}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z.$$

Аналогічно для функцій

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

Використовуючи похідну частки і рівність $sin^2 z + cos^2 z = 1$, знаходимо

$$(tgz)' = \frac{1}{cos^2 z}, \qquad (ctgz)' = -\frac{1}{sin^2 z}.$$

Нехай $w = (\sqrt[n]{z})_k$ однозначна вітка $\sqrt[n]{z}$. Тоді $z = w^n$ є оберненою. За правилом 4 маємо

$$((\sqrt[n]{z})_k)' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{w}{nw^n} = \frac{(\sqrt[n]{z})_k}{nz}.$$

Розглянемо однозначну вітку логарифмічної функції $w = (Ln\, z)_k$, оберненою до неї є функція $z = e^w$. Тоді

$$((Ln\, z)_k)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

3.4. Геометричний зміст модуля і аргументу похідної. Конформні відображення

Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в точці $z_0 \in \mathbb{C}$ і $f'(z_0) \neq 0$, тоді кажуть, що $f(z)$ *задає конформне відображення* в точці z_0.

Оскільки

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \neq 0,$$

$|z - z_0|$ – віддаль між точками z і z_0, а $|f(z) - f(z_0)|$ – віддаль між образами цих точок, то величина $\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ показує, у якому відношенні змінються віддалі між точками в результаті відображення $w = f(z)$. Тому величину $|f'(z_0)|$ називають *коефіцієнтом розтягу* в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$. Якщо $|f'(z_0)| > 1$, то в малому околі точки z_0 віддалі при відображенні $f(z)$ збільшуються і відбувається розтяг, а при $|f'(z_0)| < 1$ в малому околі точки z_0 відображення $f(z)$ приводить до стискування.

Відзначимо, що не кожне відображення має сталий коефіцієнт розтягу. Наприклад, при відображенні функцією $w = x + 2yi$ довжини горизонтальних відрізків не змінюються, а довжини вертикальних відрізків збільшуються в два рази. Це пояснюється тим, що дана функція не є аналітичною.

Виясним тепер геометричний зміст аргументу похідної. Нехай функція $f(z)$ аналітична в області $G \subset \mathbb{C}$, яка функцією $f(z)$ відображається в область $D \subset \mathbb{C}$.

Нехай $\gamma = \{z: z = z(t), t \in [t_0, T]\}$ – гладка лінія, що виходить із точки $z_0 = z(t_0) \in G$. Її образом при відображенні $w = f(z)$ буде гладка лінія $L = \{w: w = w(t) = f\big(z(t)\big),\ t \in [t_0, T]\}$, $w_0 = w(t_0) = f\big(z(t_0)\big) \in D$. За правилом диференціювання складної функції

$$w'(t_0) = f'\big(z(t_0)\big) \cdot z'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0).$$

Якщо $f'(z_0) \neq 0$,

$$arg\, w'(t_0) = arg f'(z_0) + arg\, z'(t_0),$$

де $arg\, z'(t_0) = \varphi$ – це кут, який утворює дотична до лінії γ у точці z_0, а $arg\, w'(t_0) = \beta$ є кут, який утворює дотична до лінії L у точці w_0:

$$\beta = arg f'(z_0) + \varphi.$$

Отже, $arg f'(z_0)$ – *це кут, на який необхідно повернути дотичну до лінії* γ *у точці* z_0, *щоб отримати дотичну до лінії* L *у точці* w_0.

Якщо через точку z_0 проходить дві лінії γ_1 і γ_2, дотичні до яких у точці z_0 утворюють кут α, то при відображенні $w = f(z)$, за умови $f'(z_0) \neq 0$, лінії γ_1 і γ_2, перейдуть у лінії L_1 і L_2, які проходять через точку $w_0 = f(z_0)$ і дотичні до них у точці w_0 утворюють (з урахуванням напрямку) кут α.

Тобто, при конформному відображенні $w = f(z)$ кути між лініями зберігаються.

Конформне відображення має властивості сталості розтягу і збереження кутів.

Якщо аналітична функція $f(z)$ має в точці z_0 похідну, відмінну від нуля, то відображення $w = f(z)$ називається конформним в точці z_0. Відображення $w = f(z)$ називається конфорним в області, якщо воно конформне у будь-якій точці цієї області.

Теорема Рімана стверджує, що для будь-яких областей G_1, G_2 існує конформне відображення G_1 в G_2.

Відображення $f(z)$ називається конформним в точці $z_0 = \infty$, яка відображається у точку $w_0 \in \mathbb{C}$, якщо відображення $f\left(\frac{1}{z}\right)$ буде конформним в точці 0. Якщо $z_0 \in \mathbb{C}$ відображається у ∞, то відображення $f(z)$ буде конформним в точці z_0, якщо конформним буде $\frac{1}{f(z)}$. У випадку $\infty \to \infty$ $f(z)$ буде конформним в точці $z_0 = \infty$, якщо конформним буде відображення $\frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$.

3.5. Симетричні точки

Точки z_1 і z_2 $(z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C})$ називаються симетричними відносно прямої L, якщо вони лежать на одному перпендикулярі до прямої по різні сторони і на однаковій віддалі від прямої.

Точки z_1 і z_2 $(z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C})$ називаються симетричними відносно кола $\gamma = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = R\}$, якщо вони лежать на одному промені, що виходить із центра z_0 кола, і виконується умова $|z_1 - z_0|\,|z_2 - z_0| = R^2$. Точки z_0 і ∞ вважаємо симетричними.

У розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ під колом розуміємо як коло в $\mathbb{C}$ так і пряму в $\mathbb{C}$.

Для дослідження властивості симетричних точок ми будемо використовувати відому із шкільного курсу геометрії властивість дотичної до кола.

Нехай із точки M поза колом проведено січну, яка перетинає коло в точках A і B, і відрізок MC, де C точка на колі. Для того, щоб пряма MC була дотичною до кола, необхідно і досить, щоб $MC^2 = MA \cdot MB$.

Теорема 3.3. Для того, щоб точки z_1 і z_2 $(z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C})$ були симетричні відносно кола $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$, необхідно і достатньо, щоб кожне коло, яке проходить через точки z_1 і z_2, було ортогональне до γ.

Доведення. Нехай γ – пряма, z_1, z_2 – симетричні відносно γ. Толі γ є серединним перпендикуляром до відрізка з кінцями у точках z_1 і z_2 і кожна точка на γ рівновіддалена від точок z_1 і z_2. Тому кожне коло, яке проходить через z_1, z_2, має центр на γ, діаметр кола лежить на γ, отже коло ортогональне до γ. Пряма, яка проходить через z_1 і z_2, за означенням перпендикулярна до γ.

Навпаки, нехай кожне коло, яке проходять через z_1 і z_2, є ортогональне до γ. Проведемо через z_1 і z_2 пряму, вона перпендикулярна до γ. Отже, точки z_1 і z_2 лежать на одному перпендикулярі до γ. На відрізку з кінцями у точках z_1 і z_2, як на діаметрі, побудуємо коло. Це коло є ортогональне до γ і γ є продовженням одного із діаметрів цього кола. Центр кола лежить на γ, а точки z_1 і z_2 лежать по різні сторони від γ, отже симетричні відносно γ.

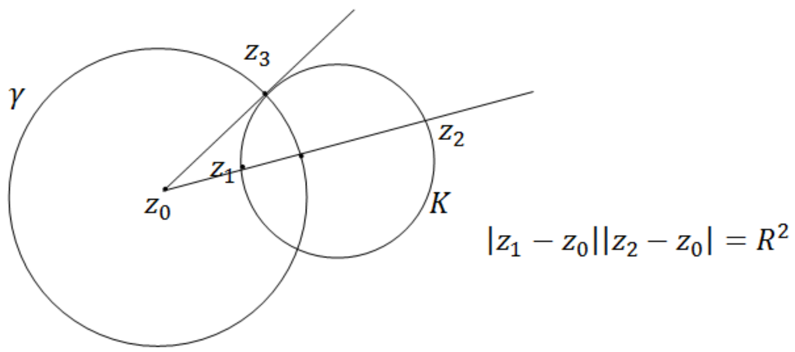

Рисунок 3.1

Нехай γ є колом в $\mathbb{C}$: $\gamma = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = R\}$. Нехай z_1 і z_2 є симетричні відносно γ. Проведемо коло через z_1 і z_2 пряму, вона пройде через z_0, тому ортогональна до γ. Нехай довільне коло K проходить через точки z_1 і z_2 і перетинає коло γ у точці z_3. Із умови $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$ випливає, що радіус кола γ із кінцем у точці z_3, буде дотичною до кола K. Тому коло K буде ортогональне до γ.

Навпаки, нехай будь-яке коло, що проходить через z_1 і z_2 є ортогональне до γ. Проведемо через z_1 і z_2 пряму, оскільки вона є ортогональною до γ, то проходить через z_0. Отже, точки z_1 і z_2 лежать на одному промені, що виходить із центра z_0 кола. Нехай коло K проходить через точки z_1 і z_2, перетинає коло γ у точці z_3 і є ортогональне до γ. Тоді пряма, яка проходить через z_0 і z_3 є дотичною до кола K у точці z_3 і точка z_0 лежить поза колом K, а пряма, яка проходить через точки z_0, z_1, z_2, для кола K є січною. За наведеною вище властивістю дотичної, одержимо $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = |z_3 - z_0|^2 = R^2$. Отже, точки z_1 і z_2 є симетричні відносно γ. ■

Приклад 3. Нехай z_1 – довільна точка. Знайти точку z_2, яка симетрична до z_1 відносно кола $|z - z_0| = R$.

Розв'язування. Якщо точки z_1 і z_2 $(z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C})$ симетричні відносно кола $\gamma = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = R\}$, то вони лежать на одному промені, що виходить із центра z_0 кола, і виконується умова $|z_1 - z_0|\,|z_2 - z_0| = R^2$. Виконаємо паралельне перенесення $w = z - z_0$.

Оскільки при паралельному перенесенні зберігаються кути та віддалі між точками, то точки $w_1 = z_1 - z_0$ і $w_2 = z_2 - z_0$ будуть симетричні відносно кола $|w| = R$ і

$$|w_1|\,|w_2| = R^2.$$

Тоді точки w_1 і w_2 лежать на одному промені, що виходить із точки $w = 0$, тому $\arg w_1 = \arg w_2 = \varphi$, $w_1 = |w_1|e^{i\varphi}$, $w_2 = |w_2|e^{i\varphi}$, $\overline{w_1} = |w_1|e^{-i\varphi}$.

Помножимо рівність

$$|w_2| = \frac{R^2}{|w_1|}$$

на $e^{i\varphi}$, тоді одержимо

$$|w_2|e^{i\varphi} = \frac{R^2}{|w_1|}e^{i\varphi} = \frac{R^2}{|w_1|e^{-i\varphi}},$$

або

$$w_2 = \frac{R^2}{\overline{w_1}}.$$

Врахувавши, що $w_1 = z_1 - z_0$, $w_2 = z_2 - z_0$ із попередньої рівності одержимо

$$z_2 - z_0 = \frac{R^2}{\overline{z_1 - z_0}}.$$

Отже,

$$z_2 = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}.$$

3.6. Конформні відображення, що здійснюються деякими елементарними функціями

3.6.1. Лінійна функція

Означення 3.2. Функція виду

$$w = az + b, a, b \in \mathbb{C},\ \ a \neq 0,$$

називається *лінійною (цілою лінійною) функцією* .

Функція називається цілою, якщо вона аналітична у кожній точці комплексної площини.

Властивості:

1) Перевіряємо конформність:

$$w' = (az + b)' = a \neq 0,$$

тобто відображення є конформним в кожній точці $z \in \mathbb{C}$, лінійна функція всю комплексну площину переводить у всю комплексну площину, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

2) Лінійна функція всю розширену комплексну площину переводить у всю розширену комплексну площину $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Для цього треба перевірити конформність у точці $z_0 = \infty$. За означенням розглянемо функцію:

$$w = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{a\frac{1}{z} + b} = \frac{z}{a + bz}.$$

Оскільки для такої функції

$$w' = \frac{a + bz - bz}{(a + bz)^2} = \frac{a}{(a + bz)^2}\Big|_{z=0} = \frac{1}{a} \neq 0,$$

то цим конформність у ∞ доведена.

3) Лінійна функція є однолистою (однозначною) у всій комплексній площині: при $z_1 \neq z_2$ отримаємо

$$w_1 - w_2 = az_1 + b - az_2 - b = a(z_1 - z_2) \Rightarrow w_1 \neq w_2.$$

4) Лінійне відображення $w = az + b$ можна подати у вигляді суперпозиції кількох простих відображень:

а) $w_1 = |a|z$ – перетворення подібності (гомотетія з центром в точці $z = 0$);

б) $w_2 = e^{i\varphi}w_1$ – поворот на кут $\varphi = \arg a$;

в) $w = w_2 + b$ – паралельне перенесення на вектор $\vec{b}$.

5) Лінійна функція коло переводить в коло.

Нехай задано коло $|z - z_0| = R$. Розглянемо:

$$|w - w_0| = |az + b - az_0 - b| = |a||z - z_0| = |a|R = R_1.$$

6) Лінійна функція пряму переводить в пряму.

Розглянемо пряму $Ax + By + C = 0$. Оскільки $w = az + b, z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$

$w = u + iv,\ z = x + iy,\ x + iy = \frac{1}{a}(u + iv) - \frac{b}{a},$ то $x = uRe\frac{1}{a} - vIm\frac{1}{a} - Re\frac{b}{a}$, $y = vRe\frac{1}{a} + uIm\frac{1}{a} - Im\frac{b}{a}$. Підставляючи їх у рівняння прямої одержимо лінійне рівняння відносно u і v, яке визначає пряму.

7) При лінійному відображенні симетричні точки переходять в симетричні точки.

Нехай точки z_1 та z_2 симетричні відносно кола $|z - z_0| = R$. Це означає, що точки z_1 і z_2 лежать на одному промені, який виходить із точки z_0, і $|z_1 - z_0|\,|z_2 - z_0| = R^2$. За властивістю 6 відповідні точки w_1 і w_2 лежать на одному промені, який виходить із точки w_0, і

$$|w_1 - w_0||w_2 - w_0| = |az_1 + b - az_0 - b||az_2 + b - az_0 - b| =$$
$$= |a^2||z_1 - z_0||z_2 - z_0| = |a^2|R^2 = R_1^2.$$

Приклад 4. Знайти лінійне перетворення, яке відображає трикутник з вершинами в точках $1 + i,\ 5 + i,\ 3 + 3i$ у трикутник з вершинами в точках $1,$ $i,\ 0$.

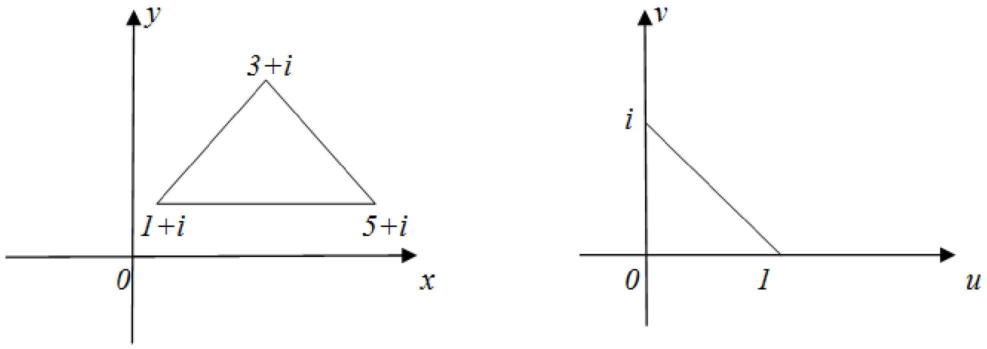

Рисунок 3.2

Розв'язування. Позначимо $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 5 + i,\ z_3 = 3 + 3i$ $w_1 = 1,$ $w_2 = i,\ w_3 = 0$. Задані трикутники прямокутні і рівнобедрені, прямі кути у точках із вершинами z_2 і w_2. $|z_1 - z_2| = 4,$ $|z_1 - z_3| = |2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2},$ $|z_2 - z_3| = |2 - 2i| = 2\sqrt{2},$ $|w_1 - w_2| = |1 - i| = \sqrt{2},$ $|w_1 - w_3| = 1,$ $|w_2 - w_3| = |i| = 1.$

Перетворити перший трикутник у другий можна наступними перетвореннями. Виконаємо паралельне перенесення $\zeta = z - 3 - 3i$, потім $\xi = e^{i\frac{3\pi}{4}}\zeta$ – поворот на кут $\frac{3\pi}{4}$ і перетворення подібності $w = \xi\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Об'єднуючи ці перетворення, одержимо:

$$w = \xi\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}\zeta = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}(z - 3 - 3i).$$

Отже, лінійне перетворення має вигляд: $w = -\frac{1}{4}(1 - i)z + \frac{3}{2}$.

Лінійне перетворення однозначно визначається двома різними точками і їх образами. Нехай $w = az + b$. Тоді коефіцієнти a і b знайдемо із системи:

$$\begin{cases} w_1 = az_1 + b, \\ w_2 = az_2 + b, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a(1 + i) + b, \\ i = a(5 + i) + b. \end{cases}$$

Звідки, $a = \frac{i-1}{4},\ b = \frac{3}{2}$. Отже, $w = -\frac{1}{4}(1 - i)z + \frac{3}{2}$.

3.6.2. Дробово-лінійна функція

Означення 3.3. Функція виду

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ та $\Delta = ad - bc \neq 0$ називається *дробово-лінійною*.

Якщо $c = 0$, то дістанемо лінійну функцію $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, яку ми вже розглядали. Тому будемо вважати, що $c \neq 0$.

Властивості:

1) Функція $w = \frac{az+b}{cz+d}$ визначена для всіх комплексних чисел, крім $z = -\frac{d}{c}$. Перевіримо конформність:

$$w' = \frac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{\Delta}{(cz+d)^2} \neq 0,$$

тобто відображення є конформним в кожній точці z при умові, що $z \neq -\frac{d}{c}$.

При даному відображенні точка $z_0 = -\frac{d}{c}$ переходить у точку $w_0 = \infty$. Розглянемо функцію $w = \frac{1}{f(z)} = \frac{cz+d}{az+b}$, тоді

$$w' = \frac{c(az-b)-a(cz+d)}{(az+b)^2} = \frac{bc-ad}{(az+b)^2} = \frac{-\Delta}{(az+b)^2}\bigg|_{z_0=-\frac{d}{c}} \neq 0,$$

що показує, що в точці $z_0 = -\frac{d}{c}$ відображення є конформним.

Розглянемо точку $z = \infty$ і функцію $w = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a\frac{1}{z}+b}{c\frac{1}{z}+d} = \frac{a+zb}{c+zd}$, тоді

$$w' = \frac{b(cz+d)-d(a+bz)}{(c+zd)^2} = \frac{bc-ad}{(c+zd)^2} = \frac{-\Delta}{(c+zd)^2}\bigg|_{z_0=0} = \frac{-\Delta}{c^2} \neq 0.$$

Отже, дробово-лінійне відображення w конформно відображає розширену комплексну площину в розширену комплексну площину.

2) Дробово-лінійне відображення є однолистим у всій комплексній площині.

Дійсно, для всіх $z_1 \neq z_2$,

$$w_1 - w_2 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} =$$

$$= \frac{(az_1 + b)(cz_2 + d) - (az_2 + b)(cz_1 + d)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} =$$

$$= \frac{ad(z_1 - z_2) + bc(z_2 - z_1)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} = \frac{(z_1 - z_2)\Delta}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \neq 0 \Rightarrow w_1 \neq w_2.$$

Тоді функція w є однолистою у всій комплексній площині.

3) Оберненим до дробово-лінійного відображення є дробово-лінійне відображення.

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad w(cz + d) = az + b, \qquad z = \frac{b - wd}{wc - a}.$$

4) Якщо $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$, то одержимо відображення $w = \frac{1}{z}$.

5) Дробово-лінійне відображення можна подати у вигляді суперпозиції кількох простих відображень.

Дійсно, відображення

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}$$

можна подати у вигляді суперпозиції відображень: $w_1 = cz + d$ – лінійне відображення; $w_2 = \frac{1}{w_1}$; $w = \left(b - \frac{ad}{c}\right) w_2 + \frac{a}{c}$ – лінійне відображення.

6) При дробово-лінійному відображені коло (в широкому розумінні) переходить в коло, пряма (в широкому розумінні) переходить в пряму (*кругова властивість*).

Доведемо це на прикладі кола: $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$.

Оскільки лінійна функція відображає коло в коло, пряму в пряму, то досить довести цю властивість для відображення $w = \frac{1}{z}$,

$$w = u + iv \Rightarrow u + iv = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{u+iv} = \frac{u-iv}{u^2+v^2}.$$

Тоді

$$x + iy = \frac{u}{u^2 + v^2} - i\frac{v}{u^2 + v^2}, \qquad x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \qquad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Звідки,

$$A\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right)+B\frac{u}{u^2+v^2}-C\frac{v}{u^2+v^2}+D=0,$$

$$A+Bu-Cv+D(u^2+v^2)=0,$$

а це є загальним рівнянням кола.

Якщо коло або пряма не проходить через точку $z=0$, то відображення $w=\frac{1}{z}$ переводить коло або пряму у коло. Якщо коло або пряма проходить через точку $z=0$, то відображення $w=\frac{1}{z}$ переводить коло або пряму у пряму.

Для відображення $w=\frac{az+b}{cz+d}$ це означає: прямі і кола, які проходять через точку $z=-\frac{d}{c}$ відображаються у прямі; прямі і кола, які не проходять через точку $z=-\frac{d}{c}$ відображаються у кола.

Теорема 3.4 *(про три точки)*. Існує єдине дробово-лінійне відображення, яке довільні три різні точки z_1, z_2, z_3 розширеної комплексної площини переводить у довільні задані три різні точки w_1, w_2, w_3 розширеної комплексної площини.

Доведення. Позначимо $w_k=\frac{az_k+b}{cz_k+d}$, $k=1,2,3$. Розглянемо різниці:

$$w-w_1=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{az_1+b}{cz_1+d}=\frac{(az+b)(cz_1+d)-(az_1+b)(cz+d)}{(cz+d)(cz_1+d)}=$$

$$=\frac{(bc-ad)z_1+(ad-bc)z}{(cz+d)(cz_1+d)}=\frac{(z-z_1)\Delta}{(cz+d)(cz_1+d)}.$$

Інші різниці запишемо аналогічно до різниці $w-w_1$:

$$w-w_2=\frac{(z-z_2)\Delta}{(cz+d)(cz_2+d)},$$

$$w_3-w_1=\frac{(z_3-z_1)\Delta}{(cz_1+d)(cz_3+d)},$$

$$w_3-w_2=\frac{(z_3-z_2)\Delta}{(cz_2+d)(cz_3+d)}.$$

Тоді

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{\dfrac{(z-z_1)\Delta}{(cz+d)(cz_1+d)}}{\dfrac{(z-z_2)\Delta}{(cz+d)(cz_2+d)}}:\frac{\dfrac{(z_3-z_1)\Delta}{(cz_1+d)(cz_3+d)}}{\dfrac{(z_3-z_2)\Delta}{(cz_2+d)(cz_3+d)}}=$$
$$=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

Отже, для трьох різних точок z_1, z_2, z_3 і їх образів $w_k=\frac{az_k+b}{cz_k+d},\ k=1,2,3$ справедлива рівність

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \tag{3.5}$$

Навпаки, рівність (3.5) однозначно визначає дробово-лінійне відображення, для якого точки z_1, z_2, z_3 відображаються відповідно у точки w_1, w_2, w_3.

Відзначимо, що у (3.5) різниці, у які входить z_n (або w_k), що співпадають із ∞, необхідно замінити одиницею. ■

Відношення

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

називають *подвійним або ангармонічним відношенням чотирьох точок*.

Теорема 3.5 *(про симетричні точки)*. Дробово-лінійне відображення відображає симетричні точки z_1 і z_2 відносно кола С розширеної площини $\overline{\mathbb{C}}$ у симетричні точки w_1 і w_2 відносно образа С* цього кола.

Доведення. Позначимо через w_1 і w_2 образи точок z_1 і z_2. Через точки w_1 і w_2 проведемо довільне коло γ^*. Оберненим до дробово-лінійного відображення є дробово-лінійне відображення. За властивістю дробово-лінійного відображення коло переходить в коло. Прообраз кола γ^* при оберненому відображенні буде коло γ, яке проходить через точки z_1 і z_2. Оскільки точки z_1 і z_2 симетричні відносно кола С, то, за властивістю симетричних точок, коло γ буде ортогональним до кола С. Дробово-лінійне відображення є конформне, а це означає, що воно зберігає кути. Тому кола γ^* і С* ортогональні. Це означає, що точки w_1 і w_2 симетричні відносно кола С*.

■

Приклад 5. Знайти дробово-лінійне відображення, яке точки $-1, \infty, i$ переводить відповідно в точки $\infty, i, 1$.

Розв'язування. Підставивши значення $z_1 = -1,\ z_2 = \infty,\ z_3 = i$ та $w_1 = \infty,\ w_2 = i,\ w_3 = 1$ в формулу (3.5), одержимо:

$$\frac{w-\infty}{w-i} \cdot \frac{1-i}{1-\infty} = \frac{z+1}{z-\infty} \cdot \frac{i-\infty}{i+1} \Rightarrow \frac{1-i}{w-i} = \frac{z+1}{i+1},$$

звідки знаходимо

$$w = \frac{iz+i+2}{z+1}.$$

Приклад 6. Знайти образ області $D = \{z: \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ при відображенні $w = \frac{z-i}{z+i}$.

Розв'язування. Точка $z = -i$ лежить на уявній осі, тому уявна вісь відображається у пряму, а дійсна вісь – у коло. Подамо відображення $w = \frac{z-i}{z+i}$ у вигляді: $u + iv = \frac{x+iy-i}{x+iy+i}$. Тоді пряма $x = 0$ перейде у пряму $u = \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1}, v = 0$. Якщо y змінюється від ∞ до нуля, то u буде пробігати відрізок від $u = 1$ до $u = -1$.

При відображенні $w = \frac{z-i}{z+i}$ точка $z = -i$ переходить у точку $w = \infty$, а симетрична до $z = -i$ відносно дійсної осі точка $z = i$ перейде у точку $w = 0$, тому дійсна вісь відобразиться у коло із центром $w = 0$. Оскільки $w(0) = -1, w(1) = \frac{1-i}{1+i} = -i, w(\infty) = 1$, то образом дійсної додатної півосі буде півколо $\{w: |w| = 1, \operatorname{Im} w < 0\}$, що обходиться проти годинникової стрілки. Образом області $\{z: \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ буде півкруг $\{w: |w| < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$.

Приклад 7. Відобразити круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, щоб $w\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,\ \arg w'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язування. Оскільки точка $z = -\frac{1}{2}$ лежить у крузі $|z| < 1$ і переходить у точку $w = 0$, що є центром круга $|w| < 1$, то точка $z = -2$, яка симетрична до

$z=-\frac{1}{2}$, перейде у точку $w=\infty$. Тому дробово-лінійне відображення буде мати вигляд:

$$w=a\frac{z+\frac{1}{2}}{z+2}.$$

Із умови $\arg w'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ випливає, що точка $z=1$ перейде у точку $w=e^{i\frac{\pi}{4}}$:

$$e^{i\frac{\pi}{4}}=a\frac{1+\frac{1}{2}}{1+2}, a=2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Шукане відображення має вигляд $w=e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{2z+1}{z+2}$.

Приклад 8. Знати образи прямих $x=c$ при відображенні $w=\frac{1}{z}$.

Розв'язування. При $z=x+iy, w=u+iv$ маємо $z=\frac{1}{w}$,

$$x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}.$$

Звідси, при $c\neq 0$

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\qquad c=\frac{u}{u^2+v^2},\ \ u^2+v^2=\frac{u}{c},\qquad \left(u-\frac{1}{2c}\right)^2+v^2=\frac{1}{4c^2}.$$

Отже, при відображенні $w=\frac{1}{z}$ сім'я прямих $x=c$ при $c\neq 0$ переходить в сім'ю кіл з центром в точці $\left(\frac{1}{2c};0\right)$ і радіусом $\frac{1}{2c}$. Пряма $x=0$ (уявна вісь) переходить у пряму $u=0$ (уявну вісь).

Приклад 9. Знайти образ півплощини $x+y<1$ при відображенні $w=\frac{1}{z}$.

Розв'язування. Точка $z=0$ не лежить на прямій $x+y=1$, тому функція $w=\frac{1}{z}$ відображає цю пряму у коло. Точки $z=0$ і $z=1+i$ симетричні відносно прямої $x+y=1$. При відображенні $w=\frac{1}{z}$ точка $z_1=0$ переходить у точку $w_1=\infty$, а точка $z_2=1+i$ переходить у точку $w_2=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}$, яка буде центром шуканого кола. Для знаходження радіуса кола врахуємо, що точка $z=1$ лежить на заданій прямій і переходить у точку $w=1$. Тому $R=\left|1-\frac{1-i}{2}\right|=\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Отже, пряма $x+y=1$ при відображенні $w=\frac{1}{z}$ переходить у коло

$\left|w - \frac{1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Точка $z_1 = 0$ належить півплощині $x + y < 1$, а її образ $w_1 = \infty$ розміщений зовні кола $\left|w - \frac{1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отже, образом півплощини $x + y < 1$ при відображенні $w = \frac{1}{z}$ буде зовнішність кола $\left|w - \frac{1-i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.6.3. Функція Жуковського

Означення 3.4. Функція комплексної змінної вигляду

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

де $z \neq 0$, називається *функцією Жуковського*.

Функція Жуковського визначена в усій розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ за винятком двох точок $\{0, \infty\}$. У цих точках функцію Жуковського вважають визначеною та неперервною в узагальненому розумінні теорії аналітичних функцій.

Оскільки

$$w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \neq 0$$

у всіх точках $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ крім точок $z = 1$ та $z = -1$, то відображення, що здійснюється функцією Жуковського, є конформним у $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, за винятком точок $1, -1$. Функцію Жуковського можна довизначити у точках $z = 0$ та $z = \infty$, якщо вважати, що точка $z = 0$ відображається у точку $w = \infty$, а точка $z = \infty$ у точку $w = 0$. Довизначена функція здійснює конформне відображення у розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$, за винятком точок $1, -1$.

Перевіряємо однолистість. При всіх $z_1 \neq z_2$ маємо:

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) - \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(z_1 - z_2) + \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2}\right] = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) \neq 0,$$

крім точок $z_1 \neq z_2$, для яких $z_1 z_2 = 1$. Звідси випливає, що відображення буде однолистим у будь-якій множині, яка не містить точок $z_1 \neq z_2$, для яких $z_1 z_2 = 1$. Зокрема, функція Жуковського буде однолистою у зовнішності кола $|z| = 1$ і у його внутрішності. Функція Жуковського буде однолистою у верхній півплощині і у нижній півплощині. Дійсно, для будь-яких $z_1 \neq z_2$, для яких $|z_1| < 1$ і $|z_2| < 1$ також і $|z_1 z_2| < 1$. Аналогічно перевіряється і для зовнішності кола. Нехай $z_1 \neq z_2$ – точки верхньої півплощини. Тоді $\arg z_k \in (0, \pi), k = 1,2,$ і $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, тому $z_1 z_2 \neq 1$. Аналогічно для нижньої півплощини. Дослідимо образи цих областей однолистості.

Виділимо дійсну і уявну частини функції Жуковського. Для цього комплексне число z запишемо в тригонометричній формі:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ де } |z| = r.$$

Оскільки

$$w = u + iv = \frac{1}{2}\left\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right\},$$

то для функції Жуковського маємо такі формули переходу:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\varphi, \\ v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\varphi \end{cases} \tag{3.6}$$

– формули зв'язку між координатами (u, v) та (r, φ).

Зафіксуємо r і роглянемо коло $|z| = r$. Із (3.6)

$$\frac{u}{\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)} = \cos\varphi, \qquad \frac{v}{\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)} = \sin\varphi.$$

Тоді

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1.$$

Тобто, за допомогою функції Жуковського коло із радіусом r відображається у еліпс з півосями $a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), b = \frac{1}{2}\left|r - \frac{1}{r}\right|$ і фокусами в точках -1 і 1. $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 1$.

Для кола $|z| = 1$ із (3.6) випливає, що

$$\begin{cases} u = \cos\varphi, \\ v = 0. \end{cases}$$

Тому коло $|z| = 1$ функцією Жуковського відображається у відрізок $I = \{w: Im\, w = 0,\ Re\, w \in [-1; 1]\}$, який обходиться двічі: при русі проти годинникової стрілки по верхньому півколі (φ змінюється від 0 до π) відповідна точка w пробігає відрізок I від 1 до -1, а при продовженні руху по нижньому півколі відповідна точка w пробігає відрізок I від -1 до 1.

Якщо $r > 1$, то при русі точки z по колу $|z| = r$ у додатному напрямку відповідна точка w буде рухатись по еліпсу у додатному напрямку, верхнє півколо відображається у верхню половину еліпса, а нижнє – у нижню. Якщо $r \to 1 + 0$, то еліпс наближається до відрізка I, при $r \to \infty$ осі еліпсів необмежено зростають.

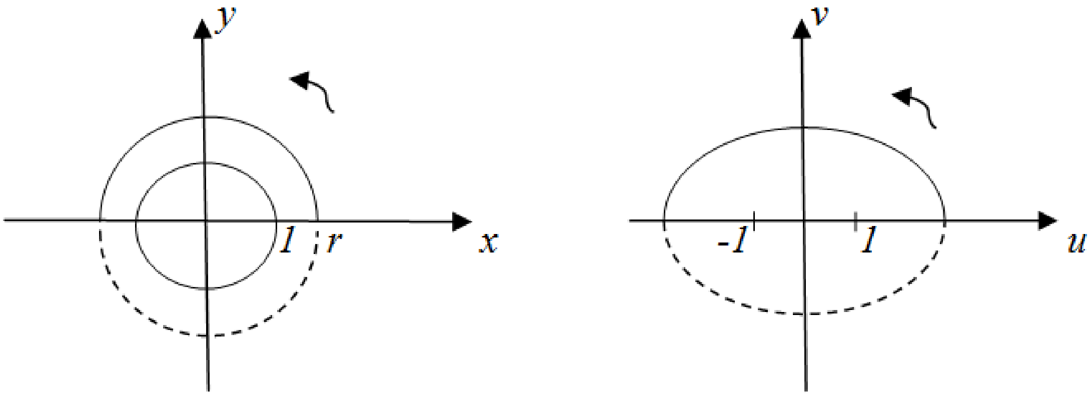

Рисунок 3.3

Тому функція Жуковського однолисто відображає зовнішність одиничного кола на всю комплексну площину з розрізом по відрізку $[-1; 1]$, межа цієї області (коло $|z| = 1$) відображається у відрізок $[-1; 1]$, який обходиться двічі. Область $\{z: |z| > 1,\ Im\, z > 0\}$ відображається у верхню півплощину, а область $\{z: |z| > 1,\ Im\, z < 0\}$ – у нижню півплощину.

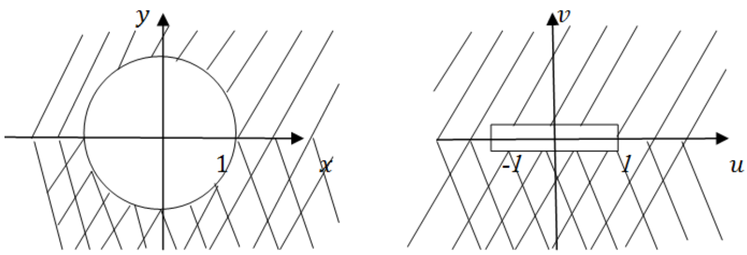

Рисунок 3.4

Якщо $0 < r < 1$, то при русі точки z по колу $|z| = r$ у додатному напрямку відповідна точка w буде рухатись по еліпсу у протилежному напрямку, верхнє півколо відображається у нижню половину еліпса, а нижнє – у верхню. Якщо $r \to 1 - 0$, то еліпс наближається до відрізка I.

Тому функція Жуковського однолисто відображає внутрішність одиничного кола на всю комплексну площину з розрізом по відрізку $[-1; 1]$, межа цієї області (коло $|z| = 1$) відображається у відрізок $[-1; 1]$, який обходиться двічі. Область $\{z: |z| < 1,\ Im\, z > 0\}$ відображається у нижню півплощину, а область $\{z: |z| < 1,\ Im\, z < 0\}$ – у верхню півплощину.

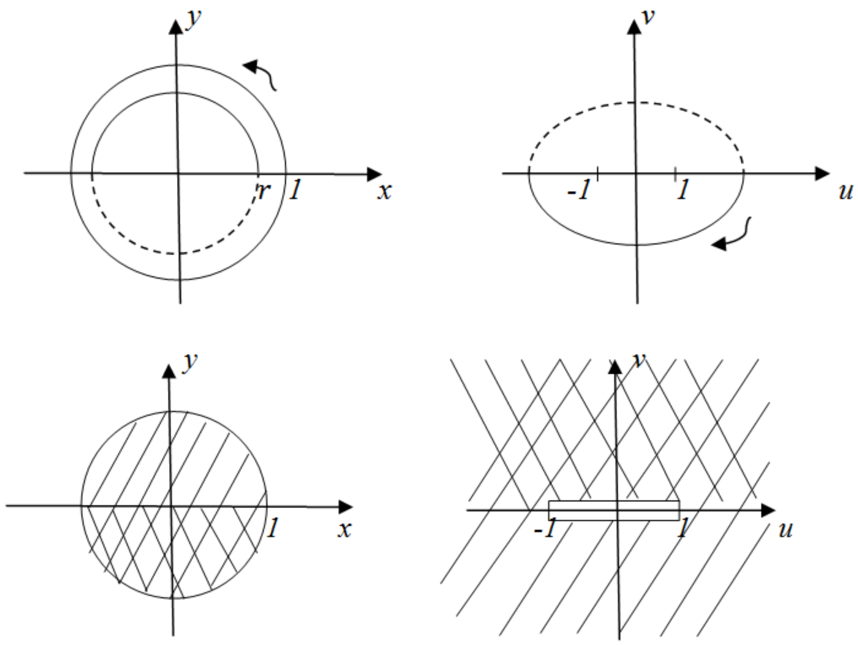

Рисунок 3.5

Оскільки функція Жуковського область $\{z: |z| > 1,\ Im\, z > 0\}$ відображає у верхню півплощину, область $\{z: |z| < 1,\ Im\, z > 0\}$ відображає у нижню півплощину, а коло $|z| = 1$ відображає у відрізок $[-1; 1]$, то їх об'єднання – верхня півплощина – відображається у всю комплексну площину з розрізами по проміжках дійсної осі $(-\infty;-1]$ і $[1;\infty)$. Аналогічно, нижня півплощина відображається у всю комплексну площину з розрізами по проміжках дійсної осі $(-\infty;-1]$ і $[1;\infty)$.

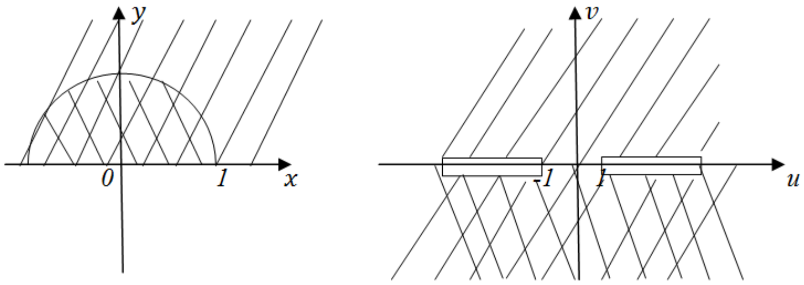

Рисунок 3.6

У (3.6) змінні u і v є функціями змінних r і φ . Ми розглянули випадок, коли r фіксоване, тобто, розглянули образи кіл. Нехай тепер фіксованим є φ, знайдемо образи променів, що виходять з початку координат.

Зафіксуємо у (3.6) $\varphi=\varphi_0$ і виключимо із цих рівностей параметр r, одержимо рівняння:

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi_0}=1.$$

Це рівняння гіперболи з півосями $a=|\cos\varphi_0|$, $b=|\sin\varphi_0|$ і фокусами в точках -1 і 1.

Нехай $0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$. Якщо точка рухається по промені $\varphi=\varphi_0$ із початку координат в нескінченність (r змінюється від 0 до ∞), то відповідна точка w буде пробігати праву вітку гіперболи знизу до верху. Відповідну ліву вітку гіперболи отримаємо при $\varphi=\pi-\varphi_0$. Промінь $\varphi=\frac{\pi}{2}$ відображається у всю уявну вісь.

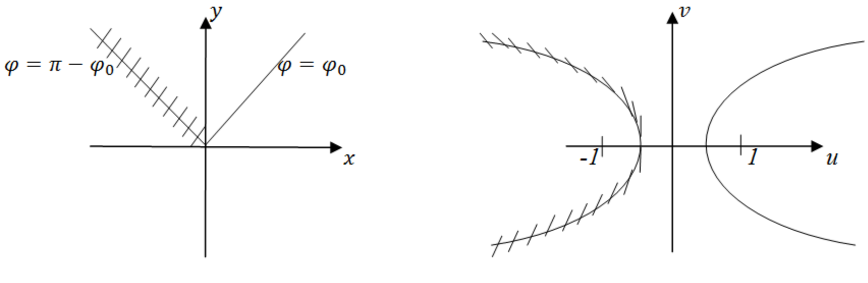

Рисунок 3.7

Якщо $\varphi_0=0$, то із рівності (3.6) випливає:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \\ v = 0. \end{cases}$$

При зміні r від 0 до 1 відповідна точка w буде пробігати по дійсній осі від ∞ до 1, а при зміні r від 1 до ∞ відповідна точка w буде пробігати по дійсній осі від 1 до ∞. При $\varphi = \pi$ двічі буде пробігатися відрізок $(-\infty; -1]$. Аналогічно аналізується випадок $-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < 0$.

Звідси знову одержуємо, що верхня півплощина відображається у всю комплексну площину з розрізами по проміжках дійсної осі $(-\infty; -1]$ і [1;∞). Нижня півплощина відображається у всю комплексну площину з розрізами по проміжках дійсної осі $(-\infty; -1]$ і [1;∞).

Відзначимо, що будь-яке коло із центром у початку координат є ортогональним до будь-якого променя, що виходить із початку координат. Тому їх образи – еліпси і гіперболи – будуть також ортогональними.

Приклад 10. Знайти образ області $\{z: 1 < |z| < 2\}$ при відображенні $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Розв'язування. Коло $|z| = 2$ відображається у еліпс $\frac{u^2}{\frac{25}{16}} + \frac{v^2}{\frac{9}{16}} = 1$, а коло $|z| = 1$ відображається у відрізок $[-1; 1]$. Тому образом даної області буде внутрішність еліпса

$$\frac{u^2}{\frac{25}{16}} + \frac{v^2}{\frac{9}{16}} = 1$$

за винятком точок відрізка $[-1; 1]$ дійсної осі.

Приклад 11. Знайти область, на яку функція $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ відображає круг $\{z: |z| < 1\}$ з розрізом по відрізку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Розв'язування. Функція Жуковського однолисто відображає внутрішність одиничного кола на всю комплексну площину з розрізом по відрізку $[-1; 1]$. Для точок відрізка $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ $\varphi = \arg z = 0$. Тому із рівностей (3.6) випливає:

$\begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \\ v = 0. \end{cases}$ $r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ і $u \in \left[1, \frac{5}{4}\right]$. Отже, функція $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ відображає круг $\{z: |z| < 1\}$ з розрізом по відрізку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ на всю комплексну площину з розрізом по відрізку $\left[-1; \frac{5}{4}\right]$.

3.6.4. Відображення, що здійснюються показниковою функцією

Означення 3.5. Функція $w = e^z$ називається *показниковою*.

Виділимо дійсну та уявну частини показникової функції:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Функція $w = e^z$ у всій комплексній площині відмінна від нуля: $e^z \neq 0$; $|e^z| = e^x$; $Arg\, e^z = y$. Оскільки $w = u + iv$, то для показникової функції маємо такі формули переходу:

$$\begin{cases} u = e^x \cos y, \\ v = e^x \sin y \end{cases} \qquad (3.7)$$

– формули зв'язку між координатами (u, v) та (x, y).

Показникова функція здійснює конформне відображення у всій комплексній площині, оскільки

$$w' = (e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z \neq 0.$$

Оскільки функції $\cos y$ і $\sin y$ періодичні з періодом 2π, то функція e^z – періодична з періодом $2\pi i$.

Звідси випливає, що показникова функція буде однолистою в області G тоді і тільки тоді, коли в цій області не буде пар різних точок z_1 і z_2, для яких

$$z_1 - z_2 = 2\pi i n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Прикладом такої області є довільна смуга комплексної площини із сторонами, що паралельні до дійсної осі і шириною 2π:

$$G = \{z: \alpha < Im\, z \leq \alpha + 2\pi, \alpha \in R\}.$$

Із формул зв'язку (3.7) випливає, що образом горизонтальної прямої $y = y_0$ при відображенні $w = e^z$ є промінь $\{w: \mathrm{Arg}\, w = y_0\}$, а образом частини вертикальної прямої $x = x_0$, що належить смузі G, є коло $|w| = e^{x_0}$.

При відображені, що здійснюється показниковою функцією, смуга $\{z: \alpha < Im\, z < \alpha + 2\pi, \alpha \in (-\pi; \pi]\}$ переходить у всю комплексну площину з розрізом по промені $\{w: \operatorname{Arg} w = \alpha\}$,

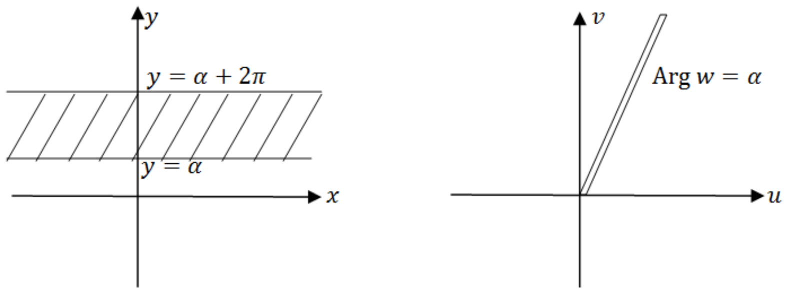

Рисунок 3.8

зокрема, смуга $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ переходить у всю комплексну площину з розрізом від 0 до $+\infty$ по додатній частині дійсної осі.

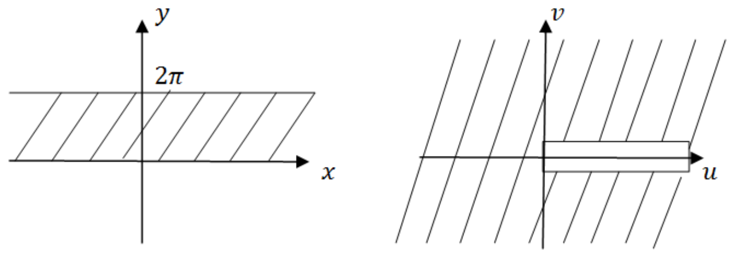

Рисунок 3.9

При показниковому відображені смужка $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ переходить у всю комплексну площину з розрізом по від’ємній частині дійсної осі.

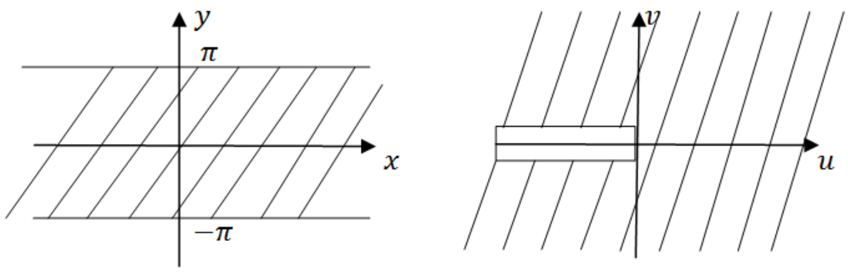

Рисунок 3.10

При показниковому відображені смужка $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ переходить у всю верхню півплощину.

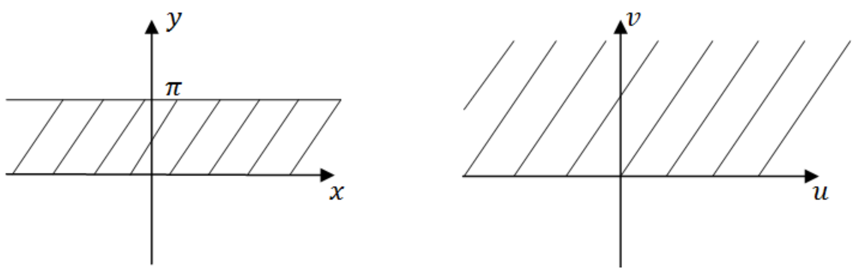

Рисунок 3.11

Приклад 12. Смугу $D = \{z : Re\, z > 0, 0 < Im\, z < \pi\}$ відобразити на верхню півплощину.

Розв'язування. Функцією $\zeta = e^z$ задана смуга відобразиться у область $G = \{\zeta : |\zeta| > 1,\ 0 < \arg \zeta < \pi\} = \{\zeta : |\zeta| > 1, Im\, \zeta > 0\}$, , а область G функцією Жуковського $w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$ відображається у верхню півплощину. Поєднуючи ці два відображення, одержимо необхідне відображення $w = \frac{1}{2}\left(e^z + \frac{1}{e^z}\right)$ або $w = \operatorname{ch} z$.

3.6.5. Відображення, що здійснюються тригонометричними функціями

Тригонометричні функції

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

визначені у пункті 2.4.3.

Кожна функція $\sin z$, $\cos z$ неперервна в $\mathbb{C}$ і має основний період 2π; $\sin z$ є непарною і перетворюється в нуль у точках $z = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\cos z$ є парною і перетворюється в нуль у точках $z = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Функції $\sin z$ і $\cos z$ є аналітичні для всіх комплексних чисел, при цьому

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z, z \in \mathbb{C}.$$

Функція $w = \sin z$ задає конформне відображення у всіх точках комплексної площини, крім точок $z = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, а функція $w = \cos z$ – у всіх точках комплексної площини, крім точок $z = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Знайдемо області однолистості функції $w = \sin z$. Із рівності

$$\sin z_1 - \sin z_2 = 2 \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \cos \frac{z_1 + z_2}{2}$$

випливає, що при $z_1 \neq z_2$ $\sin z_1 - \sin z_2 \neq 0$, якщо

$$\begin{cases} z_1 - z_2 \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ z_1 + z_2 \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тобто, відображення є однолистим на кожній множині точок комплексної площини, яка не містить точок $z_1 \neq z_2$, для яких $z_1 - z_2 = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$ або $z_1 + z_2 = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Зокрема, відображення $w = \sin z$ є однолистим у смузі $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$.

Для функції $w = \cos z$ із рівності

$$\cos z_1 - \cos z_2 = -2 \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \sin \frac{z_1 + z_2}{2}$$

випливає, що при $z_1 \neq z_2 \quad \cos z_1 - \cos z_2 \neq 0$, якщо

$$\begin{cases} z_1 - z_2 \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ z_1 + z_2 \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тобто, функція $w = \cos z$ є однолистою на кожній множині точок комплексної площини, яка не містить точок $z_1 \neq z_2$, для яких $z_1 - z_2 = 2\pi k,$ $k \in \mathbb{Z},$ або $z_1 + z_2 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Зокрема, функція $w = \cos z$ є однолистою у смузі $0 < \operatorname{Re} z < \pi$.

Розглянемо відображення $w = \sin z,\ z \in \left\{z \in \mathbb{C}: -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Виділимо дійсну та уявну частини функції $w = \sin z$:

$$w = \sin z = \sin(x + iy) =$$

$$= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i\ \cos x \operatorname{sh} y$$

Оскільки $w = u + iv$, то для функції $w = \sin z$ маємо такі формули переходу:

$$\begin{cases} u = \sin x \operatorname{ch} y, \\ v = \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$$

– формули зв'язку між координатами (u, v) та (x, y).

У смузі $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ зафіксуємо $y = y_0 > 0$. Тоді

$$\begin{cases} u = \sin x \operatorname{ch} y_0, \\ v = \cos x \operatorname{sh} y_0, \end{cases} \quad \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 y_0} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 y_0} = 1.$$

Якщо точка рухається по відрізку прямої $y = y_0 > 0$ так, що $x = \operatorname{Re} z$ змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то відповідна точка (u, v) буде пробігати верхню половину еліпса від лівої вершини до правої. Якщо ж тепер у смузі $-\frac{\pi}{2} <$ $\operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ розглянемо симетричний відносно дійсної осі відрізок прямої $y =$

$-y_0$, то при зміні $x = \operatorname{Re} z$ від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то відповідна точка (u, v) буде пробігати нижню половину того ж еліпса від лівої вершини до правої. Якщо точка пробігає відрізок прямої $y = 0$ від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то відповідна точка (u, v) буде пробігати по дійсній осі від -1 до 1.

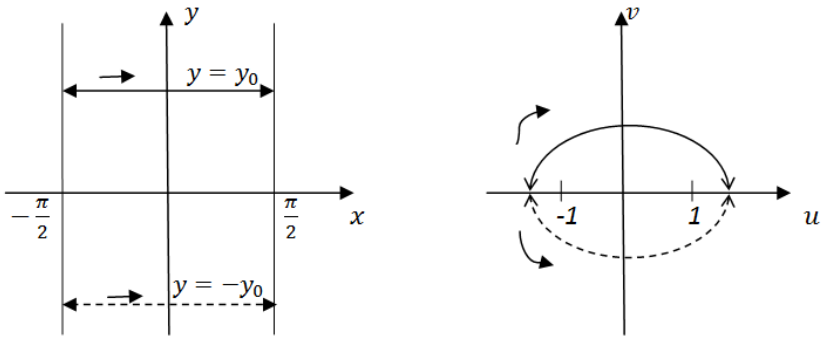

Рисунок 3.12

Звідси випливає, що функція $w = \sin z$ область

$$\left\{z\colon -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, Im\, z > 0\right\}$$

відображає на верхню півплощину, область

$$\left\{z\colon -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, Im\, z < 0\right\}$$

відображає на нижню півплощину, а відрізок дійсної осі

$$\left\{z\colon -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, Im\, z = 0\right\}$$

на $\{w\colon -1 < \operatorname{Re} w < 1, Im\, w = 0\}$.

Отже, функція $w = \sin z$ смугу $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ відображає у всю розширену комплексну площину з розрізами по променях $(-\infty; -1]$ та $[1; \infty)$ дійсної осі.

В смужці $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ зафіксуємо $x = x_0 > 0$, тоді

$$\begin{cases} u = \sin x_0 \operatorname{ch} y, \\ v = \cos x_0 \operatorname{sh} y, \end{cases} \quad \frac{u^2}{\sin^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1.$$

Тому, пряма $x = x_0$ переходить у праву вітку гіперболи $\frac{u^2}{\sin^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1$, а симетрична пряма $x = -x_0$ – у ліву вітку тієї ж гіперболи. Пряма $x = 0$ відображається в уявну вісь.

Відображення $w = \sin z$ можна подати у вигляді кількох простих відображень – лінійного, показникового, функції Жуковського. Із рівності

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{iz}}{i} + \frac{i}{e^{iz}}\right)$$

одержуємо, що функцію $w = \sin z$ можна розглядати як суперпозицію функцій: $w_1 = iz$; $w_2 = e^{w_1}$; $w_3 = \frac{w_2}{i}$; $w = \frac{1}{2}\left(w_3 + \frac{1}{w_3}\right)$.

Оскільки $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$, то функцію $\cos z$ можна розглядати як суперпозицію функцій $\sin z$ та лінійної функції, а її властивості є аналогічними до властивостей функції $\sin z$.

Розглянемо відображення $w = \cos z$.

Знайдемо образ смуги $\{z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ при відображенні $w = \cos z$. Для цього функцію

$$w = \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

зобразимо у вигляді суперпозиції трьох функцій: 1) $w_1 = iz = e^{i\frac{\pi}{2}}z$; 2) $w_2 = e^{w_1}$; 3) $w = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$.

Перше відображення здійснює поворот комплексної площини навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$ проти напряму руху годинникової стрілки. При цьому вертикальна смуги $\{z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ відобразиться на горизонтальну смугу смуги $\{w_1: 0 < Im\, w_1 < \pi\}$. Використовуючи властивості показникової функції встановлюємо, що смуга $\{w_1: 0 < Im\, w_1 < \pi\}$ функцією $w_2 = e^{w_1}$ відобразиться у верхню півплощину $\{w_2: \operatorname{Im} w_2 > 0\}$. Останнє відображення здійснюється за допомогою функції Жуковського $w = \frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right)$, для якої верхня півплощина є областю однолистості, і яка відображає верхню півплощину у комплексну площину $\mathbb{C}$ з розрізами $(-\infty;\ -1]$ та $[1;\ +\infty)$. Ці процедури зображені на рисунку 3.13.

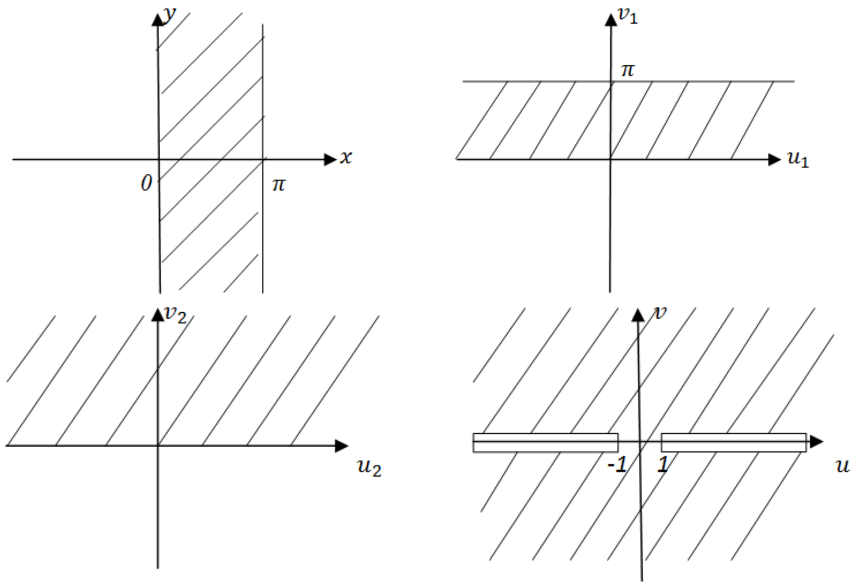

Рисунок 3.13

Приклад 13. Знайти образ області $D = \left\{z: -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\right\}$ при відображенні $w = \cos z$.

Розв'язування. Оскільки

$$u + iv = \cos(x + iy) = \cos x \ \cos iy - \sin x \sin iy =$$
$$= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

то формули зв'язку між координатами (u, v) та (x, y) мають вигляд:

$$u = \cos x \operatorname{ch} y\,, v = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

У смузі $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ зафіксуємо $y = y_0 > 0$. Тоді

$$\begin{cases} u = \cos x \operatorname{ch} y_0, \\ v = -\sin x \operatorname{sh} y_0, \end{cases} \quad \frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 y_0} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 y_0} = 1.$$

Якщо точка рухається по відрізку прямої $y = y_0 > 0$ так, що $x = \operatorname{Re} z$ змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то відповідна точка (u, v) буде пробігати праву половину еліпса від його верхньої вершини до нижньої. При $y_0 \to 0 + 0$ ці півеліпси будуть стягуватись до відрізка $\{0 \le u \le 1, v = 0\}$, у який відображається відрізок $\left\{-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, y = 0\right\}$.

Із формул зв'язку $u = \cos x \operatorname{ch} y\,, v = -\sin x \operatorname{sh} y$ одержуємо, що півпрямі $\left\{x = -\frac{\pi}{2}, y > 0\right\}$ і $\left\{x = \frac{\pi}{2}, y > 0\right\}$ відображаються відповідно в півпрямі $\{u = 0, v > 0\}$ і $\{u = 0, v < 0\}$.

Отже, образом області D при відображенні $w=\cos z$ буде права півплощина з розрізом по відрізку $\{0\le u\le 1, v=0\}$:

$$\{w: Re\, w>0\}\backslash\{w: 0\le Re\, w\le 1,\ Im\, w=0\}.$$

3.7. Вправи до розділу 3

3.1. Перевірити виконання умов Коші-Рімана для функцій z^n, e^z, $\cos z$ і довести, що $(z^n)'=nz^{n-1}$, $(e^z)'=e^z$, $(\cos z)'=-\sin z$.

3.2. Знайти похідні функції:

$$a)\ \operatorname{tg} z;\ \ b)\ \frac{e^z+1}{e^z-1};\ \ c)\ (e^z+e^{-z})^2;\ \ d)\ \frac{\cos z}{\cos z-\sin z}.$$

3.3. Знайти сталі a, b, c, при яких функція $f(z)$ буде аналітичною:

a) $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$;

b) $f(z)=x^2+ax+by^2+i(2xy+cy)$.

3.4. Знайти множини точок, у яких функція $f(z)$ буде моногенною:

$$a)\ f(z)=\frac{z}{|z|};\ \ b)\ f(z)=(\bar{z})^2;\ \ c)\ f(z)=|z|^2;\ \ d)\ f(z)=x^2+iy^2;$$

$$e)\ f(z)=z\,Re\, z.$$

3.5. Знайти аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ за її дійсною або уявною частиною:

$$a)\ u=x^2-y^2+x;$$

$$b)\ u=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$c)\ u=\ln(x^2+y^2);$$

$$d)\ v=3+x^2-y^2-\frac{1}{2}\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$e)\ v=x^3-3xy^2;$$

$$f)\ v=\ln(x^2+y^2)+x-2y.$$

3.6. Знайти лінійне відображення, яке трикутник з вершинами в точках $0,\ 1,\ i$ відображає на трикутник з вершинами $0,\ 2,\ 1+i$.

3.7. Знайти лінійне відображення, яке круг $|z+1-i|<3$ відображає на круг $|w-2|<1$, причому вертикальний діаметр переходить у горизонтальний.

3.8. Знайти образ півплощини $Re\, z > 0$ $(Im\, z > 0)$ при відображенні $w = (1-i)z + 2$.

3.9. Знайти образ круга $|z+i| < 1$ при відображенні $w = 2iz + 4$.

3.10. Знайти образи ліній $x^2 + y^2 = ax,\ x - y = 1,\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ при відображенні $w = \frac{1}{z}$.

3.11. Знайти образ смуги $0 < Re\, z < 1$ при відображенні $w = \frac{z-1}{z}$.

3.12. Знайти образ області D при відображенні $w = f(z)$:

$$a)\ D = \{z: |z| < 1, Im\, z > 0\},\quad w = \frac{2z - i}{2 + iz};$$

$$b)\ D = \left\{z: 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\},\quad w = \frac{z}{z-1};$$

$$c)\ D = \{z: \mathbb{C}\backslash[-2;0]\},\quad w = \frac{z+2}{1-z};$$

$$d)\ D = \{z: Re\, z < 1\},\quad w = \frac{z}{1 + i - z}.$$

3.13. Знайти точки, що симетричні до точки $2 + i$ відносно кіл:

$$a)\ |z| = 1;\quad b)\ |z - i| = 3;\quad c)\ |z - 1 - 2i| = 2.$$

3.14. Знайти дробово-лінійне відображення, яке три задані точки відображає у відповідні три точки: а) $-1,\ i,\ 1+i$ у $0,\ 2i,\ 1-i$; b) $-1,\ i,\ 1+i$ у $i,\ \infty,\ 1$; c) $-1,\ \infty,\ i$ у $i,\ 1,\ 1+i$.

3.15. Знайти відображення верхньої півплощини на себе, щоб виконувались умови: $w(0) = 1,\ w(1) = 2,\ w(2) = \infty$.

3.16. Відобразити $Im\, z > 0$ в круг $|w| < 1$ так, щоб

а) $w(i) = 0,\quad \arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}$;

b) $w(2i) = 0,\quad \arg w'(2i) = \frac{\pi}{2}$.

3.17. Відобразити круг $|z| < 2$ на $Re\, w > 0$ так, щоб $w(0) = 1,\quad \arg w'(0) = \frac{\pi}{2}$.

3.18. Відобразити круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, щоб $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

$$\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

3.19. Дробово-лінійною функцією відобразити $|z| > 1$ на $|w - i| < 1$.

3.20. Знайти образ області D при відображенні $w = e^z$:

a) $D = \{z: Re\, z < 0,\ 0 < Im\, z < \pi\}$;

b) $D = \{z: 1 < Re\, z < 3,\ 0 < Im\, z < \pi\}$.

3.21. Знайти образ області $\left\{z: 0 < Re\, z < \frac{\pi}{2},\ Im\, z > 0\right\}$ при відображенні $w = \cos z$.

3.22. Знайти образ області $\{z: 0 < Re\, z < \pi\}$ при відображенні $w = \cos z$.

3.23. Знайти образ області $\left\{z: -\frac{1}{2} < Re\, z < \frac{1}{2}\right\}$ при відображенні $w = \sin z$.

3.24. Відобразити на $Im\, w > 0$ кожну із областей

$a)$ $\{z: 0 < Re\, z < a, \quad a > 0\}$; $b)$ $\{z: Re\, z < 1, \quad 0 < Im\, z < h\}$;

$c)$ $\{z: |z-1| > 1, |z+1| > 1\}$; $d)$ $\{z: |z-1| > 1, |z| < 2\}$.

3.25. Знайти області, на які функція Жуковського відображає області:

a) $\{z: 1 < |z| < R,\ Im\, z > 0\}$;

b) $\left\{z: \frac{1}{R} < |z| < R, Re\, z > 0, Im\, z > 0\right\}$;

c) круг $|z| < 1$ з розрізом по відрізку $[a, 1]$, $a \in (-1,1)$ (розглянути випадки $a > 0$ і $a < 0$).

3.26. Круг $|z| < 1$ з розрізом по відрізку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ відобразити на верхню півплощину.

Розділ 4. Інтеграл від функції комплексної змінної

4.1. Означення інтеграла, зв'язок із криволінійними інтегралами

Нехай в комплексній площині $\mathbb{C}$ задана спрямлювана жорданова лінія $L = \{z = z(t)\colon\ t \in [\alpha, \beta]\}$ з початком в точці $z(\alpha)$ та кінцем в точці $z(\beta)$. Цим само ми встановили певний напрям на лінії L, який вважаємо додатнім. Лінію з протилежним напрямом позначимо L^{-} або $-L$. Якщо лінія замкнена, то $z(\alpha) = z(\beta)$.

Нехай в кожній точці цієї лінії задана функція $w = f(z)$.

Розглянемо довільне розбиття $T = \{\alpha = t_0, t_1, \dots, t_n = \beta\}$ проміжку $[\alpha, \beta]$. Тоді точками $z_k = z(t_k)$, $k = 0,1, \dots, n$, лінія L розіб'ється на частини $L_k = \{z = z(t)\colon\ t \in [t_{k-1}, t_k]\}$. На кожному проміжку $[t_{k-1}, t_k]$ виберемо довільну точку τ_k і позначимо $\zeta_k = z(\tau_k) \in L_k$. Нехай $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $d = \max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta z_k|$ – діаметр розбиття лінії L. Побудуємо суму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \Delta z_k, \tag{4.1}$$

її називають інтегральною сумою для функції $f(z)$ по лінії L відносно заданого розбиття лінії L.

Функція $f(z)$ називається інтегровною по лінії L якщо існує $I \in \mathbb{C}$ таке, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого розбиття лінії L із діаметром розбиття $d < \delta$ і при будь-якому виборі точок ζ_k, виконується нерівність $|\sigma - I| < \varepsilon$. Число I називається інтегралом від функції $f(z)$ по (уздовж) лінії L і позначається:

$$I = \int_L f(z) dz.$$

$$I = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \Delta z_k = \int_L f(z) dz. \tag{4.2}$$

Лінія L називається *шляхом інтегрування*.

Із визначення інтеграла випливає, що для довільної простої лінії $\int_L dz = z(\beta) - z(\alpha)$, а для замкнутої простої лінії $\int_L dz = 0$.

Теорема 4.1. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ неперервна на лінії L, то вона інтегрована уздовж лінії L і

$$\int_L f(z)dz =$$

$$= \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy. \qquad (4.3)$$

Доведення. Нехай $z = x + iy$, $u(x, y) = Ref(z)$, $v(x, y) = Imf(z)$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_k = x_k + iy_k$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. Тоді

$$f(\zeta_k)\Delta z_k = \big(u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)\big)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= (u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k) + i(v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k),$$

а інтегральна сума (4.1) запишеться у вигляді

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = Re\,\sigma + iIm\,\sigma, \qquad (4.4)$$

де

$$Re\,\sigma = \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k),$$

$$Im\,\sigma = \sum_{k=1}^{n} (v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k).$$

$Re\,\sigma$ є інтегральною сумою для криволінійного інтеграла

$$I_1 = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy,$$

а $Im\,\sigma$ є інтегральною сумою для криволінійного інтеграла

$$I_2 = \int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

Оскільки функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ неперервні на L, то ці інтеграли існують і $\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} Re\,\sigma = I_1$, $\lim_{d\to 0} Im\,\sigma = I_2$. Тому існує $\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sigma = I$, тобто $f(z)$ інтегрована вздовж лінії L. Перейшовши до границі у (4.4) при $d \to 0$, одержимо (4.3). ■

Теорема 4.2. Якщо функція $f(z)$ неперервна на гладкій жордановій лінії $L = \{z = z(t)\colon\ t \in [\alpha,\beta]\}$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)dt. \tag{4.5}$$

Доведення. Нехай $z(t) = x(t) + iy(t)$. Тоді лінія L задається рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha,\beta]$, де функції $x(t)$ і $y(t)$ мають на $[\alpha,\beta]$ неперервні похідні. Із (4.3) і правила обчислення криволінійних інтегралів, одержуємо

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big(u\big(x(t),y(t)\big)x'(t) - v\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)\,dt +$$

$$+i\int_\alpha^\beta \Big(v\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + u\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big(u\big(x(t),y(t)\big) + iv\big(x(t),y(t)\big)\Big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)dt.$$

■

Відзначимо, що теорема буде правильною (буде правильною рівність (4.5)) і в разі кусково-гладкої лінії L.

Обчислення інтеграла (4.5) зводиться до обчислення інтеграла вигляду $\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt$, де $\varphi(t)$ комплекснозначна функція дійсного аргументу. Нехай функція $\varphi(t) = a(t) + ib(t)$ є неперервна на $[\alpha,\beta]$ і $\Phi(t)$ є первісною для $\varphi(t)$ на $[\alpha,\beta]$ ($\Phi'(t) = \varphi(t),\ t \in [\alpha,\beta]$). Тоді

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

тобто справедлива формула Ньютона-Лейбніца.

Приклад 1. Нехай в комплексній площині $\mathbb{C}$ задана спрямлювана жорданова лінія $L = \{z = z(t) = x(t) + iy(t)\colon\ t \in [\alpha, \beta]\}$ з початком в точці $z(\alpha)$ та кінцем в точці $z(\beta)$. Знайти $\int_L \ zdz$.

Розв’язування.

$$\int_L \ zdz = \int_\alpha^\beta \big(x(t) + iy(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big(x(t)x'(t) - y(t)y'(t) + i\big(x(t)y'(t) + x'(t)y(t)\big)\Big)\,dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\big(x(t)\big)^2 - \frac{1}{2}\big(y(t)\big)^2 + i\big(x(t)y(t)\big)\right)\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= \frac{1}{2}\big(x(t) + iy(t)\big)^2\Big|_\alpha^\beta = \frac{1}{2}\big(z(t)\big)^2\Big|_\alpha^\beta = \frac{1}{2}\big(z(\beta)\big)^2 - \frac{1}{2}\big(z(\alpha)\big)^2.$$

Якщо лінія замкнена, $z(\alpha) = z(\beta)$, то $\int_L \ zdz = 0$.

Приклад 2. Нехай $L = \{z\colon |z - z_0| = r > 0\}$ – коло, що обходиться проти годинникової стрілки, n – ціле. Знайти

$$\int_L \ \frac{1}{(z - z_0)^n}dz.$$

Розв’язування. Коло $|z - z_0| = r$ можна подати у вигляді $z = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Тоді

$$\int_L \ \frac{1}{(z - z_0)^n}dz = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{(re^{it})^n}dt = \frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)t}dt =$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} (\cos(n-1)t - i\sin(n-1)t)dt.$$

Якщо $n = 1$, то

$$\int_L \ \frac{dz}{z - z_0} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i,$$

а якщо $n \ne 1$, то

$$\int_L \ \frac{1}{(z - z_0)^n}dz = \frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} (\cos(n-1)t - i\sin(n-1)t)dt =$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}}\left(\frac{\sin(n-1)t}{n-1}\Big|_0^{2\pi} + i\frac{\cos(n-1)t}{n-1}\Big|_0^{2\pi}\right) = 0.$$

Отже,

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{(z-z_0)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{при } n = 1, \\ 0, & \text{при } n \neq 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Відзначимо, що рівність (4.6) будемо часто використовувати.

Із означення інтеграла, теореми 4.1 і властивостей криволінійних інтегралів випливають наступні властивості.

1.

$$\int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz.$$

2. Якщо функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ інтегровні на L, то для довільних комплексних сталих a_1 і a_2 функція $a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z)$ буде інтегровна на L і

$$\int_L \big(a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z)\big)dz = a_1\int_L f_1(z)dz + a_2\int_L f_2(z)dz.$$

3. Нехай функція $f(z)$ неперервна на кусково-гладкій лінії L і лінія L розбита на частини L_1 і L_2, тоді

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz.$$

4.

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \leq \int_L |f(z)||dz|,$$

де в правій частині є криволінійний інтеграл по довжині дуги, $|dz| = dl$ – диференціал дуги. Якщо $|f(z)| \leq M$ на лінії L із довжиною l, то

$$\left|\int_L f(z)dz\right| \leq Ml.$$

4.2. Інтегральна теорема Коші

Теорема 4.3. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області G, тоді для довільної спрямлюваної замкнутої жорданової лінії L, яка разом із внутрішністю лежить в G,

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

Доведення. Область, що обмежена лінією L, позначимо G^*. Із рівності (4.3), неперервності в $\overline{G^*}$ частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ і формули Гріна-Остроградського одержимо

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy =$$

$$= \iint_{G^*}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_{G^*}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

Функція $f(z)$ аналітична в області G, отже виконуються умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Тому $\int_L f(z)dz = 0$. ■

Наслідок 4.1. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області G, то інтеграли по довільних двох спрямлюваних жорданових лініях, які лежать в G і сполучають дві точки цієї області, рівні.

Теорема 4.4. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області $G \subset \mathbb{C}$, що обмежена спрямлюваною замкнутою жордановою лінією ∂G, неперервна в $\bar{G}$, то

$$I = \int_{\partial G} f(z)dz = 0.$$

Доведення. Нехай функція $f(z)$ неперервна на спрямлюваній замкнутій жордановій лінії γ, тоді

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \omega_f\big(d(\gamma)\big)|\gamma|, \tag{4.7}$$

де $|\gamma|$ – довжина γ, $d(\gamma)$ – діаметр γ, $\omega_f\big(d(\gamma)\big) = \sup\limits_{z_k \in \gamma, k=1,2} |f(z_1) - f(z_2)|$ – модуль неперервності функції $f(z)$ на лінії γ. Нагадаємо, що модулем неперервності функції $f(z)$ на множині $D \subset \mathbb{C}$ називається величина

$$\omega_f(\delta) = \sup_{z_k \in D, k=1,2: |z_1 - z_2| \leq \delta} |f(z_1) - f(z_2)|.$$

Оскільки лінія γ замкнута, то $\int_\gamma \, dz = 0$ і для довільної точки $z_0 \in \gamma$

$\int_\gamma \, f(z)dz = \int_\gamma \, \big(f(z) - f(z_0)\big)dz$. Врахувавши, що $|f(z) - f(z_0)| \leq \omega_f\big(d(\gamma)\big)$, одержуємо (4.7).

Нехай $\delta > 0$ таке, що $\delta < \frac{1}{3\sqrt{2}}d$, де d – діаметр ∂G. Прямими $\{z: Re\, z = k\delta\}$ і $\{z: Im\, z = k\delta\}$, $k \in \mathbb{Z}$, розіб'ємо комплексну площину $\mathbb{C}$ на відкриті квадрати K_n, $n = 1,2,\ldots$ із діаметрами $\delta\sqrt{2}$. Ці квадрати повністю покривають множину G. Нехай A – множина всіх номерів n, для яких $\overline{K_n}$ повністю лежить у G, B – множина всіх номерів n, для яких $\overline{K_n}$ має принаймні одну спільну точку із ∂G і $K_n \cap G \neq \emptyset$. Множини A і B є скінченні, бо множина G обмежена.

Зобразимо інтеграл I у вигляді двох сум:

$$I = \sum_{n \in A} \int_{\partial K_n} f(z)dz + \sum_{n \in B} \int_{\partial (G \cap K_n)} f(z)dz. \quad (4.8)$$

У першу суму входять інтеграли по межі квадратів, які повністю лежать у області G, тому за теоремою 4.3 ці інтеграли рівні нулю. Отже,

$$\sum_{n \in A} \int_{\partial K_n} f(z)dz = 0. \quad (4.9)$$

Для кожного $n \in B$ межа перерізу $G \cap K_n$ складається із $\partial G \cap \overline{K_n}$ і точок на ∂K_n:

$$\partial(G \cap K_n) = (\partial G \cap \overline{K_n}) \cup \partial K_n.$$

Тому

$$\sum_{n\in B}|\partial(G\cap K_n)| \le \sum_{n\in B}|\partial G\cap \overline{K_n}| + \sum_{n\in B}|\partial K_n|, \tag{4.10}$$

$$\sum_{n\in B}|\partial G\cap \overline{K_n}| = |\partial G|. \tag{4.11}$$

Для кожного $K_n, n \in B$ розглянемо квадрат K_n' із стороною 3δ і тим само центром, що і K_n , який так само розміщений і перетинається із ∂G. Оскільки $\delta < \frac{1}{3\sqrt{2}}d$, то лінія ∂G виходить за межу квадрата K_n', тому довжина частини ∂G, що лежить в K_n',

$$|\partial G\cap K_n'| \ge \delta. \tag{4.12}$$

Додаючи нерівності (4.12) для всіх $n \in B$ і враховуючи, що у сумі

$$\sum_{n\in B}|\partial G\cap K_n'|$$

кожна із довжин $|\partial G\cap \overline{K_n}|$, як доданок, повторюється не більше 9 разів, із (4.11) одержимо

$$\sum_{n\in B}|\partial G\cap K_n'| \le 9|\partial G|.$$

Оскільки $|\partial K_n| = 4\delta$, то із (4.12) і попередньої нерівності

$$\sum_{n\in B}|\partial K_n| \le 4\sum_{n\in B}|\partial G\cap K_n'| \le 36|\partial G|. \tag{4.13}$$

Із (4.10), (4.11), (4.13) одержуємо

$$\sum_{n\in B}|\partial(G\cap K_n)| \le 37|\partial G|. \tag{4.14}$$

До межі кожної компоненти $G\cap K_n$ застосуємо нерівність (4.7), у якій перший множник у правій частині замінимо модулем неперервності $\omega_f(\delta\sqrt{2})$ функції $f(z)$ на множині $\overline{K_n}$. Тоді

$$\left|\sum_{n\in B}\int_{\partial(G\cap K_n)} f(z)dz\right| \le \sum_{n\in B}\left|\int_{\partial(G\cap K_n)} f(z)dz\right| \le$$

$$\leq \sum_{n\in B} \omega_f\big(\delta\sqrt{2}\big)\,|\partial(G\cap K_n)| \leq 37|\partial G|\omega_f\big(\delta\sqrt{2}\big). \qquad (4.15)$$

Із (4.8), (4.9) і (4.15), одержуємо

$$|I| = \left|\int_{\partial G} f(z)dz\right| \leq 37|\partial G|\omega_f\big(\delta\sqrt{2}\big).$$

Функція $f(z)$ неперервна на $\bar{G}$, тому рівномірно неперервна на $\bar{G}$, звідси випливає, що величина $\omega_f\big(\delta\sqrt{2}\big) \to 0$ при $\delta \to 0$. Отже, $\int_{\partial G} f(z)dz = 0$. ■

Теорема 4.5. Нехай $G \in \mathbb{C}$ є $(m+1)$–зв'язна $(m \in N)$ область, що обмежена скінченною кількістю замкнутих спрямлюваних жорданових ліній Γ_0 і $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, які лежать всередині Γ_0. І нехай $f(z)$ аналітична в області G і неперервна в $\bar{G}$. Тоді

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 0.$$

Доведення. Проведемо в G розрізи по кусково-гладких жорданових лініях $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, що попарно не перетинаються, і сполучають відповідно Γ_0 і Γ_1, Γ_1 і Γ_2,…, Γ_{m-1} і Γ_m.

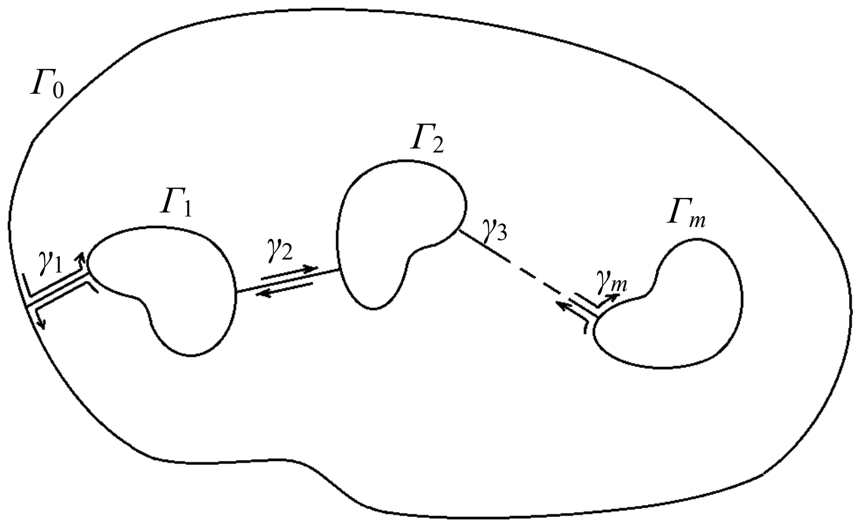

Рисунок 4.1

Тоді область $D = G \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i$ буде однозв'язною і для неї виконуються умови теореми 4.4, тому

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

При обході межі області D кожна із ліній $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ обходиться два рази у протилежних напрямках і $\int_{\gamma_i} f(z)dz + \int_{\gamma_i^-} f(z)dz = 0$. Тому

$$0 = \int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\partial G} f(z)dz + \int_{\bigcup_{i=1}^{m}\gamma_i} f(z)dz + \int_{\bigcup_{i=1}^{m}\gamma_i^-} f(z)dz =$$

$$= \int_{\partial G} f(z)dz + \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{\gamma_i} f(z)dz + \int_{\gamma_i^-} f(z)dz\right) = \int_{\partial G} f(z)dz.$$

■

Наслідок 4.2. Якщо виконуються умови теореми 4.5 і лінії Γ_0 і $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ обходяться проти годинникової стрілки, то

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\Gamma_m} f(z)dz,$$

а при $m = 1$

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz.$$

Для області G межа $\partial G = \Gamma_0 \cup (-\Gamma_1 \cup \dots \cup -\Gamma_m)$. Тому наслідок випливає із рівності

$$\int_{\partial G} f(z)dz = \int_{\Gamma_0} f(z)dz + \int_{-\Gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{-\Gamma_m} f(z)dz =$$

$$= \int_{\Gamma_0} f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz - \dots - \int_{\Gamma_m} f(z)dz = 0.$$

4.3. Інтеграл типу Коші

Нехай функція $f(z)$ неперервна в області $G \subset \mathbb{C}$ (зв'язній) і нехай L – довільна спрямлювана жорданова лінія, що лежить в G. Тоді інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = F(z), \qquad (4.16)$$

де $z \in G\backslash L$, називають *інтегралом типу Коші,* а функція $f(z)$ – *щільністю* інтегралу типу Коші.

Теорема 4.6. Функція $F(z)$ (інтеграл типу Коші) є аналітичною в області $G\backslash L$ і

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta. \qquad (4.17)$$

Інтеграл типу Коші має в області $G\backslash L$ похідні будь-якого порядку n, причому

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta. \qquad (4.18)$$

Кожна із похідних є аналітичною в області $G\backslash L$ функцією.

Доведення. Множина L – замкнена і обмежена, тому існує M, що для всіх $z \in L$, $|f(z)| \leq M$. Нехай $z_0 \in G$, $2d = \rho(z_0, L) = \min_{z\in L}\rho(z_0, z)$.

Розглянемо окіл точки z_0, який не містить точок лінії L. Перейдемо з точки z_0 в точку $z_0 + h \in G$ так, щоб ми були всередині круга з центром в точці z_0 і радіусом d. Тоді $|h| < d$ і за означенням

$$F'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h},$$

$$\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i h}\left(\int_L \frac{f(z)}{z - z_0 - h}dz - \int_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)}dz.$$

Розглянемо різницю

$$\rho = \frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}dz =$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2}dz.$$

Оскільки $z \in L$, а $2d = \rho(z_0, L)$ і $|h| < d$, то $|z - z_0| \geq 2d$, $|z - z_0 - h| \geq d$. Крім того, для всіх $z \in L$ $|f(z)| \leq M$. Тоді одержимо

$$|\rho| = \frac{|h|}{2\pi}\int_L \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^2|z - z_0 - h|}|dz| \leq \frac{M|h|}{2\pi d(2d)^2}\xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Це означає, що функція $F(z)$ має похідну в будь-якій точці області $G\backslash L$ і похідна знаходиться за формулою (4.17).

Формула (4.18) правильна при $n = 1$. Припустимо, що (4.18) правильна для $n-1$ і доведемо її справедливість для n.

$$F^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta.$$

Нехай $z_0 \in G$, $2d = \rho(z_0, L)$. Тоді

$$F^{(n)}(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F^{(n-1)}(z_0+h) - F^{(n-1)}(z_0)}{h}.$$

Нехай

$$\rho_n = \frac{F^{(n-1)}(z_0+h) - F^{(n-1)}(z_0)}{h} - \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz =$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i h}\int_L f(z)\left(\frac{1}{(z-z_0-h)^n} - \frac{1}{(z-z_0)^n}\right) dz - \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{dt}{(z-z_0-th)^{n+1}} = -\frac{1}{h}\int_0^1 (z-z_0-th)^{-n-1} d(z-z_0-th) =$$

$$= -\frac{1}{h}\,\frac{(z-z_0-th)^{-n}}{-n}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{nh}\left(\frac{1}{(z-z_0-h)^n} - \frac{1}{(z-z_0)^n}\right).$$

Тоді

$$\rho_n = \frac{n!}{2\pi i}\int_L f(z)\left(\int_0^1 \frac{dt}{(z-z_0-th)^{n+1}}\right) dz - \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz =$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_L f(z)\left(\int_0^1 \left(\frac{1}{(z-z_0-th)^{n+1}} - \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\right) dt\right) dz\,.$$

Для $z_0 \in G$, $2d = \rho(z_0, L)$ і $|h| < d$ точка $z_0 + th$ завжди лежить в замкненому крузі $\{z\colon |z - z_0| \le d\}$ і $|z - z_0 - th| \ge d$, де $z \in L$. Тому функція $\frac{1}{(z-z_0-th)^{n+1}}$, як функція змінної h, є рівномірно неперервною в замкненому крузі $\{z\colon |z - z_0| \le d\}$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $|h| < \delta$ і для всіх $z \in L$ і

$t \in [0; 1]$, виконується нерівність $\left|\frac{1}{(z-z_0-th)^{n+1}} - \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\right| < \varepsilon$. Крім того, для всіх $z \in L$ $|f(z)| \le M$. Тоді одержимо

$$|\rho_n| = \frac{n!}{2\pi}\int_L |f(z)|\left(\int_0^1 \left|\frac{1}{(z-z_0-th)^{n-1}} - \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\right| dt\right)|dz| <$$

$$< \frac{\varepsilon n!}{2\pi}\int_L |f(z)||dz| \le \varepsilon\frac{n!\,M}{2\pi}|L|.$$

А це означає, що $\rho_n \to 0$ при $h \to 0$. Тобто, існують похідні будь-якого порядку n, причому справедлива формула (4.18). При цьому, $F'(z)$ буде неперервною в області $G\backslash L$, тому $F(z)$ буде аналітичною в області $G\backslash L$. ■

4.4. Інтегральна формула Коші

Теорема 4.7. Нехай функція $f(z)$ аналітична в області G, що обмежена скінченним числом спрямлюваних замкнутих жорданових ліній і неперервна в $\bar{G}$. Тоді для будь-якої точки $z \in G$ справедливе зображення функції $f(z)$ за допомогою формули

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \tag{4.19}$$

де ∂G додатньо орієнтована межа області G.

Функція $f(z)$ має в області G похідні всіх порядків, які є аналітичними функціями в області G і

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta. \tag{4.20}$$

Доведення. Нехай z_0 довільна точка в G. Виберемо $r > 0$ таким, щоб $K_r = \{z: |z - z_0| \le r\} \subset G$, позначимо $\gamma_r = \{z: |z - z_0| = r\}$.

Тоді функція $\frac{f(z)}{z-z_0}$ буде аналітичною в області $D_r = G\backslash K_r$ і за теоремою 4.5 і наслідком 4.2 отримаємо

$$\int_{\partial D_r}\frac{f(z)}{z - z_0}dz = \int_{\partial G}\frac{f(z)}{z - z_0}dz - \int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z - z_0}dz = 0,$$

звідки

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Із рівності (4.6)

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i,$$

то

$$\left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz - \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz \right|.$$

Оскільки $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \to f'(z_0)$ при $z \to z_0$, то $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ є обмеженою в деякому околі точки z_0: існує $M > 0$ і існує $\delta > 0$ такі, що для всіх $z \in \{z: |z-z_0| < \delta\}$ виконується нерівність $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \le M$. Нехай $r < \delta$, тоді

$$\left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right| |dz| \le \frac{M}{2\pi} 2\pi r \to 0$$

при $r \to 0$. А це і доводить (4.19). Інтеграл у правій частині (4.19) називають *інтегралом Коші*, а формулу (4.19) – *інтегральною формулою Коші*. Оскільки інтеграл Коші є частковим випадком, коли контур замкнений, інтегралу типу Коші, тому із (4.18) випливає (4.20) і аналітичність похідних. Формули (4.20) також називають *інтегральними формулами Коші.* ■

Відзначимо що формула (4.19) визначає значення функції у довільній внутрішній точці області за її значеннями на межі області.

Наслідок 4.3. Якщо виконуються умови теореми 4.7 і γ – довільна спрямлювана замкнута жорданова лінія, яка обмежує область D, і лежить у G разом із внутрішністю, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), \text{якщо } z \in D, \\ 0, \text{якщо } z \notin \overline{D}. \end{cases}$$

Приклад 3. Обчислити

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-1)^3}dz,$$

якщо γ простий замкнений контур і:

a) точка $z = 0$ лежить всередині контуру γ, а точка $z = 1$ – зовні;

b) точка $z = 1$ лежить всередині контуру γ, а точка $z = 0$ – зовні;

c) обидві точки $z = 0$ і $z = 1$ лежать всередині контуру γ.

Розв'язування. У формулі (4.19)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

покладемо $\partial G = \gamma, f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^3}$. Тоді у випадку a)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-1)^3}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{\frac{e^\zeta}{(\zeta-1)^3}}{\zeta - 0}d\zeta = f(0) = \frac{e^0}{(0-1)^3} = -1.$$

У випадку b) у формулі (4.20)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

покладемо $f(z) = \frac{e^z}{z}, n = 2$. Тоді

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-1)^3}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\frac{e^\zeta}{\zeta}}{(\zeta-1)^3}d\zeta = \frac{1}{2!}f''(1).$$

$$f'(z) = \frac{e^z z - e^z}{z^2}, \qquad f''(z) = \frac{e^z z^3 - (e^z z - e^z)2z}{z^4}, f''(1) = e.$$

Тому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-1)^3}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\frac{e^\zeta}{\zeta}}{(\zeta-1)^3}d\zeta = \frac{1}{2}e.$$

У випадку c) застосуємо наслідок 4.2 із теореми Коші для багатозв'язної області. Виберемо $r > 0$ таким, щоб кола $|z| = r$ і $|z-1| = r$ лежали всередині контуру γ. Тоді

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^z}{z(z-1)^3}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{e^z}{z(z-1)^3}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=r}\frac{e^z}{z(z-1)^3}dz=$$
$$=\frac{1}{2}e-1.$$

Наслідок 4.4 (теорема Ліувілля). Якщо функція $f(z)$ є цілою функцією і має у всій площині $\mathbb{C}$ обмежений модуль, то вона стала.

Доведення. Функція $f(z)$ називається цілою функцією, якщо вона аналітична в $\mathbb{C}$. Нехай існує $M>0$ таке, що $|f(z)|\leq M$ для всіх $z\in\mathbb{C}$. Зафіксуємо довільне $z_0\in\mathbb{C}$ і $R>|z_0|$. Тоді

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz,$$

а

$$|f'(z_0)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2}|dz|\leq M\frac{R}{(R-|z|)^2}\xrightarrow[R\to\infty]{}0.$$

Тоді $f'(z_0)=0$, а $f(z_0)=const.$ ■

Наслідок 4.5 (Основна теорема алгебри). Будь-який многочлен $P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ $(a_n\neq 0, n\in N)$ має принаймні один корінь в $\mathbb{C}$.

Доведення. Припустимо протилежне, що многочлен не має жодного кореня. Тоді функція $w=\frac{1}{P_n(z)}$ – аналітична у всій комплексній площині. Оскільки

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{|P_n(z)|}=\lim_{z\to\infty}\left|\frac{1}{z^n\left(\frac{a_0}{z^n}+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\cdots+a_n\right)}\right|=0\,,$$

то для довільного $\varepsilon>0$ існує $\exists\delta>0$ таке, що для всіх $|z|>\delta$ виконується нерівність $\frac{1}{|P_n(z)|}<\varepsilon$. У замкненій області $|z|\leq\delta$ модуль $\frac{1}{|P_n(z)|}$ неперервної функції досягає найбільшого значення. Тому існує $M>0$ таке, що $\left|\frac{1}{P_n(z)}\right|\leq M$ для всіх $z\in\mathbb{C}$. За наслідком 4.4 $\frac{1}{P_n(z)}=K=const$, а $P_n(z)=\frac{1}{K}$ – стала, тому $n=0$, а це протирічить умові $n\in N$. ■

4.5. Первісна функції комплексної змінної

Означення 4.1. Нехай функція $f(z)$ неперервна в області G. Функція $F(z)$ називається *первісною* функції $f(z)$ в області G, якщо для будь-якого $z \in G$ виконується умова $F'(z) = f(z)$.

Оскільки $F'(z) = f(z)$ для $z \in G$, то і $F'(z)$ неперервна в області G. Тому $F(z)$ – аналітична в області G. Із інтегральної формули Коші випливає, що аналітична функція має похідні всіх порядків, кожна з яких є аналітичною, а $F'(z) = f(z)$. Тоді і функція $f(z)$ – аналітична в області G.

Теорема 4.8. Нехай функція $f(z)$ неперервна в області G і має в цій області первісну $F(z)$. Тоді для будь-якої гладкої жорданової лінії L з початком у точці $z = A$ і кінцем у точці $z = B$, яка повністю лежить в області G, справедлива формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_L f(z)dz = F(B) - F(A). \qquad (4.21)$$

Доведення. Нехай лінія L задана рівнянням $z = z(t)$, t змінюється від α до β. Тоді за рівністю (4.5)

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \qquad (4.22)$$

де $\Phi(t)$ – довільна первісна для функції $f\big(z(t)\big)z'(t)$.

Функція $\Phi(t) = F\big(z(t)\big)$ є первісною для функції $f\big(z(t)\big)z'(t)$, бо $\Phi'(t) = F_z'\big(z(t)\big)z'(t) = f\big(z(t)\big)z'(t)$. Підставимо у (4.22) $\Phi(t) = F\big(z(t)\big)$, тоді $\int_L f(z)dz = F\big(z(\beta)\big) - F\big(z(\alpha)\big) = F(B) - F(A)$. ■

Якщо функція $f(z)$ задовольняє умови попередньої теореми, то вона аналітична в області G і в цій області виконуються умови Коші-Рімана. Тому із рівності (4.3), яка має вигляд

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy,$$

випливає, що $\int_L f(z)dz$ не залежить від вигляду лінії L, а залежить лише від початку A і кінця B лінії L. Тому його часто записують у вигляді

$$\int_A^B f(z)dz = F(B) - F(A).$$

Теорема 4.9. Нехай $f(z)$ – неперервна в області G, $F(z)$ – первісна для $f(z)$ в області G. Для того, щоб функція $F_1(z)$ була первісною для $f(z)$ в області G необхідно і достатньо, щоб $F_1(z) = F(z) + C$, де C – стала.

Доведення. Оскільки $F_1'(z) = F'(z) = f(z)$, то для функції $\psi(z) = F_1(z) - F(z)$ її похідна $\psi'(z) = F_1'(z) - F'(z) = 0$. Нехай z_1 і z_2 дві довільні фіксовані точки в області G, тоді $0 = \int_{z_1}^{z_2} \psi'(z)dz = \psi(z_2) - \psi(z_1)$. Звідки, $\psi(z) = C$ – стала.

Навпаки, $F_1(z) = F(z) + C$, то $F_1'(z) = F'(z) = f(z)$ в області G. ■

4.6. Умови існування первісної

Теорема 4.10. Нехай $f(z)$ неперервна в однозв'язній області G. Для того, щоб $f(z)$ мала первісну в області G необхідно і достатньо, щоб для будь-якої замкненої спрямлюваної жорданової лінії L, що належить області G

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

Доведення. Необхідність. Якщо функція $f(z)$ неперервна в області G і має в цій області первісну, то $f(z)$ – аналітична в цій області. Тоді за інтегральною теоремою Коші $\int_L f(z)dz = 0$.

Достатність. Якщо для будь-якої замкненої спрямлюваної жорданової лінії L, що належить області G $\int_L f(z)dz = 0$, то інтеграл $\int_L f(z)dz$ не залежить від шляху інтегрування. Тому для довільних фіксованих точок z_0 і z із області G і довільної спрямлюваної жорданової лінії, що сполучає ці точки і лежить в G, інтеграл не залежить від вибору лінії, а лише від положення точок z_0 і z із області G. Тому

$$\int_{z_0}^{z} f(t)dt = F(z)$$

є функцією від верхньої межі, t – комплексна змінна. Покажемо, що $F(z)$ є первісною для $f(z)$. Надамо z приросту Δz, щоб точка $z + \Delta z \in G$ і розглянемо

$$F(z + \Delta z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(t)dt.$$

Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то виберемо його так, щоб він проходив через точку z: від точки z_0 до z, а потім по відрізку прямої від z до $z + \Delta z$. Тоді

$$F(z + \Delta z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt + \int_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt,$$

а

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt.$$

Розглянемо

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt - f(z) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} \big(f(t) - f(z)\big)dt \right| \le \max_{t \in [z; z+\Delta z]} |f(t) - f(z)|.$$

Із неперервності функції випливає, що $\max_{t \in [z; z+\Delta z]} |f(t) - f(z)| \to 0$ при $\Delta z \to 0$, тому $F'(z) = f(z)$, $F(z)$ є первісною для функції $f(z)$ в області G. ■

Теорема 4.11. Нехай функція $f(z)$ неперервна в крузі K. Для того, щоб функція $f(z)$ мала в крузі K первісну, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого трикутника Δ, який лежить всередині круга K, $\int_{\Delta} f(z)dz = 0$.

Доведення. Необхідність випливає із попередньої теореми.

Достатність. Розглянемо в крузі K довільні точки z_0, z і $z+\Delta z$. Позначимо через $[z_0, z]$ – відрізок прямої від z_0 до z, $[z, z+\Delta z]$ – відрізок прямої від z до $z+\Delta z$, $[z+\Delta z, z_0]$ – відрізок прямої від $z+\Delta z$ до z_0. Тоді із умови $\int_\Delta f(z)dz = 0$ одержуємо

$$\int_\Delta f(z)dz = \int_{[z_0,z]} f(z)dz + \int_{[z,z+\Delta z]} f(z)dz + \int_{[z+\Delta z,z_0]} f(z)dz = 0. \quad (4.23)$$

Покладемо

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(z)dz.$$

Тоді

$$F(z+\Delta z) = \int_{[z_0,z+\Delta z]} f(z)dz$$

і із (4.23)

$$F(z+\Delta z) = F(z) + \int_{[z,z+\Delta z]} f(z)dz.$$

Завершення доведення повністю повторює доведення попередньої теореми.

■

Теорема 4.12. Для того, щоб неперервна функція $f(z)$ задана в однозв'язній області G мала первісну необхідно і достатньо, щоб $f(z)$ була аналітичною.

Доведення. Якщо f аналітична, то за інтегральною теоремою Коші для будь-якої замкненої спрямлюваної жорданової лінії L, що належить області G, $\int_L f(z)dz = 0$. Тоді за теоремою 4.10 в області G існує первісна для функції $f(z)$. Якщо ж неперервна функція $f(z)$ в області G має первісну $F(z)$, то $F'(z) = f(z)$. Із інтегральної формули Коші випливає, що функція $f(z)$ – аналітична в області G.

■

4.7. Теореми Морери та Гурса

Теорема 4.13. (Морери). Нехай функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області G і для будь-якої замкнутої спрямлюваної лінії Жордана L, що лежить в області G, інтеграл $\int_L f(z)dz = 0$. Тоді $f(z)$ аналітична в області G (обернена до теореми Коші).

Доведення. Ця теорема є оберненою до теореми Коші. За теоремою 4.10 з попереднього пункту випливає, що $f(z)$ має в області G первісну. Якщо функція має первісну, то вона аналітична. ■

Теорема 4.14 (Морери). Нехай функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області G і для будь-якого трикутника Δ, який лежить всередині області G, $\int_\Delta f(z)dz = 0$. Тоді $f(z)$ аналітична в області G.

Доведення. Оскільки G – область (відкрита зв'язна множина), то для будь-якого $z \in G$ існує круг $K \subset G$ з центром в точці z. За умовою теореми, для будь-якого трикутника Δ, який лежить всередині круга $K \subset G$, $\int_\Delta f(z)dz = 0$. За теоремою 4.11 функція $f(z)$ має в крузі первісну, отже аналітична в крузі і в точці $z \in G$. Із довільності z одержуємо, що функція $f(z)$ аналітична в області G. ■

Теорема 4.15. Нехай функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області G і аналітична в області $G \setminus I$, де I – відрізок. Тоді $f(z)$ аналітична в області G.

Доведення. Розглянемо будь-який трикутник Δ, який лежить всередині області G. Якщо відрізок I лежить зовні трикутника Δ, то за інтегральною теоремою Коші $\int_\Delta f(z)dz = 0$. У другому випадку, коли відрізок I перетинає трикутник Δ або лежить у його середині, то прямою, на якій лежить відрізок, трикутника Δ розіб'ється на дві частини по межі кожної із яких інтеграл від $f(z)$ за інтегральною теоремою Коші буде рівний нулеві. Оскільки відрізок обходиться у двох протилежних напрямках, то і $\int_\Delta f(z)dz = 0$.

Тобто, для будь-якого трикутника Δ, який лежить всередині області G, $\int_\Delta f(z)dz = 0$. За другою теоремою Морери $f(z)$ аналітична в області G. ■

Теорема 4.16 (Гурса). Нехай функція $f(z)$ моногенна в кожній точці області G. Тоді вона аналітична в області G.

Доведення. Розглянемо довільний трикутник Δ, що лежить в області G, його периметр позначимо l. Покладемо $M = \left|\int_{\Delta} f(z)dz\right|$.

Розіб'ємо трикутник Δ середніми лініями на трикутники $\Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}, \Delta_3^{(1)}, \Delta_4^{(1)}$, кожен із периметром $\frac{l}{2}$. Тоді

$$M = \left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| = \left|\int_{\Delta_1^{(1)}} f(z)dz + \cdots + \int_{\Delta_4^{(1)}} f(z)dz\right| \le$$

$$\le \left|\int_{\Delta_1^{(1)}} f(z)dz\right| + \cdots + \left|\int_{\Delta_4^{(1)}} f(z)dz\right|.$$

Тоді принаймні один з цих інтегралів $\ge \frac{M}{4}$. Трикутник, для якого виконується ця умова, позначимо через $\Delta^{(1)}$: $\left|\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4}$.

Розіб'ємо трикутник $\Delta^{(1)}$ середніми лініями на чотири трикутники, серед яких існує трикутник $\Delta^{(2)}$ (його периметр рівний $\frac{l}{2^2}$), для якого $\left|\int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4^2}$. Продовжуючи цей процес, на n-му кроці одержимо трикутник $\Delta^{(n)}$ (його периметр рівний $\frac{l}{2^n}$), для якого $\left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)dz\right| \ge \frac{M}{4^n}$. І так далі.

Замкнені області, які обмежені трикутниками $\Delta^{(n)}$, утворюють послідовність вкладених замкнених областей. Трикутник $\Delta^{(n)}$ має периметр $\frac{l}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. Звідси випливає, що послідовність вкладених замкнених областей, обмежених трикутниками $\Delta^{(n)}$, має спільну точку z_0, а трикутники $\Delta^{(n)}$ стягуються до $z_0 \in \Delta$.

Функція $f(z)$ моногенна в точці z_0, тому має в цій точці похідну: $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$. Звідки, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta_\varepsilon > 0$ таке, що для всіх z , для яких $|z - z_0| < \delta$, виконується нерівність

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon.$$

Тобто, при $|z - z_0| < \delta$ виконується нерівність

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \le \varepsilon|z - z_0|.$$

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)(z-z_0)}{z-z_0}\right|<\varepsilon.$$

Оскільки $\frac{l}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$, то для заданого δ існує N, починаючи з якого $\frac{l}{2^n}<\delta$, всі трикутники $\Delta^{(n)}$ будуть лежати в крузі $|z-z_0|<\delta$. Нехай $n\geq N$. Якщо $z\in\Delta^{(n)}$, то $|z-z_0|<\frac{l}{2^n}$ і $|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon|z-z_0|<\varepsilon\frac{l}{2^n}$.

Далі врахуємо, що лінійна функція є аналітичною в $\mathbb{C}$, а функція $f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ – лінійна, за інтегральною теоремою Коші

$$\int_{\Delta^{(n)}}(f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0))dz=0.$$

Отже,

$$\frac{M}{4^n}\leq\left|\int_{\Delta^{(n)}}f(z)dz\right|=\left|\int_{\Delta^{(n)}}\big(f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)\big)dz\right|\leq$$

$$\leq\left|\int_{\Delta^{(n)}}|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)||dz|\right|<\varepsilon\frac{l}{2^n}\left|\int_{\Delta^{(n)}}|dz|\right|\leq\varepsilon\frac{l^2}{4^n}.$$

Для будь-якого $\varepsilon>0$ $M<\varepsilon l^2$. Звідси $M=0$. Тому $\int_\Delta f(z)dz=0$. За другою теоремою Морери функція є аналітичною в області G. ■

Отже, клас моногенних в області G функцій співпадає з класом аналітичних в цій області функцій.

4.8. Вправи до розділу 4.

4.1. Знайти інтеграли

a) $\int_L e^{\bar{z}}dz,$ де L – відрізок прямої з початком у точці $z_1=0$ і кінцем у точці $z_2=\pi-i\pi$;

b) $\int_L (z^2+z\bar{z})dz,$ де L – дуга параболи $y=x^2,\ \ 0\leq x\leq 1$;

c) $\int_L \bar{z}dz$ по наступних лініях з початком у точці $z_1=0$ і кінцем у точці $z_2=1+i$, якщо і) L – відрізок прямої, іі) парабола $y=x^2$, ііі) парабола $y=\sqrt{x}$;

d) $\int_{|z|=1} z\, Im\, z^2 dz$.

4.2. За інтегральною формулою Коші знайти інтеграли

$$a)\ \int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i}dz\,; \quad b)\ \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}dz\,; \ c)\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz\,;$$

$$d)\ \int_{|z-2i|=2} \frac{ze^{2z}}{z-\pi i}dz\,; \quad e)\int_{|z|=2} \frac{e^z-1}{z(z-i)}dz\,; \qquad f)\ \int_{|z|=2} \frac{ch\, z}{(z-1)(z+i)}dz\,;$$

$$g)\int_{|z|=4} \frac{(z+i)sin^2 z}{z^2+9}dz\,; \quad h)\ \int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz\,; \quad i)\ \int_{|z-i|=1} \frac{e^z}{(z-i)^{10}}dz\,;$$

$$j)\ \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3}dz\,; \quad k)\ \int_{|z|=2} \frac{z^3 sh\, z}{(z-1)^4}dz\,; \quad l)\ \int_{|z|=3} \frac{ch\, z}{(z+1)^3(z-1)}dz\,;$$

$m)$ $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z^2+a^2}dz\,,$ $C -$ замкнений контур, в середині якого лежить коло $|z| = a,\ a > 0;$

$n)$ $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^z}{(z-a)^3}dz,$ якщо точка $z = a$ лежить в середині контуру C.

4.3. Обчислити інтеграли

$$a)\int_{-i}^{i} ze^{z^2}dz\,; \ \ b)\int_{i}^{ie} \frac{\ln z}{z}dz.$$

Розділ 5. Функціональні ряди. Нулі та особливі точки аналітичних функцій

5.1. Функціональні послідовності і ряди. Рівномірна збіжність

Нехай задана функціональна послідовність $\{f_n(z)\}$, $n = 1,2,3,\dots$. Кожна з функцій $f_n(z)$ задана в G. Зафіксувавши $z \in G$, одержимо послідовність комплексних чисел, яка може бути збіжною або розбіжною. Множина $E \subset G$ тих z для яких послідовність $\{f_n(z)\}$ збігається, називається областю збіжності функціональної послідовності. Отже, на множині E задана функція $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$ і її називають граничною функцією для послідовності $f_n(z)$ на множині E. Така збіжність називається поточковою збіжністю.

Означення 5.1. Послідовність $f_n(z)$ називається *рівномірно збіжною* до $f(z)$ на множині $D \subset G$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n \geq n_0$ і для всіх $z \in D$ виконується нерівність $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Рівномірну збіжність функціональної послідовності $\{f_n(z)\}$ до функції $f(z)$ на множині D будемо позначати: $f_n(z) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(z)$ на D.

Якщо послідовність $f_n(z)$ є рівномірно збіжною на множині D, то вона є збіжною на D.

Із означення 5.1 випливає, що рівномірна збіжність послідовності $f_n(z)$ до $f(z)$ на множині D рівносильна виконанню умови

$$\sup_{z\in D}|f_n(z) - f(z)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Приклад 1. Довести, що функціональна послідовність $f_n(z) = \frac{1}{1+z^n}$ $(n \in N)$ збігається рівномірно до функції $f(z) = 1$ в кожному крузі $K = \{z: |z| \leq r\}$, $r < 1$, а в будь-якій замкненій множині F із області $\{z: |z| > 1\}$ збігається рівномірно до функції $f(z) = 0$.

Розв'язування. Нехай $z \in K$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+z^n} = 1,$$

$$|f_n(z) - f(z)| = \left|\frac{1}{1+z^n} - 1\right| = \frac{|z|^n}{|1+z^n|} \leq \frac{|z|^n}{1-|z|^n} \leq \frac{r^n}{1-r^n}$$

і

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{r^n}{1-r^n} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Отже, функціональна послідовність $f_n(z) = \frac{1}{1+z^n}$ $(n \in N)$ збігається рівномірно до функції $f(z) = 1$ в кожному крузі $K = \{z: |z| \leq r\},\ r < 1$.

Нехай F - замкнена множина із області $\{z: |z| > 1\}$. Тоді існує $R > 1$, що для будь-якого $z \in F$ $|z| \geq R$. Тому

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+z^n} = 0,$$

$$|f_n(z) - f(z)| = \left|\frac{1}{1+z^n}\right| \leq \frac{1}{|z|^n - 1} \leq \frac{1}{R^n - 1} \to 0, n \to \infty$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z \in F} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Отже, функціональна послідовність $f_n(z) = \frac{1}{1+z^n}$ $(n \in N)$ збігається рівномірно до функції $f(z) = 0$ в будь-якій замкненій множині F із області $\{z: |z| > 1\}$.

Критерій Коші. Для того, щоб послідовність $\{f_n(z)\}$ рівномірно збігалася до граничної функції $f(z)$ на множині D, необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n \geq n_0$ і всіх p натуральних, для всіх $z \in D$ виконується нерівність $\left|f_{n+p}(z) - f_n(z)\right| < \varepsilon$.

Доведення аналогічне як для дійсних функціональних послідовностей.

Розглянемо деякі властивості рівномірно збіжних функціональних послідовностей.

Теорема 5.1 (Про неперервність граничної функції). Якщо кожна із функцій $f_n(z)$ неперервна на множині D і послідовність $f_n(z)$ рівномірно збігається до $f(z)$ на множині D, то функція $f(z)$ буде неперервна на множині D.

Доведення. Нехай $z_0 \in D$ довільна фіксована точка.

Послідовність $f_n(z)$ рівномірно збігається до $f(z)$ на множині D, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n \geq n_0$ і для всіх $z \in D$ виконується нерівність $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3$.

Зафіксуємо $N \geq n_0$. Функція $f_N(z)$ є неперервною в точці $z_0 \in D$, тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ таке, що для всіх $z \in D$, для яких $|z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3$.

Тоді для всіх $z \in D$, для яких $|z - z_0| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Звідси випливає неперервність $f(z)$ у точці $z_0 \in D$, а із довільності $z_0 \in D$ випливає неперервність на множині D. ■

Теорема 5.2 (Про почленне інтегрування функціональної послідовності). Нехай кожна функція $f_n(z)$ $(n \in N)$ неперервна на спрямлюваній жордановій лінії $L \subset G$ і послідовність $f_n(z)$ рівномірно збігається до $f(z)$ на лінії L, тоді

$$\lim_{n\to\infty} \int_L f_n(z)dz = \int_L \left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right) dz = \int_L f(z)dz.$$

Доведення. За теоремою 5.1 функція $f(z)$ неперервна на лінії L, тому інтегровна на лінії L. Із рівномірної збіжності $f_n(z)$ до $f(z)$ на L випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n \geq n_0$ і для всіх $z \in L$ виконується нерівність $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/l$, де l довжина лінії L.

Тоді

$$\left|\int_L f_n(z)dz - \int_L f(z)dz\right| \leq \left|\int_L \big(f_n(z) - f(z)\big)dz\right| \leq$$

$$\leq \int_L |f_n(z) - f(z)|dz < \frac{\varepsilon}{l} l = \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \int_L f_n(z)dz = \int_L f(z)dz$. ■

Теорема 5.3. Нехай кожна функція $f_n(z)$ $(n \in N)$ аналітична в області $G \subset \mathbb{C}$ і послідовність $f_n(z)$ рівномірно збігається до $f(z)$ в області G. Тоді $f(z)$ аналітична в області G і і для кожного натурального k послідовність $f_n^{(k)}(z)$ рівномірно збігається до $f^{(k)}(z)$ на будь-якій замкненій множині $F \subset G$.

Доведення. Для довільного n функції $f_n(z)$ аналітичні в області G, отже, неперервні. За теоремою 5.1 функція $f(z)$ буде неперервною в області G. Розглянемо довільну спрямлювану замкнену жорданову лінію L, яка разом із внутрішністю лежить в G. За інтегральною теоремою Коші $\int_L f_n(z)dz = 0$, а за теоремою 5.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_L f_n(z)dz = \int_L f(z)dz = 0$. За теоремою 4.13 Морери одержуємо, що $f(z)$ аналітична в області G.

Але ми знаємо, що аналітична функція має похідні всіх порядків.

Нехай z_0 лежить у внутрішності L. Із рівномірної збіжності послідовності $f_n(z)$ на L випливає, що послідовність $\frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ рівномірно збігається до функції $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ на L, бо

$$\sup_{z\in L}\left|\frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} - \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\right| \le \frac{1}{\min\limits_{z\in G}(z-z_0)^{k+1}} \cdot \sup_{z\in L}|f_n(z)-f(z)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, за теоремою 5.2

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_L \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz = \int\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz.$$

Домножимо обидві частини останньої рівності на $\frac{k!}{2\pi i}$. За інтегральною формулою Коші (4.20) в області G

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z).$$

Покажемо, що $f_n^{(k)}(z)$ буде рівномірно збігатись до $f^{(k)}(z)$ в будь-якій замкненій множині $F \subset G$.

Нехай F довільна замкнена множина, яка належить області G $(F \subset G)$. Нехай $2d$ віддаль від ∂G до F. Розглянемо довільну точку $z_0 \in F$ і круг $K = \{z: |z-z_0| < d\}$. Тоді $K \subset G$. І розглянемо ще круг $U\left(z_0, \frac{d}{2}\right) = \left\{z: |z-z_0| < \frac{d}{2}\right\}$. За умовою, послідовність $f_n(\zeta)$ рівномірно збігається до функції $f(\zeta)$ на $\partial K \subset G$, тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon, z_0)$ такий, що для всіх $n \ge n_0$ і для всіх $\zeta \in \partial K$ виконується нерівність $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon d^k/(2^{k+1}k!)$. Тоді для довільної точки $z \in U\left(z_0, \frac{d}{2}\right)$ і $n \geq n_0$ (враховуємо, що $|\zeta - z| \geq \frac{d}{2}$ для $\zeta \in \partial K$)

$$\left|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| = \frac{k!}{2\pi}\left|\int\limits_{\partial K} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta - \int\limits_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta\right| \leq$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{\partial K} \left|\frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\right| |d\zeta| < \frac{\varepsilon d^k}{(2^{k+1}k!)} \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{\partial K} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{k+1}} \leq \varepsilon.$$

Це доводить, що послідовність із похідних $f_n^{(k)}(z)$ рівномірно збігається до $f^{(k)}(z)$ в крузі $\left\{z: |z - z_0| < \frac{d}{2}\right\} = U\left(z_0, \frac{d}{2}\right)$.

Множина F – замкнена і обмежена, отже, компактна. Із нескінченного покриття множини F відкритими кругами $U\left(z, \frac{d}{2}\right)$ з центрами в точках множини F можна виділити скінченне покриття $U\left(z_1, \frac{d}{2}\right), \dots, U\left(z_m, \frac{d}{2}\right)$ множини F. На кожному крузі $U\left(z_j, \frac{d}{2}\right), j = 1, \dots, m,$ послідовність $f_n^{(k)}(z)$ рівномірно збігається до $f^{(k)}(z)$, тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $n_j(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n \geq n_j$ і для всіх $z \in U\left(z_j, \frac{d}{2}\right)$ виконується нерівність $\left|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| < \varepsilon$. Нехай $n_\varepsilon = \max\limits_{j=\overline{1,m}} n_j(\varepsilon)$. Тоді для всіх $n \geq n_\varepsilon$ і всіх $z \in F$ виконується нерівність $\left|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| < \varepsilon$, а це означає, що послідовність $f_n^{(k)}(z)$ рівномірно збігається до $f^{(k)}(z)$ на F. ■

Означення 5.2. Нехай задана функціональна послідовність $\{f_n(z)\}_{n \in \mathbf{N}}$, $z \in G$, тоді вираз виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots, z \in G, \qquad (5.1)$$

називається *функціональним рядом*.

Послідовність $S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$ називається послідовністю n-их часткових сум ряду (5.1).

Кожна з функцій $f_n(z)$ задана в G. Поклавши $z = z_0 \in G$ в (5.1), дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\,(z_0)$. Якщо він збіжний, то кажуть, що функціональний ряд (5.1) збігається у точці z_0, якщо ж розбіжний, то (5.1) – розбігається у точці z_0. Множина $E \subset G$, тих точок z, у яких ряд (5.1) збігається, називається множиною збіжності ряду (5.1).

У кожній точці $z \in E$ існує скінченна границя послідовності $S_n(z)$ часткових сум

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z),$$

функцію $S(z)$ називається *сумою* функціонального ряду (5.1):

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,(z).$$

Означення 5.3. Функціональний ряд (5.1) називається *рівномірно збіжним на множині* $D \subset E$, якщо послідовність його часткових сум $S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$ рівномірно збігається до функції $S(z)$ на множині D.

Із означення 5.3 випливає, що рівномірна збіжність функціонального ряду (5.1) на множині D рівносильна виконанню умови

$$\sup_{z\in D}|S_n(z) - S(z)| = \sup_{z\in D}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Із критерію Коші збіжності функціональної послідовності одержуємо критерій Коші збіжності функціонального ряду.

Критерій Коші. Для того, щоб функціональний ряд (5.1) був рівномірно збіжний на множині D, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існував номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n \geq n_0$ і всіх p натуральних, для всіх $z \in D$ виконується нерівність $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \varepsilon$.

Ознака Вейєрштрасса. Якщо існує збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, з додатними членами такий, що для всіх $n \in \boldsymbol{N}$ і всіх $z \in D$ $|f_n(z)| \leq c_n$, то функціональний ряд (5.1) на множині D збіжний рівномірно і абсолютно.

Доведення даної ознаки випливає із критерію Коші збіжності функціонального ряду.

Приклад 2. Знайти множину збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n^2}$.

Розв'язування. При $z = x \in R$ одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$, який збігається рівномірно на R, бо за ознакою Вейєрштрасса для всіх $x \in R$ $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Нехай $z = x + iy, y \neq 0$.

$$\left|\frac{\sin nz}{n^2}\right| = \left|\frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2n^2}\right| \geq \frac{\left||e^{inz}| - |e^{-inz}|\right|}{2n^2} = \frac{|e^{-ny} - e^{ny}|}{2n^2} = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^2}.$$

Права частина цієї нерівності $\frac{e^{ny}-e^{-ny}}{2n^2} \to \infty, n \to \infty$. Тоді $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin nz}{n^2}\right| = \infty$ і ряд є розбіжний.

Отже, заданий ряд збігається тільки на дійсній осі, ця збіжність є рівномірною.

Розглянемо деякі властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

Теорема 5.4. Якщо члени ряду (5.1) $f_n(z)$ – неперервні на множині D і ряд (5.1) рівномірно збіжний на множині D, то його сума $S(z)$ буде неперервною на множині D функцією.

Доведення випливає із застосування до послідовності $S_n(z)$ відповідної теореми 5.1 про неперервність граничної функції функціональної послідовності.

Теорема 5.5. Нехай кожна функція $f_n(z)$ $(n \in N)$ неперервна на спрямлюваній жордановій лінії $L \subset G$ і ряд (5.1) рівномірно збіжний до $S(z)$ на лінії L, то

$$\int_L S(z)\,dz = \int_L \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_L f_n(z)dz.$$

Доведення. За теоремою 5.3 функція $S(z)$ неперервна на L, отже, усі інтеграли існують. З рівномірної збіжності ряду на L випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n \geq n_0$ і для всіх $z \in L$ виконується нерівність $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon/l$, де l – довжина лінії L. Тому при $n \geq n_0$ маємо

$$\left|\int_L S(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n}\int_L f_n(z)dz\right| = \left|\int_L \left(S(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right)dz\right| =$$

$$= \left|\int_L \big(S(z) - S_n(z)\big)dz\right| \le \int_L |S(z) - S_n(z)||dz| < \varepsilon,$$

а це означає, що

$$\int_L S(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_L f_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_L f_n(z)dz.$$

■

Далі розглянемо теорему Вейєрштрасса про ряди аналітичних функцій, яка не має аналогу для рядів з дійсними неперервно диференційовними функціями.

Теорема 5.6. Нехай кожна функція $f_n(z)$ $(n \in N)$ аналітична в області $G \subset \mathbb{C}$ і ряд (5.1) рівномірно збіжний в області G. Тоді сума ряду $S(z)$ буде аналітичною функцією в області G, ряд (5.1) можна почленно диференціювати будь-яку скінченну кількість разів в усіх точках області G, тобто для всіх $z \in G$ справедливі рівності

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \qquad k \in N. \tag{5.2}$$

Крім того для довільної замкненої множини $F \subset G$ ряди (5.2) рівномірно збіжні на множині F.

Доведення. Оскільки кожна функція $f_n(z)$ $(n \in N)$ аналітична в області $G \subset \mathbb{C}$ і ряд (5.1) рівномірно збіжний в області G, то послідовність його часткових сум $S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$ є аналітичними в області G функціями і $S_n(z)$ рівномірно збігається до функції $S(z)$ в області G. Тоді з теореми 5.3 випливає, що сума ряду $S(z)$ буде аналітичною функцією в області G, і $\lim_{n\to\infty} S_n^{(k)}(z) = S^{(k)}(z)$. Отже, виконується рівність (5.2) і за теоремою 5.3 для довільної замкненої множини $F \subset G$ ряди в (5.2) рівномірно збіжні на множині F. ■

5.2. Степеневі ряди

Степеневим рядом з комплексними членами (з центром у точці z_0) називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{5.3}$$

де $z_0, c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ – комплексні числа, c_n називають коефіцієнтами степеневого ряду.

Його члени $c_n(z - z_0)^n$ визначені для всіх $z \in \mathbb{C}$. При $z_0 = 0$ (5.3) зводиться до вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{5.4}$$

який завжди збігається в точці $z = 0$. Ряди (5.3) і (5.4) легко перетворюються один в інший простим лінійним перетворенням. Тому досить розглянути властивості простішого ряду (5.4).

Лема Абеля. Якщо ряд (5.4) збігається в точці $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$, то він буде абсолютно збіжним у крузі $\{z: |z| < |z_1|\}$.

Якщо ряд (5.4) розбіжний в деякій точці z_2, то він буде розбіжний у будь-якій точці $z \in \{z: |z| > |z_2|\}$.

Доведення. Оскільки ряд (5.4) збіжний в точці z_1, то $c_n z_1^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Збіжна послідовність є обмежена, тобто існує $M > 0$, що для всіх $n \in N$ $|c_n z_1^n| \leq M$. Розглянемо довільне $z \in \{z: |z| < |z_1|\}$, тоді

$$|c_n z^n| = |c_n| \cdot |z_1|^n \cdot \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{z}{z_1}\right|^n.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ – збіжний. Отже, за ознаками порівняння, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_n z^n|$ – збіжний, тому ряд (5.4) абсолютно збіжний.

Другу частину леми доводимо від супротивного. Припустимо, що ряд (5.4) збіжний в точці z і $|z| > |z_2|$. Тоді, за доведеним, даний ряд буде збіжним в точці z_2. Одержуємо протиріччя, яке доводить другу частину леми. ■

Із леми випливає, що для кожного степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ реалізується один із трьох варіантів:

ряд збігається тільки в точці $z = 0$;

ряд збігається для будь-якого $z \in \mathbb{C}$;

існує число $0 < R < +\infty$, що при $|z| < R$ ряд збіжний, а при $|z| > R$ ряд буде розбіжний.

Теорема 5.7 (Коші-Адамара). Нехай $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, $0 \le \rho \le \infty$;

$$R = \begin{cases} 0, & \rho = \infty, \\ \dfrac{1}{\rho}, & 0 < \rho < \infty, \\ \infty, & \rho = 0. \end{cases}$$

Тоді:

a) при $R = 0$ ряд (5.4) розбіжний для будь-якого $z \neq 0$;

b) при $R = \infty$ ряд (5.4) абсолютно збігається для будь-якого $z \in \mathbb{C}$;

c) $R = \frac{1}{\rho}$, $0 < \rho < \infty$, ряд (5.4) збігається абсолютно для будь-якого z, для якого $|z| < R$, і розбігається для будь-якого z , для якого $|z| > R$.

Доведення. a) $R = 0$, $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$. Тоді існує підпослідовність, для якої $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \to \infty, k \to \infty$. Нехай $z \neq 0$ будь-яке фіксоване. Тоді існує k_0, що для всіх $k \ge k_0$ виконується нерівність $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \frac{1}{|z|}$ і $|c_{n_k} z^{n_k}| > 1$. Отже, $c_n z^n \nrightarrow 0$, $n \to \infty$. Тому ряд (5.4) розбіжний.

b) $R = \infty, \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. Нехай $z \neq 0$ будь-яке фіксоване. Тоді існує n_0, що для всіх $n \ge n_0$ виконується нерівність $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z|}$ і $|c_n z^n| < \frac{1}{2^n}$. Тому, за ознаками порівняння рядів, ряд (5.4) абсолютно збігається для будь-якого $z \in \mathbb{C}$.

c) $R=\frac{1}{\rho}$, $0<\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}<\infty$. Нехай z таке, що $|z|>R$, тоді $\rho>\frac{1}{|z|}$. У цьому випадку існує така підпослідовність, що для всіх $k\geq 1$ виконується нерівність $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|}>\frac{1}{|z|}$, а $|c_{n_k}z^{n_k}|>1$. Отже, $c_n z^n \nrightarrow 0,\ n\to\infty$. Тому ряд (5.4) розбіжний.

Нехай $z\neq 0$ таке, що $|z|<R$, тобто $\rho|z|<1$. Тоді існує таке α, що $\rho|z|<\alpha<1$. Звідки $\rho<\frac{\alpha}{|z|}$, тому існує n_0, що для всіх $n\geq n_0$ виконується нерівність $\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{\alpha}{|z|}$, а $|c_n z^n|<\alpha^n$. Тому, за ознаками порівняння рядів, ряд (5.4) абсолютно збігається для будь-якого z, для якого $|z|<R$. ■

Величина R, яка визначена у теоремі, називається *радіусом збіжності степеневого ряду* (5.4). Оскільки радіус збіжності виражається тільки через коефіцієнти степеневого ряду, а у (5.3) вони такі ж, то і радіус збіжності степеневого ряду (5.3) визначається за тими ж формулами. Відзначимо, що коли всі коефіцієнти степеневого ряду (починаючи з деякого) відмінні від нуля і існує $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то радіус збіжності можна знайти за формулою

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Круг $\{z: |z-z_0|<R\}$ називається *кругом збіжності* ряду (5.3), а при $0<R<+\infty$ коло $\{z: |z-z_0|=R\}$ – *колом збіжності* (5.3). На колі збіжності ряд (5.3) може бути збіжним, розбіжним, збіжним тільки на деякій підмножині цього кола.

Приклад 3. Знайти множину збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$.

Розв’язування. Знайдемо радіус збіжності

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

В крузі $|z|<1$ заданий ряд є збіжним. Дослідимо його збіжність на колі $|z|=1$. Для точок на колі $|z|=1$ $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $0\leq\varphi<2\pi$. При $\varphi=0$ $z=1$, Одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним. При $0<\varphi<2\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n}.$$

Дійсна і уявна частина є збіжними рядами за ознакою Діріхле.

Отже, заданий ряд збігається на множині $\{z: |z| \leq 1\}\backslash\{1\}$.

Розглянемо деякі властивості степеневих рядів.

Теорема 5.8. Степеневий ряд (5.3) рівномірно збіжний в будь-якій замкненій множині, яка лежить в крузі збіжності.

Доведення. Нехай R – радіус збіжності ряду (5.3), розглянемо довільну замкнену множину $F \subset \{z: |z-z_0| < R\}$, яка лежить в крузі збіжності. Позначимо через d найменшу відстань від точок множини F до точок кола, $d > 0$. Тоді для всіх $z \in F$ буде виконуватись умова $\{z: |z-z_0| \leq R-d\}$ і $R-d < R$. Тому для всіх $z \in F$ $|c_n(z-z_0)^n| = |c_n| \cdot (R-d)^n$ і ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(R-d)^n$ є збіжним. Отже, за ознакою Вейєрштраса ряд (5.3) рівномірно збіжний на F. ■

Для степеневого ряду (5.4) в крузі збіжності виконуються умови теорем 5.4 – 5.6. Тоді із даної теореми 5.7 і теорем 5.4 – 5.6 випливає справедливість наступних наслідків.

Наслідок 5.1. Сума степеневого ряду є неперервною функцією в крузі збіжності.

Наслідок 5.2. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати по довільній спрямлюваній жордановій лінії, що лежить в крузі збіжності.

Якщо $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = S(z)$. Розглянемо дві точки $z=0$ і довільну точку z, що лежить в крузі збіжності $\{z: |z| < R\}$. Тоді

$$\int_0^z S(\zeta)d\zeta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^z \zeta^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n+1}$$

і отриманий таким чином ряд буде мати такий самий круг збіжності.

Наслідок 5.3. Сума степеневого ряду є аналітичною функцією в крузі збіжності, і цей ряд можна почленно диференціювати довільну кількість разів.

Для будь-якого z із круга збіжності ряду (5.3)

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(z-z_0)^{n-k}. \qquad (5.5)$$

Отриманий ряд буде рівномірно збіжний в будь-якій замкненій множині, що лежить в крузі збіжності. І цей ряд має той самий круг збіжності.

5.3. Ряди Тейлора

Нехай функція $f(z)$ задана в області $G \subset \mathbb{C}$ і має похідні будь-якого порядку в деякому околі точки $z_0 \in G$. Степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

називають *рядом Тейлора* функції $f(z)$ в околі точки z_0.

Теорема 5.9. Будь-який степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ із додатнім радіусом збіжності є рядом Тейлора в околі точки z_0 своєї суми.

Доведення. Нехай ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ збігається в $U(z_0, R)$. Тоді його сума $S(z)$ аналітична в $U(z_0, R)$ і з рівності (5.5) $S^{(n)}(z_0) = c_n n!$. Тоді

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

■

Теорема 5.10 (Тейлора). Нехай функція $f(z)$ аналітична в області $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$, d – віддаль від точки z_0 до межі області G. Тоді степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ із коефіцієнтами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \qquad (5.6)$$

де $\gamma_\rho = \{z: |z - z_0| = \rho\}$, $0 < \rho < d$, збігається в крузі $U(z_0, d) = \{z: |z - z_0| < \rho\}$ і має в крузі $U(z_0, d)$ своєю сумою функцію $f(z)$. Коло γ_ρ обходиться проти годинникової стрілки.

Доведення. Зафіксуємо $z \in U(z_0, d)$ і виберемо $\delta\ (0 < \delta < d)$ таким, щоб $z \in U(z_0, \delta)$. За інтегральною формулою Коші (4.19)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{5.7}$$

Враховуючи, що $q = \frac{|z-z_0|}{\delta} < 1$, розкладемо функцію $\frac{1}{\zeta - z}$ у степеневий ряд за степенями $z - z_0$:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Тоді підінтегральна функція у (5.7) зобразиться у вигляді ряду

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{5.8}$$

Оскільки функція $f(\zeta)$ аналітична в G і на γ_δ виконується нерівність

$$\left|\frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right| \le \max_{\zeta \in \gamma_\delta}|f(\zeta)|\frac{q^n}{\delta},$$

то за ознакою Вейєрштрасса ряд (5.8) рівномірно збіжний на γ_δ і за теоремою 5.5 його можна почленно інтегрувати по γ_δ. Із (5.7) і (5.8), враховуючи інтегральну формулу Коші (4.20), одержимо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Нехай $0 < \rho < \delta < d$. Оскільки функція $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$ аналітична у кільці, що обмежене колами γ_ρ і γ_δ, то за теоремою 4.5

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \int_{\gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Отже, c_n не залежить від вибору δ. ■

Відзначимо, що із (4.20) випливає рівність

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (5.9)$$

Тому степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ із коефіцієнтами (5.6) є рядом Тейлора для функції $f(z)$ в околі точки z_0. Його радіус збіжності не менший d.

Зокрема, ряд Тейлора для цілої функції збігається на $\mathbb{C}$.

Приклад 4. Розкласти функції e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$ в дяд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$.

Розв'язування. Оскільки функції e^z, $\sin z$, $\cos z$ є аналітичними в $\mathbb{C}$, то для $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

які одержуються повністю аналогічно до відповідних розкладів із дійсними змінними.

Для розкладу функції $\ln(1+z)$ використаємо ряд

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots,$$

який збіжний, якщо $|z| < 1$. Даний степеневий ряд можна інтегрувати в крузі $|z| < 1$:

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{d\xi}{\xi + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^z \xi^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Отже,

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

і отриманий ряд буде збіжний у крузі $|z| < 1$.

Приклад 5. Методом невизначених коефіцієнтів знайти перші три члени розкладу функції $f(z) = \frac{z}{\ln(1+z)}$ в степеневий ряд в околі точки $z = 0$.

Розв'язування. Функція $\ln(1+z)$ є аналітичною в точці $z = 0$, похідна відмінна від нуля, тоді $f(z) = \frac{z}{\ln(1+z)}$ аналітична в околі точки $z = 0$ і розкладається в степеневий ряд

$$f(z) = \frac{z}{\ln(1+z)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots.$$

Помноживши цей ряд на $\ln(1+z)$, одержимо

$$z = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots) \ln(1+z).$$

Даний степеневий ряд можна інтегрувати в крузі $|z| < 1$.

Оскільки $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$, то для знаходження коефіцієнтів розкладу одержимо рівність

$$z = \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots\right)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної z, одержуємо:

при z $\quad c_0 = 1$; при $\quad z^2 \quad 0 = -\frac{C_0}{2} + c_1,\ c_1 = \frac{1}{2}$; при $\quad z^3 \quad 0 = \frac{1}{3} c_0 - \frac{1}{2} c_1 + c_2$, $c_2 = -\frac{1}{12}$.

Отже, $\frac{z}{\ln(1+z)} = 1 + \frac{1}{2} z - \frac{1}{12} z^2 + \cdots$.

Наслідок 5.4. Якщо виконуються умови теореми 5.10, то

$$|c_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}, n = 0,1,2, \ldots,$$

де $M(\rho) = \max_{\zeta \in \gamma_\rho} |f(\zeta)|, 0 < \rho < d$.

Цю нерівність називають нерівністю Коші для коефіцієнтів ряду Тейлора.

Доведення. Із (5.6)

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\rho} \left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right| |d\zeta| \le \frac{M(\rho)}{\rho^n}, n = 0,1,2, \dots$$

■

Наслідок 5.5 (теорема Ліувілля). Якщо ціла функція має обмежений модуль, то вона є сталою.

Доведення. Нехай $n = 1,2, \dots$, $|f(z)| \le M$. Із наслідку 5.4

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n} \to 0, \ \ \rho \to \infty.$$

Отже $c_n = 0, \ \ n = 1,2, \dots$ і $f(z) = c_0$. ■

Наслідок 5.6. Нехай $f(z)$ ціла функція і для досить великих $|z|$ виконується нерівність $|f(z)| \le M|z|^n$, де $n \ge 0$ ціле число, $M > 0$ – стала. Тоді $f(z)$ є многочленом степені не вище n.

Доведення. Із (5.6) для $z_0 = 0$ одержуємо при $k > n$

$$|c_k| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\rho} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\right| |d\zeta| \le \frac{M}{\rho^{k-n}} \to 0, \ \ \rho \to \infty.$$

Тому $c_k = 0, k > n$. Отже, $f(z)$ є многочленом степені не вище n. ■

5.4. Узагальнені степеневі ряди. Ряди Лорана

Степеневий ряд вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{5.10}$$

називається *узагальненим* степеневим рядом ($c_n \in \mathbb{C}, n \in Z$).

Такий ряд можна зобразити у вигляді

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{c}_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \mathrm{c}_n (z - z_0)^n.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ називають правильною частиною, а ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ – головною частиною ряду (5.10).

Узагальнений степеневий ряд називається збіжним (рівномірно збіжним) на множині E, коли будуть збіжними (рівномірно збіжними) на множині E його правильна і головна частини.

Правильна частина $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ є звичайним степеневим рядом. Нехай R його радіус збіжності, тоді правильна частина буде збігатися у крузі $\{z: |z-z_0| < R\}$, де $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Головна частина $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$ заміною $\frac{1}{z-z_0} = t$ зводиться до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} t^n$. Якщо $R_1 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}}$ його радіус збіжності, то $\{t: |t| < R_1\}$ є його кругом збіжності. Із виконаної заміни випливає, що головна частина буде збіжним рядом в області $\left\{z: \left|\frac{1}{z-z_0}\right| < R_1\right\} = \{z: |z-z_0| > r\}$, де $r = \frac{1}{R_1}$,

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}.$$

Якщо $r > R$, то узагальнений степеневий ряд (5.10) буде розбіжний, якщо $r = R$, то узагальнений степеневий ряд може збігатися тільки в точках кола $|z-z_0| = r = R$. Якщо $r < R$, то областю збіжності узагальненого степеневого ряду буде кільце

$$\{z: r < |z-z_0| < R\},$$

де

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}, \qquad R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Із властивостей степеневого ряду одержимо, що для довільних r_1, R_1 $(r < r_1 < R_1 < R)$ узагальнений степеневий ряд (5.10) буде рівномірно збіжним у кільці $\{z: r_1 \le |z-z_0| \le R_1\}$.

Якщо $R = \infty$, то область збіжності узагальненого степеневого ряду буде зовнішність кола радіуса r: $\{z: |z-z_0| > r\}$. Якщо R скінченне, а $r = 0$, то областю збіжності буде круг $\{z: 0 < |z-z_0| < R\}$ за винятком точки z_0.

Приклад 6. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^{-|n|} z^n$.

Розв'язування. Подамо заданий ряд у вигляді суми головної і правильної частин:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^{-|n|} z^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} 3^{-|n|} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-|n|} z^n.$$

Для головної частини $\sum_{n=-1}^{-\infty} 3^{-|n|} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} z^{-n}$, $c_{-n} = 3^{-n}$. Знайдемо радіус збіжності

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{3^{-n}} = 3^{-1}.$$

Для правильної частини $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-|n|} z^n$, $c_n = 3^{-|n|} = 3^{-n}$. Тоді

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{3^{-n}}} = 3.$$

Отже, областю збіжності заданого ряду буде кільце

$$\{z : 3^{-1} < |z - z_0| < 3\}.$$

Теорема 5.11 (Лорана). Нехай функція $f(z)$ аналітична в кільці $K = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$. Тоді в кільці K функція $f(z)$ однозначно зображається у вигляді $f(z) = S(z) + T(z)$, де $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, який збігається в крузі $\{z : |z - z_0| < R\}$, а $T(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$, який збігається в $\{z : |z - z_0| > r\}$. Коефіцієнти c_n цих рядів визначаються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{5.11}$$

де $r < \rho < R$, $\gamma_\rho = \{z : |z - z_0| = \rho\}$,

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $z \in K$ і виберемо r_1 і R_1 ($r < r_1 < R_1 < R$) так, щоб $z \in K_1 = \{r_1 < |z - z_0| < R_1\}$. Нехай $\gamma_{r_1} = \{z : |z - z_0| = r_1\}$, $\gamma_{R_1} = \{z : |z - z_0| = R_1\}$ – кола, що обходяться проти годинникової стрілки.

За інтегральною формулою Коші (4.19) і за інтегральною теоремою Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

$$= S(z) + T(z), \tag{5.12}$$

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \tag{5.13}$$

$$T(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \qquad (5.14)$$

Нехай $\xi \in \gamma_{R_1}$. Враховуючи, що $q = \frac{|z - z_0|}{R_1} < 1$, розкладемо функцію $\frac{1}{\zeta - z}$ у степеневий ряд за додатними степенями $z - z_0$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

Тоді підінтегральна функція у (5.13) зобразиться у вигляді ряду

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}. \qquad (5.15)$$

Оскільки функція $f(\xi)$ аналітична в K і на γ_{R_1} виконується нерівність

$$\left|\frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right| \le \max_{\zeta \in \gamma_{R_1}} |f(\xi)| \frac{q^n}{R_1},$$

то за ознакою Вейєрштрасса ряд (5.15) рівномірно збіжний на γ_{R_1} і за теоремою 5.5 його можна почленно інтегрувати по γ_{R_1}. Із (5.13) і (5.15), враховуючи інтегральну формулу Коші (4.20), одержимо

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (5.16)$$

який збігається в крузі $\{z: |z - z_0| < R\}$, і

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \qquad n = 0,1,2, \dots \qquad (5.17)$$

Нехай $\xi \in \gamma_{r_1}$. Враховуючи, що $q_2 = \left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r_1}{|z - z_0|} < 1$, розкладемо функцію $\frac{1}{\zeta - z}$ у степеневий ряд за від'ємними степенями $z - z_0$

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_0 + z_0 - \xi} = \frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}.$$

Тоді підінтегральна функція у (5.14) зобразиться у вигляді ряду

$$-\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}. \tag{5.18}$$

Оскільки функція $f(\xi)$ аналітична в K і на γ_{r_1} виконується нерівність

$$\left|\frac{f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}\right| \leq \max_{\zeta \in \gamma_{r_1}} |f(\xi)| \frac{q_2^n}{r_1},$$

то за ознакою Вейєрштрасса ряд (5.18) рівномірно збіжний на γ_{r_1} і за теоремою 5.5 його можна почленно інтегрувати по γ_{r_1}. Із (5.14) і (5.18), враховуючи інтегральну формулу Коші (4.20), одержимо

$$T(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} d\xi =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (z - z_0)^n c_n, \tag{5.19}$$

який збігається в $\{z: |z - z_0| > r\}$, і

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, n = -1, -2, \ldots \tag{5.20}$$

Оскільки функція $\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ аналітична в кільці K при будь-якому цілому n, то за інтегральною теоремою Коші інтегрування у формулах (5.17) і (5.20) для c_n можна замінити інтегруванням по колу $\gamma_\rho = \{z: |z - z_0| = \rho\}, r < \rho < R$ (як і при доведенні теореми Тейлора)

$$\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Отже, в кільці K функція $f(z)$ зображається у вигляді

$$f(z) = S(z) + T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum\nolimits_{n=-1}^{-\infty} c_n \, (z - z_0)^n =$$
$$= \sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n,$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \, , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Доведемо однозначність. Припустимо протилежне, що аналітична в кільці K функція $f(z)$ зображається у вигляді $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n$. Помножимо обидва ряди на $(z - z_0)^{-(m+1)}$ і проінтегруємо по колу $\gamma_\rho = \{z : |z - z_0| = \rho\}, r < \rho < R$, це можна робити, бо на цьому колі ряди рівномірно збіжні. Тоді

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma_\rho} (z - z_0)^{n-m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\gamma_\rho} (z - z_0)^{n-m-1} dz.$$

Врахувавши (4.6),

$$\int_{\gamma_\rho} (z - z_0)^{n-m-1} dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{при } n = m, \\ 0, & \text{при } \ n \neq m. \end{cases}$$

Звідки одержимо $c_m = a_m$. Отже, функція розкладається в ряд однозначно.

■

Якщо $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, де $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$, то такий *ряд називається рядом Лорана*, а така рівність називається *розкладом функції* $f(z)$ *в ряд Лорана в кільці* $\{z : r < |z - z_0| < R\}$.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області $\{z : 0 < |z| < \infty\}$, яку можна розглядати як проколотий окіл і точки $z = 0$ і точки $z = \infty$. В цій області $f(z)$ можна розкласти в ряд $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, z^n$, який є рядом Лорана для $f(z)$ як в околі точки $z = 0$, так і в околі точки $z = \infty$, але з різними головними і правильними частинами. До головної частини належать ті члени, які прямують до ∞ при $z \to z_0$ $(z \to \infty)$.

Приклад 7. Розкласти функцію $f(z) = z^2 e^{1/z}$ в степеневий ряд в околі точки $z = 0$.

Розв'язування. Функція $e^{1/z}$ в точці $z = 0$ не визначена, тому в ряд Тейлора її не можна розкласти. У ряді

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

який буде збіжним у будь-якій точці $z \in \mathbb{C}$, замінимо z на $1/z$

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \cdots + \frac{1}{z^n n!} + \cdots,$$

а потім помножимо на z^2, тоді для $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$f(z) = z^2 e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \cdots + \frac{1}{z^{n-2} \cdot n!} + \cdots$$

5.5. Теорема єдиності і принцип максимуму модуля аналітичної функції

Теорема 5.12. Нехай $f(z)$ аналітична в області $G \subset \mathbb{C}$ функція, E – нескінченна підмножина із G, що має граничну точку $z_0 \in G$. Якщо $f(z) = 0$ для будь-якого $z \in E$, тоді $f(z) = 0$ для будь-якого $z \in G$.

Доведення. Нехай $z_0 \in G$ – гранична точка $E \subset G$. Тому існує послідовність точок множини $z_n \in E$ $(n \in N)$ і $z_n \to z_0$. Функція $f(z)$ аналітична в G, тому неперервна в області G. Тоді $0 = f(z_n) \to f(z_0) = 0$. За теоремою Тейлора існує окіл точки z_0 $U(z_0, \delta) \subset G$, у якому $f(z)$ може бути розкладена в степеневий ряд

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots.$$

Із рівності $f(z_0) = 0$ випливає, що $c_0 = f(z_0) = 0$. Покажемо, що всі коефіцієнти цього ряду рівні 0. Припустимо, що існує $m \geq 1$, що $c_m \neq 0$. Тоді

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots =$$
$$= (z - z_0)^m (c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \cdots).$$

Степеневий ряд $c_m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots = \varphi(z)$ буде збіжним в $U(z_0, \delta)$. Тому $\varphi(z)$ – аналітична функція в $U(z_0, \delta)$. Оскільки $\varphi(z_0) = c_m \neq 0$, то існує

$U(z_0, \delta_1)$, що $\varphi(z) \neq 0$ в $U(z_0, \delta_1)$. Нехай $\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\}$. Тоді одержимо, що в $U(z_0, \delta_2)$ для $z \neq z_0$

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \varphi(z) \neq 0.$$

Це протирічить умові, що z_0 є граничною точкою множини E. Одержане протиріччя показує, що $c_m = 0$ для довільного $m \in N$. Отже, $f(z) = 0$ для довільного $z \in U(z_0, \delta)$.

Нехай ξ – довільна точка області G, G – зв'язна множина, тому існує ламана лінія $L \subset G$, що з'єднує z_0 і ξ. Нехай $\rho = \min\{\delta, d\}$, де d віддаль від L до G. Точки $z_0, z_1, \dots, z_n = \xi$ на L виберемо так, щоб $z_{s+1} \in U(z_s, \rho)$ $(s = 0,1, \dots, n-1)$. При $s = 0$ твердження уже доведено. Припустимо, що $f(z) = 0$ в крузі $U(z_s, \rho)$ $(s \leq n-1)$. Оскільки $z_{s+1} \in U(z_s, \rho)$, $U(z_s, \rho) \cap U(z_s, \rho) \neq \emptyset$ і z_{s+1} є граничною точкою нескінченної множини $U(z_s, \rho)$, на якій $f(z) = 0$, то, за доведеним на початку теореми, $f(z) = 0$ в $U(z_{s+1}, \rho)$. Отже, $f(z) = 0$ в $U(z_n, \rho) = U(\xi, \rho)$, зокрема, $f(\xi) = 0$. ■

Наслідок 5.7. Нехай $f(z)$ і $g(z)$ аналітичні в області $G \subset \mathbb{C}$ функції, E – нескінченна підмножина із G, що має граничну точку $z_0 \in G$. Якщо $f(z) = g(z)$ для будь-якого $z \in E$, тоді $f(z) = g(z)$ для будь-якого $z \in G$.

Теорема 5.13. Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в області $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ і $|f(z)|$ досягає локального максимуму в деякій точці $z_0 \in G$, то $f(z)$ є тотожно сталою в області G.

Доведення. Нехай в точці $z_0 \neq \infty$ $|f(z)|$ досягає локального максимуму. Тоді для довільного $z \in G$ виконується $|f(z)| \leq |f(z_0)| = M$. Розглянемо деякий окіл точки z_0 $U(z_0, \delta) \subset G$ і коло $\gamma_\rho = \{z: |z - z_0| = \rho\}$ $(\rho \leq \delta)$. За інтегральною формулою Коші

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Тоді

$$M = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi i} \left| \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{\gamma_\rho} |f(z)||dz|.$$

Оскільки $2\pi\rho = \int_{\gamma_\rho} |dz|$, то $M\int_{\gamma_\rho} |dz| \le \int_{\gamma_\rho} |f(z)||dz|$. Звідси,

$$\int_{\gamma_\rho} (|f(z)| - M)|dz| \ge 0.$$

Із припущення $|f(z)| \le M$ випливає, що одержана нерівність можлива лише тоді, коли для точок на колі γ_ρ $|f(z)| = M$. А це означає, що в $U(z_0, \delta)$, а за теоремою єдиності, і в області G, функція $f(z)$ є сталою. Якщо $z_0 = \infty$, то $f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналітична в точці $z = 0$ і $|f\left(\frac{1}{z}\right)|$ досягає локального максимуму в цій точці. За доведеним $f\left(\frac{1}{z}\right)$ є сталою, тому і функція $f(z)$ є сталою в області G. ■

Із теореми випливає, що максимум модуля функції, що аналітична в області G і неперервна в її замиканні, може досягатися тільки на межі області G.

5.6. Нулі аналітичних функцій

Нехай функція $f(z)$ аналітична в G. Точка $z_0 \in G$ називається *нулем* функції $f(z)$, якщо $f(z_0) = 0$. Точка z_0 називається *нулем m-го порядку* функції $f(z)$, якщо $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \ne 0$. Точка z_0 називається нулем нескінченного порядку функції $f(z)$, якщо $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m)}(z_0) = \cdots = 0$.

Точка $z_0 = \infty$ є нулем (нулем m-го порядку) функції $f(z)$, якщо точка $z = 0$ є нулем (нулем m-го порядку) функції $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Теорема 5.14. Для того, щоб точка z_0 була нулем функції $f(z)$ необхідно і достатньо, щоб $f(z)$ в околі z_0 можна було зобразити у вигляді:

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \tag{5.21}$$

де $\varphi(z_0) \ne 0$ і $\varphi(z)$ – аналітична в околі точки z_0.

Доведення. Необхідність. Точка z_0 є нулем m-го порядку функції $f(z)$, тоді її можна розкласти в деякому околі точки z_0 в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

де $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Із умов $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ одержуємо $c_0 = f(z_0) = 0$, $c_1 = f'(z_0) = 0$, $c_{m-1} = \frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = 0$, $c_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$. Тоді

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

де

$$\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \cdots$$

Тому $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z)$ – аналітична, $\varphi(z_0) = c_m \neq 0$. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай має місце зображення (5.21), $\varphi(z)$ – аналітична, $\varphi(z_0) \neq 0$. Тоді $\varphi(z)$ можна розкласти в деякому околі точки z_0 в степеневий ряд $\varphi(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, a_0 \neq 0$. Покладемо $a_0 = c_m$, $a_1 = c_{m+1}, \ldots$ і помножимо $\varphi(z)$ на $(z - z_0)^m$, в результаті чого одержимо степеневий ряд $f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots$. Оскільки цей ряд є рядом Тейлора для $f(z)$, а для коефіцієнтів ряду Тейлора $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, то $c_0 = f(z_0) = 0, c_1 = f'(z_0) = 0, \ldots, c_{m-1} = \frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = 0, c_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$. Отже, z_0 є нулем m-го порядку. Достатність доведена. ■

Теорема 5.15. Нехай $z_0 \in G$ є нулем нескінченного порядку аналітичної в області G функції $f(z)$. Тоді $f(z) = 0$ у всій області G.

Доведення. Функція $f(z)$ аналітична в G. Існує окіл $U(z_0, \delta) \subset G$, в якому $f(z)$ розкладається в степеневий ряд Тейлора

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots.$$

Але $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \cdots = 0$. Тому $f(z) = 0$ в усіх точках $U(z_0, \delta)$. За теоремою єдиності $f(z) = 0$ у всій області G. ■

Теорема 5.16. Якщо $f(z)$ не є тотожно сталою аналітична в області G і $z_0 \in G$ є нулем функції $f(z)$, то існує окіл $U(z_0, \delta)$, у якому $f(z)$ інших нулів немає.

Випливає із теореми 5.12.

Із теореми 5.14 безпосередньо випливає наступний наслідок.

Наслідок 5.8. Для того, щоб точка $z_0 \in G$ була нулем m-го порядку $f(z)$ необхідно і достатньо, щоб в розкладі функції $f(z)$ в степеневий ряд в околі z_0 виконувались умови $c_0 = \cdots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$.

Наслідок 5.9. Нехай z_0 є нулем m-го порядку функції $f(z)$ і нулем n-го порядку функції $g(z)$. Тоді z_0 буде нулем $(m+n)$-го порядку для добутку функцій $f(z)g(z)$. І якщо $m > n$, то z_0 буде нулем $(m-n)$-го порядку для $\frac{f(z)}{g(z)}$.

Доведення. Якщо $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, де $\varphi(z_0) \neq 0$ і $\varphi(z)$ – аналітична в околі точки z_0, а $g(z) = (z - z_0)^n \omega(z)$, де $\omega(z_0) \neq 0$ і $\omega(z)$ – аналітична в околі точки z_0, тому справедливість наслідку випливає із наступних рівностей

$$f(z)g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)(z - z_0)^n \omega(z) = (z - z_0)^{m+n} \varphi(z)\omega(z),$$

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z - z_0)^m \varphi(z)}{(z - z_0)^n \omega(z)} = (z - z_0)^{m-n} \frac{\varphi(z)}{\omega(z)},$$

де $\varphi(z)\omega(z)$ і $\frac{\varphi(z)}{\omega(z)}$ – аналітичні в околі точки z_0 функції, $\varphi(z_0)\omega(z_0) \neq 0$ і $\frac{\varphi(z_0)}{\omega(z_0)} \neq 0$. ■

Наслідок 5.10. Якщо $f(z)$ не є тотожно сталою аналітична в G, а F – будь-яка компактна підмножина G, то число нулів, які попадають в множину F є скінченна.

Наслідок 5.11. Якщо $f(z)$ аналітична в G і не є тотожно сталою, то нулі функції $f(z)$ можуть мати граничну точку тільки на межі області G (на ∂G).

5.7. Ізольовані особливі точки аналітичних функцій

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ називається *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, якщо $f(z)$ аналітична в деякому проколотому околі точки z_0 $\{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$, а в самій точці z_0 не визначена або не аналітична.

Точка $z_0 = \infty$ називається *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, якщо $f(z)$ аналітична в деякій множині $\{z: R < |z - z_0| < \infty\}$.

Ізольована особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ називається *усувною особливою точкою*, якщо існує $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$;

полюсом, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;

істотно (суттєво) особливою, якщо при $z \to z_0$ границя функції $f(z)$ не існує (ні скінченна, ні нескінченна).

Наприклад, функція $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ в точці $z = 0$ невизначена, тому $z = 0$ – особлива точка. Але існує скінченна грагиця $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, тому $z = 0$ – усувна особлива точка.

Функція $f_1(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0 \end{cases}$ буде аналітичною в точці $z = 0$.

Для функції $f(z) = \frac{1}{z}$ точка $z = 0$ є полюсом, бо $\lim\limits_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty$.

Для функції $f(z) = e^{1/z}$ точка $z = 0$ є істотно особливою точкою, бо $\lim\limits_{z \to 0} e^{1/z}$ – не існує.

Теорема 5.17 (про усувну особливу точку). Нехай $f(z)$ аналітична в проколотому околі $\{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$, тоді наступні твердження рівносильні:

1) точка z_0 – усувна особлива точка функції $f(z)$;

2) існує окіл точки z_0, в якому $f(z)$ обмежена;

3) розклад $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0 містить тільки правильну частину.

Доведення. Нехай z_0 – усувна особлива точка, тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \in \mathbb{C}$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$, що для довільного z, для якого $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(z)| - |A| \leq |f(z) - A| < \varepsilon$. Звідки, $|f(z)| < |A| + \varepsilon$, а це означає, що $f(z)$ обмежена в деякому околі точки z_0. Отже, 1) $\Rightarrow$ 2).

Доведемо, що із 2) ⇒ 3). Нехай $f(z)$ аналітична в проколотому околі $\{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$ і існує $M > 0$, що для довільного $z \in \{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$ $|f(z)| \le M$. Тому за теоремою Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, де $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ для довільного $0 < \rho < \delta$. Тоді при $n = -1, -2, -3, \dots$,

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n} \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, $c_n = 0$ при $n \le -1$ і в ряді Лорана головної частини немає.

Доведемо, що із 3) ⟹ 1). Нехай $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n (z - z_0)^n + \cdots$. Тоді $f(z)$ як сума степеневого ряду є аналітичною в деякому крузі $\{z: |z - z_0| < \delta\}$. Тому існує $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = c_0 < \infty$. ■

Надалі для усувної особливої точки z_0 будемо покладати

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Теорема 5.18. Для того, щоб точка $z = z_0$ була полюсом функції $f(z)$ необхідно і достатньо, щоб вона була нулем функції $\frac{1}{f(z)}$.

Доведення. Позначимо $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Нехай $z = z_0$ є полюсом функції $f(z)$. Тоді $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ і існує окіл $\{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$, у якому функція $f(z)$ аналітична і $f(z) \ne 0$. Звідси випливає, що функція $g(z)$ буде аналітична в цьому околі і $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$. Покладаючи $g(z_0) = 0$, функція $g(z)$ буде аналітична в околі $\{z: |z - z_0| < \delta\}$ і $g(z_0) = 0$. Отже, точка z_0 буде нулем функції $g(z)$.

Навпаки. Нехай точка z_0 є нулем функції $g(z)$. Тоді $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} = \infty$. З чого випливає, що z_0 є полюсом функції $f(z)$. ■

Тому природним є наступне означення: точка z_0 називається *полюсом m-го порядку* функції $f(z)$, якщо z_0 є нулем m-го порядку функції $\frac{1}{f(z)}$.

Теорема 5.19. Для того, щоб точка z_0 була полюсом m-го порядку функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб існував окіл точки z_0, в якому справедлива рівність $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, де $\varphi(z)$ – аналітична і $\varphi(z_0) \neq 0$.

Доведення. Достатність. $\varphi(z)$ – аналітична і $\varphi(z_0) \neq 0$. Тоді

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^m}{\varphi(z)} = (z-z_0)^m \psi(z)\text{ , де } \psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Оскільки $\varphi(z)$ – аналітична і $\varphi(z_0) \neq 0$, то аналітичною буде $\psi(z)$ і $\psi(z_0) \neq 0$. На основі теореми 5.14, z_0 є нулем m-го порядку функції $g(z)$. Отже, z_0 є полюсом m-го порядку функції $f(z)$. Достатність доведена.

Необхідність. Нехай z_0 є полюсом m-го порядку $f(z)$. Із означення випливає, що z_0 буде нулем m-го порядку $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. За теоремою 5.14 $g(z) = \frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \psi(z)$, $\psi(z_0) \neq 0$. Із цієї рівності $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m \psi(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, $\varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)}$, $\varphi(z)$ – аналітична і $\varphi(z_0) \neq 0$. Необхідність доведена.

■

Теорема 5.20. Для того, щоб точка z_0 була полюсом m-го порядку аналітичної функції $f(z)$ необхідно і достатньо, щоб головна частина розкладу $f(z)$ в ряд Лорана в околі z_0 містила скінченну кількість членів відмінних від нуля. $c_{-m} \neq 0, c_{-m-1} = c_{-m-2} = \cdots = 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай z_0 – полюс m-го порядку. Тоді за теоремою 5.19 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, $\varphi(z)$ – аналітична, $\varphi(z_0) \neq 0$. Це означає, що $\varphi(z)$ можна розкласти у ряд Тейлора $\varphi(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$. Тоді

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots \Rightarrow c_{-m} = a_0 \neq 0.$$

Необхідність доведена.

Достатність. Нехай головна частина розкладу $f(z)$ в ряд Лорана в околі z_0 містить скінченну кількість членів відмінних від нуля:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

де $\varphi(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots$ є аналітичною функцією в околі точки z_0, $\varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0$. За теоремою 5.19 z_0 є полюсом m-го порядку $f(z)$. Достатність доведена. ■

Випадок $z_0 = \infty$ зводиться до дослідження функції $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Приклад 8. Довести, що точка $z = 0$ є полюсом функції $f(z) = \frac{1}{\sin z - z}$, знайти його порядок.

Розв'язування. Точка $z = 0$ є особливою точкою функції $f(z)$, бо в цій точці функція невизначена. Розглянемо функцію

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \sin z - z = -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots.$$

За наслідком 5.8 точка $z = 0$ є нулем третього порядку функції $g(z)$. Отже, $z = 0$ є полюсом 3-го порядку функції $f(z)$.

Теорема 5.21. Для того, щоб точка z_0 була істотною особливою точкою функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб у розкладі $f(z)$ в ряд Лорана в головній частині містилась нескінченна кількість членів.

Доведення. Нехай z_0 – істотно особлива точка. Припустимо, що в ряд Лорана входить не більше ніж скінченна кількість членів в головній частині. Тоді за теоремою 5.20 точка z_0 є полюсом, а якщо головної частини нема, то z_0 – усувна особлива точка. Одержали протиріччя.

Навпаки. Нехай головна частина ряду Лорана містить нескінченну кількість членів. Тоді z_0 не може бути ні полюсом, ні усувною особливою точкою. Отже, z_0 істотно особлива точка.

Теорема 5.22 (Сохоцького). Нехай z_0 – істотно особлива точка $f(z)$. Тоді для довільного $A \in \overline{\mathbb{C}}$ існує послідовність $\{z_n\}$ така, що $z_n \to z_0$, а $f(z_n) \to A$, $n \to \infty$.

Доведення. Нехай $A = \infty$. Із того, що z_0 – істотно особлива точка, границя не існує. На основі теореми про особливу усувну точку випливає, що в околі точки z_0 функція $f(z)$ – необмежена в будь-якому околі точки z_0. Розглянемо довільний окіл точки z_0: $|z - z_0| < \frac{1}{n}$, $\delta = \frac{1}{n}$. Для кожного $\delta = \frac{1}{n}$ існує така точка z_n, що $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ і $|f(z_n)| \geq n$. Побудована послідовність $z_n \longrightarrow z_0$ при $n \to \infty$ і $|f(z_n)| \to \infty$. У випадку $A = \infty$ теорема доведена.

Нехай $A \in \mathbb{C}$. Тоді розглянемо рівняння $f(z) = A$. Можливі 2 випадки.

а) В довільному околі точки z_0 дане рівняння має корені.

б) Існує окіл точки z_0, в якому дане рівняння не має коренів.

а) Розглянемо довільний окіл $|z - z_0| < \frac{1}{n}$, існує z_n, що $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ і $f(z_n) = A$. Із визначення послідовності $\{z_n\}$ випливає: $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$, а $f(z_n) = A$. Отже, $f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$. В цьому випадку теорема доведена.

б) Існує окіл $0 < |z - z_0| < \delta$, в якому рівняння не має коренів, а функція $f(z)$ – аналітична. В такому околі аналітичною буде функція $f(z) - A$ і $f(z) - A \neq 0$. Тому аналітичною буде $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$; $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$. Із того, що z_0 – істотно особлива точка функції $f(z)$ випливає, що z_0 буде істотно особливою точкою для $\varphi(z)$. В протилежному випадку ми б одержали протиріччя. За доведеним, існує послідовність точок $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$, що $\varphi(z_n) \to \infty$. Звідки випливає, що $f(z_n) = A + \frac{1}{\varphi(z_n)} \to A$. ■

5.8. Поняття про аналітичні продовження

Нехай функція $f(z)$ задана на множині $E \subset \mathbb{C}$ і область D містить множину E ($E \subset D$). Якщо функція $F(z)$ є аналітичною в області D і $F(z) = f(z)$ для всіх $z \in E$, то її називають *аналітичним продовженням функції* $f(z)$ із множини E в область D.

Наприклад, аналітичним продовженням функцій дійсної змінної e^x, $\sin x$, $\cos x$ (функцій, що визначені тільки на множині $E = R$) є функції e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексної змінної z, що аналітичні в області $D = \mathbb{C}$ і співпадають на R з відповідними функціями дійсної змінної. Це продовження можна здійснити заміною дійсної змінної x у розкладах цих функцій у степеневий ряд комплексною змінною z, відзначаючи, що одержані ряди будуть збіжні в $\mathbb{C}$.

Функціональним елементом називається пара $\{G, f\}$, де G – опукла область, а $f(z)$ – аналітична в області G функція. Два елементи $\{G_1, f_1\}$ і $\{G_2, f_2\}$ тотожні, якщо $G_1 = G_2$ і $f_1(z) = f_2(z), \forall\, z \in G_1$. Якщо області G_1 і G_2 мають непорожній перетин і в їх спільній частині функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ співпадають, то елементи $\{G_1, f_1\}$ і $\{G_2, f_2\}$ називають *безпосереднім аналітичним продовженням* один одного. Або, наприклад, функція $f_2(z)$ є безпосереднім аналітичним продовженням функцій $f_1(z)$ з області G_1 в область G_2. Вимога опуклості областей гарантує однозв'язність їх перетину.

Наприклад, нехай $G_1 = \{z: |z| < 1\}$, $G_2 = \{z: |z - i| < \sqrt{2}\}$ і

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-i}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n,$$

тоді $D = G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Оскільки в області D виконуються умови $|z| < 1$ і $|z - i| < |1 - i| = \sqrt{2}$, то в D маємо $f_1(z) = \frac{1}{1-z}$ і $f_2(z) = \frac{1}{1-i}\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} = \frac{1}{1-z}$. Отже, функціональні елементи $\{G_1, f_1\}$ і $\{G_2, f_2\}$ є безпосереднім аналітичним продовженням один одного. Розглянемо функціональний елемент $\{G_3, f_3\}$, де $G_3 = \overline{\mathbb{C}} \backslash \{1\}$, $f_3(z) = \frac{1}{1-z}$. Тоді функціональний елемент $\{G_3, f_3\}$ буде аналітичним продовженням кожного із функціональних елементів $\{G_1, f_1\}$ і $\{G_2, f_2\}$.

Теорема 5.23. Якщо $\{G_2, f_{21}\}$ і $\{G_2, f_{22}\}$ є безпосереднім аналітичним продовженням елемента $\{G_1, f_1\}$, то для будь-якого $z \in G_2$ $f_{21}(z) = f_{22}(z)$.

Доведення. Оскільки $D = G_1 \cap G_2 \subset G_2$, то для будь-якого $z \in D$ $f_1(z) = f_{21}(z)$ і $f_1(z) = f_{22}(z)$. Тому для будь-якого $z \in D$ $f_{21}(z) = f_{22}(z)$ і за теоремою 5.12 для будь-якого $z \in G_2$ $f_{21}(z) = f_{22}(z)$. ■

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області G і $z_0 \in \partial G$. Якщо існує круг $K = \{z: |z - z_0| < r\}$ такий, що з кожної зв'язної компоненти перетину $K \cap G$ функцію $f(z)$ можна безпосередньо аналітично продовжити на K, то кажуть, що $f(z)$ безпосередньо аналітично продовжувана через точку z_0.

Наприклад, функцію $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ можна безпосередньо аналітично продовжити через кожну точку кола $|z|=1$, крім точки $z=1$.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області G і $z_0 \in \partial G$. Якщо через точку z_0 функцію $f(z)$ не можна безпосередньо аналітично продовжити, то z_0 називають особливою точкою елемента $\{G, f\}$ або функції $f(z)$.

Теорема 5.24. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ має радіус збіжності R $(0<R<\infty)$, то на колі $\{z: |z-z_0|=R\}$ існує принаймні одна особлива точка його суми.

Доведення. Нехай $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $K_0=\{z: |z-z_0|<R\}$. Припустимо протилежне, на колі ∂K_0 функція $f(z)$ не має особливих точок. Тоді її можна безпосередньо аналітично продовжити через кожну точку кола ∂K_0. Отже, існує система кругів із центрами на ∂K_0, яка покриває ∂K_0, і в кожний круг цієї системи функцію $f(z)$ можна безпосередньо аналітично продовжити. Оскільки ∂K_0 – компактна множина, то можна виділити скінченну підсистему кругів $K_1, \dots, K_n$, яка має вказані властивості.

Нехай $f_0(z)=f(z)$, $f_j(z)$ безпосереднє аналітичне продовження $f(z)$ на K_j. Розглянемо область $G=\bigcup_{j=0}^{n} K_j$, а в ній функцію $F(z)=\{f_j(z), \mathrm{z} \in K_j\}$. Покажемо, що $F(z)$ однозначна функція. Якщо $\mathrm{z} \in K_0$, то $F(z)=f_0(z)$ – однозначна. Оскільки для $\mathrm{z} \in K_j \cap K_l \cap K_0$ $f_j(z)=f_l(z)=f_0(z)$, то для $\mathrm{z} \notin K_0$ і $\mathrm{z} \in K_j \cap K_l$ за теоремою 5.12 $f_j(z)=f_l(z)$. Отже $F(z)$ однозначна в G. Множини ∂K_0 і ∂G – замкнені, тоді віддаль між ними $\delta>0$. Оскільки $K=\{z: |z-z_0|<R+\delta\} \subset G$, а функція $F(z)$ аналітична в G, то за теоремою Тейлора вона розкладається у крузі K в степеневий ряд із радіусом збіжності, який не менший $R+\delta$. Але в крузі K_0 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, а це означає, що радіус збіжності заданого ряду більший за R, що неможливо. ■

Із теореми випливає: якщо функція $f(z)$ розкладається в деякому околі точки z_0 в степеневий ряд, то його радіус збіжності дорівнює віддалі від z_0 до найближчої особливої точки функції $f(z)$.

Кажуть, що елементи $\{G_1, f_1\}, \{G_2, f_2\}, \dots, \{G_n, f_n\}$ утворюють ланцюг аналітичних продовжень, якщо кожна пара двох сусідніх елементів є безпосереднім продовженням один одного. Якщо існує деякий ланцюг, що сполучає елементи $\{G, f\}$ і $\{D, g\}$, то ці елементи називають аналітичними продовженнями один одного.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області G. Здійснимо аналітичні продовження цієї функції по всіх можливих ланцюгах областей. Об'єднаємо одержані в результаті цих продовжень значення в одну (можливо многозначну) функцію, її називають *повною аналітичною функцією*.

5.9. Вправи до розділу 5

5.1. Знайти області збіжності рядів

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right);\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z(z+n)}{n}\right)^n;\quad c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n};\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}.$$

5.2. Довести, що заданий ряд рівномірно збіжний на E:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2z^{2n}},\quad E=\{z\colon |z|\geq 1\};$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{zn},\quad E=\{z\colon Re\, z\geq\delta>0\};$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right),\quad E=\{z\colon |z|=1\};$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2},\quad E=\{z\colon |z|\leq R<\infty\}.$$

5.3. Знайти радіус збіжності степеневого ряду:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n;\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}z^{2^n};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(3+(-1)^n)^n z^n;\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(1+i^n)^n z^n;$$

$$e)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{3}\right)^n z^n;\quad f)\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{tg} in)^n z^n;\quad g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n;\quad h)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\sin ni)z^n.$$

5.4. Знайти круг збіжності степеневого ряду:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{2^n+in};\quad b)\sum_{n=0}^{\infty}z^n;\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2};\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^n;\quad e)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln^2 n}z^n.$$

5.5. Радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ дорівнює R $(0<R<\infty)$. Знайти радіус збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)c_n z^n.$$

5.6. Розкласти функції в ряд Тейлора за степенями z і знайти радіус збіжності:

$$a)\ sh\,z;\quad b)\ ch\,z;\quad c)\ \frac{1}{(1+z)^3};\quad d)\ \frac{z^2}{(1+z)^2};\quad e)\ \frac{1}{(1+z^2)^2};$$

$$f)\ \frac{z}{z^2-4z+13};\quad g)\ \frac{1}{(z^2-1)^2(z^2-4)};\quad h)\ \ln\frac{1+z}{1-z};$$

$$i)\ \arcsin z;\quad j)\ arctg\,z;\quad k)\ sin^2 z;\quad l)\ cos^2 z;$$

$$m)\ ch\,z\cdot\cos z;\quad n)\ cos^2 z+ch^2 z;\quad o)\ cos^4 z+sin^4 z;\quad p)\ e^z\cos z.$$

5.7. Розкласти функції в степеневий ряд за степенями $z-z_0$ та вказати радіус збіжності:

$$a)\ \frac{z}{z+2},\ \ z_0=0;\quad b)\ \frac{1}{2z+3},z_0=1;\quad c)\ \frac{z-i}{z+i},z_0=i;$$

$$d)\ \frac{z}{z^2-2z+5},z_0=1;\quad e)\ \frac{z}{(z^2+1)(z-1)},z_0=-1;$$

$$f)\ \cos z,z_0=\frac{\pi}{4};\quad g)\ \sin(2z-z^2),\ \ z_0=1.$$

5.8. За допомогою методу невизначених коефіцієнтів знайти перші три члени розкдаду функції $\frac{z}{\arcsin z}$ в ряд Тейлора за степенями z.

5.9. Знайти порядок нуля $z=0$ для функції:

$$a)\ z^2\left(e^{z^2}-1\right);\quad b)\ 6\sin z^3+z^3(z^6-6);\quad c)\ e^{\sin z}-e^{tg\,z}.$$

5.10. Знайти порядки всіх нулів заданих функцій:

$$a)\ e^{z-i}-1;\quad b)\ e^{2z}-3e^z-2;\quad c)\ 1-\cos z;\quad d)\ e^{tg\,z};\quad e)\ sin^2 z+\sin z;$$

$$f)\ \frac{sin^2(z-1)}{\cos\frac{\pi z}{2}};\quad g)\ \frac{1-\cos z^2}{1+\cos z};\quad h)\ e^{\frac{1}{z}}-1;\quad i)\ \frac{(z^2-9)^2(z-1)^3}{z^2-4z+3};$$

$$j)\ \left(1-\sqrt{2-2\cos z}\right)^2.$$

5.11. Знайти область збіжності ряду Лорана:

$$a)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}z^n;\quad b)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n z^n;\quad c)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1};\quad d)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{ch\,2n};$$

$$e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,z^{n-3}};\quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}};\quad g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}.$$

5.12. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в кільці Q:

$$a)\ f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)},\quad Q = \{z: 1 < |z| < 2\};$$

$$b)\ f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z+2)},\quad Q = \{z: 1 < |z| < 2\};$$

$$c)\ f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)},\quad Q = \{z: 1 < |z| < 2\};$$

$$d)\ f(z) = \frac{1}{z(z-3)},\quad Q = \{z: 1 < |z-1| < 2\};$$

$$e)\ f(z) = \frac{1}{(z^2-9)z^2},\quad Q = \{z: 1 < |z-1| < 2\};$$

$$f)\ f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2},\quad Q = \{z: |z| > 2\};$$

$$g)\ f(z) = \frac{1}{(z^2-4)^2},\quad Q = \{z: |z+2| > 4\}.$$

5.13. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z_0:

$$a)\ f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)},\quad z_0 = 0;$$

$$b)\ f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)},\quad z_0 = -1;$$

$$c)\ f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2},\quad z_0 = i;$$

$$d)\ f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2},\quad z_0 = \infty;$$

$$e)\ f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z^3},\quad z_0 = 0;$$

$$f)\ f(z) = \frac{1+cos^2 z}{z^4},\quad z_0 = \infty;$$

$$g)\ f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z-1}, \quad z_0 = 1;$$

$$h)\ f(z) = \cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}, \quad z_0 = 2.$$

5.14. Довести, що точка z_0 є усувною особливою точкою функції $f(z)$

$$a)\ f(z) = \frac{1-\cos\frac{1}{z}}{\sin\frac{1}{z}}, \quad z_0 = \infty;$$

$$b)\ f(z) = ctg\, z - \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0.$$

5.15. Знайти полюси функції $f(z)$ і визначити їх порядок

$$a)\ f(z) = \frac{\cos z}{(z^2-z-2)^2}; \quad b)\ f(z) = \frac{1}{2-\cos z};$$

$$c)\ f(z) = \frac{z}{1+e^z}; \quad d)\ f(z) = \operatorname{tg}\pi z; \quad e)\ f(z) = \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{sin^2(z-1)}.$$

5.16. Довести, що точка z_0 є істотно особливою точкою функції $f(z)$

$$a)\ f(z) = \sin z + e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = \infty;$$

$$b)\ f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = 0;$$

$$c)\ f(z) = \sin\frac{\pi}{z^2+1}, \quad z_0 = -i.$$

5.17. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ і визначити їх тип

$$a)\ f(z) = \frac{1-e^z}{1+e^z}; \quad b)\ f(z) = \frac{z}{\sin z}; \quad c)\ f(z) = \frac{z^3}{sin^2\frac{1}{z+1}};$$

$$d)\ f(z) = \frac{1-\cos z}{sin^2 z}; \quad e)\ f(z) = z\left(e^{\frac{1}{z}} - 1\right).$$

Розділ 6. Лишки і деякі їх застосування

6.1. Лишки. Основна теорема про лишки

Нехай функція $f(z)$ аналітична в проколотому околі точки $z_0 \in \mathbb{C}$ $(0 < |z - z_0| < \delta)$, для якої точка z_0 є ізольованою особливою точкою.

Означення 6.1. Нехай $0 < r < \delta$, $\gamma_r = \{z: |z - z_0| = r\}$. Інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{dz}$$

називається *лишком* функції $f(z)$ в точці z_0 і позначається $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{dz}\,. \qquad (6.1)$$

Означення 6.2. Нехай $z_0 = \infty$ – ізольована особлива точка функції $f(z)$, тобто існує окіл $\{z: |z| > R\}$, у якому функція $f(z)$ аналітична. Нехай $R < r < \infty$, тоді

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\mathrm{dz}$$

називається *лишком* функції $f(z)$ в точці $z_0 = \infty$:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\mathrm{dz}\,. \qquad (6.2)$$

Теорема 6.1 (Коші). Нехай функція $f(z)$ аналітична в області G, що обмежена скінченним числом замкнених жорданових кривих, за винятком скінченої кількості точок $z_1, z_2, \dots, z_m$ цієї множини, неперервна на межі ∂G. Тоді

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} f(z)\mathrm{dz} = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (6.3)$$

Доведення. За умовою теореми точок $z_1, z_2, \dots, z_m$ скінченна кількість. А тому можна вибрати околи $\{z: |z - z_k| < r_k\} = U(z_k, r_k)$ $(k = 1, \dots, m)$ цих точок такими, щоб $\overline{U(z_k, r_k)}$, $k = 1, \dots, m$ повністю лежали в області G і попарно не перетиналися. Тоді в області

$$D = G \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{U(z_k, r_k)}$$

функція $f(z)$ буде аналітичною і за інтегральною теоремою Коші

$$\int_{\partial D} f(z) \mathrm{dz} = \int_{\partial G} f(z) \mathrm{dz} - \sum_{k=1}^{m} \int_{\partial U(z_k, r_k)} f(z) \mathrm{dz} = 0.$$

Тому

$$\int_{\partial G} f(z) \mathrm{dz} = \sum_{k=1}^{m} \int_{\partial U(z_k, r_k)} f(z) \mathrm{dz} = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

■

Доведену теорему називають *основною теоремою про лишки*.

Наслідок 6.1. Якщо функція $f(z)$ аналітична в усій комплексній площині $\mathbb{C}$ за винятком скінченної кількості точок $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, m-1$ і $z_m = \infty$, тоді

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Доведення. Виберемо такий круг $|z| < R$, щоб він містив всі точки $z_1, \dots, z_{m-1}$. Тоді за основною теоремою про лишки одержимо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) \mathrm{dz} = \sum_{k=1}^{m-1} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Але

$$\operatorname*{res}_{z=z_m} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) \mathrm{dz}.$$

Додавши ці дві рівності, одержимо справедливість наслідку. ■

6.2. Формули для обчислення лишків

Будемо розглядати тільки ізольовані особливі точки. Нехай функція $f(z)$ аналітична в проколотому околі особливої точки $z_0 \in \mathbb{C}$ $(0 < |z - z_0| < \delta)$. Тоді вона розкладається в цьому околі в ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, де $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{dz}$. Із формули для коефіцієнтів ряду Лорана і (6.1) випливає, що

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{dz} \; = c_{-1}. \qquad (6.4)$$

Зокрема, лишок функції в усувній особливій точці $z_0 \in \mathbb{C}$ рівний нулеві.

Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$ – полюс m –го порядку функції $f(z)$. Тоді вона розкладається в деякому околі $(0 < |z - z_0| < \delta)$ цієї точки в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots \; .$$

Помножимо цю рівність $(z - z_0)^m$

$$(z - z_0)^m f(z) =$$

$$= c_{-m} + \mathrm{c}_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + \cdots$$

і продиференціюємо останню рівність $m - 1$ разів. Тоді

$$\left((z - z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)} = (m-1)!\, c_{-1} + m!\, \mathrm{c}_0(z - z_0) + \cdots \; .$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $z \to z_0$, із врахуванням (6.4), одержимо

$$\lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)} = (m-1)!\, c_{-1} = (m-1)! \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

Оже, якщо $z_0 \in \mathbb{C}$ – полюс m –го порядку функції $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}. \qquad (6.5)$$

Якщо ж $z_0 \in \mathbb{C}$ полюс 1 –го порядку функції $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0) f(z)\right). \qquad (6.6)$$

Нехай $f(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, $\psi(z)$ і $\varphi(z)$ – аналітичні в z_0, $\psi(z_0) \neq 0$, $\varphi(z)$ має в z_0 нуль першого порядку, тоді

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\big((z-z_0)f(z)\big) = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\psi(z)}{\varphi(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\psi(z)}{\varphi(z)-\varphi(z_0)} =$$

$$= \frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}.$$

Нехай $z_0 = \infty$ – полюс m –го порядку функції $f(z)$. Тоді існує окіл $\{z: |z| > R\}$, у якому функція $f(z)$ розкладається в ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n$, і для $R < r < \infty$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)\mathrm{dz} = -c_{-1}.$$

Для функції $f\left(\frac{1}{z}\right)$ точка $z_0 = 0$ буде полюсом m –го порядку і

$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^{-n} = c_m z^{-m} + \cdots + c_1 z^{-1} + c_0 + c_{-1}z + \cdots + c_{-n}z^n + \cdots.$

Помножимо цю рівність z^m

$$z^m f\left(\frac{1}{z}\right) = c_m + \cdots + c_1 z^{m-1} + c_0 z^m + c_{-1}z^{m+1} + \cdots + c_{-n}z^{m+n} + \cdots$$

і продиференціюємо останню рівність $m+1$ разів. Тоді

$$\left(z^m f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{(m+1)} = (m+1)!\,c_{-1} + (m+2)(m+1)\ldots 2c_{-2}z + \cdots \ .$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $z \to 0$, одержимо

$$\lim_{z\to 0}\left(z^m f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{(m+1)} = (m+1)!\,c_{-1}.$$

Отже,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{1}{(m+1)!}\lim_{z\to 0}\left(z^m f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{(m+1)}. \qquad (6.7)$$

Приклад 1. $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$. Знайти $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)$.

Розв’язування. Спочатку знайдемо лишок за означенням. Для цього застосуємо інтегральну формулу Коші

$$\big(g(z_0)\big)^{(k)} = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{g(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\mathrm{dz}\,,$$

у якій покладемо $g(z) = \sin z$, $k = 2$. В крузі $|z| \le 1$ міститься лиш одна особлива точка $z = 0$ функції $f(z)$. Тому

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} f(z)\mathrm{dz} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3}\mathrm{dz} = \frac{1}{2!}(\sin z)''\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2}\sin 0 = 0.$$

Тепер будемо розв'язувати за формулою (6.5). Точка $z = 0$ є полюсом другого порядку функції $f(z)$. Тоді

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(z^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin z}{z}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{z\cos z - \sin z}{z^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\cos z - z\sin z - \cos z}{2z} = 0.$$

Третій спосіб оснований на формулі (6.4). Розкладемо $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \cdots.$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = 0,$$

бо коефіцієнт при $\frac{1}{z}$ рівний нулеві.

Приклад 2. $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z^2)}$. Знайти $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)$.

Розв'язування. Точка $z = 1$ полюс $1-$го порядку функції $f(z)$. Тому за формулою (6.6)

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\left((z-1)f(z)\right) = \lim_{z\to 1}\frac{-1}{z^3(1+z)} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 3. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Знайти $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$.

Розв'язування. Розкладемо функцію $f(z)$ в рял Лорана:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \cdots.$$

Тоді

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -1.$$

6.3. Логарифмічні лишки

Нехай функція $f(z)$ аналітична в проколотому околі ізольованої особливої точки $z_0 \in \mathbb{C}$.

Означення 6.3. Величина

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

називається *логарифмічним лишком* функції $f(z)$ в точці $z_0 \in \mathbb{C}$.

Теорема 6.2. Якщо точка $z_0 \in \mathbb{C}$ – нуль n –го порядку функції $f(z)$, то точка z_0 – полюс першого порядку функції $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ і $\operatorname*{res}_{z=z_0} g(z) = n$.

Якщо точка $z_0 \in \mathbb{C}$ полюс p –го порядку функції $f(z)$, то точка z_0 – полюс першого порядку функції $g(z)$ і $\operatorname*{res}_{z=z_0} g(z) = -p$.

Доведення. Нехай точка $z_0 \in \mathbb{C}$ – нуль n –го порядку функції $f(z)$. Тоді за теоремою про канонічне зображення функції $f(z)$ в околі точки z_0 одержимо $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, $\varphi(z)$ аналітична в деякому околі точки z_0 і $\varphi(z_0) \neq 0$. Тоді

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z - z_0)^{n-1}\varphi(z) + (z - z_0)^n \varphi'(z)}{(z - z_0)^n \varphi(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

де $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ аналітична в деякому околі точки z_0. Із цієї рівності випливає, що точка z_0 є полюсом першого порядку функції $g(z)$ і $\operatorname*{res}_{z=z_0} g(z) = n$.

Якщо точка $z_0 \in \mathbb{C}$ – полюс p –го порядку функції $f(z)$, то

$$f(z) = (z - z_0)^{-p} \psi(z),$$

$\psi(z)$ аналітична в деякому околі точки z_0 і $\psi(z_0) \neq 0$. Тоді

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p(z - z_0)^{-p-1}\psi(z) + (z - z_0)^{-p}\psi'(z)}{(z - z_0)^{-p}\psi(z)} = \frac{-p}{z - z_0} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)},$$

де $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ аналітична в деякому околі точки z_0. Із попередньої рівності випливає, що точка z_0 – полюс першого порядку функції $g(z)$ і $\operatorname*{res}_{z=z_0} g(z) = -p$. ■

Теорема 6.3. Нехай функція $f(z)$ аналітична в замиканні області $G \subset \mathbb{C}$, що обмежена скінченним числом замкнених жорданових кривих, за винятком скінченої кількості полюсів множини G, на ∂G функція $f(z)$ не має нулів і полюсів. Тоді

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{dz} = N - P,$$

де N та P – загальне число, відповідно, нулів і полюсів функції $f(z)$ в області G з урахуванням їх кратності.

Доведення. Із теореми 6.2 випливає, що логарифмічний лишок функції $f(z)$ в її нулі дорівнює порядку цього нуля, а логарифмічний лишок функції $f(z)$ в її полюсі дорівнює порядку цього полюса, взятого із знаком мінус. Тому справедливість теореми випливає із теореми 6.1. ■

Теорема 6.4 (принцип аргументу)**.** Нехай виконуються умови теореми 6.3. Тоді різниця між числом нулів та числом полюсів функції $f(z)$ в області G дорівнює поділеному на 2π приросту аргументу функції $f(z)$ при обході додатньо орієнтованої межі ∂G області G:

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G} Arg\, f(z).$$

Доведення. Із теореми 6.1 випливає, що

$$\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{dz} = 2\pi i(N - P). \qquad (6.8)$$

Первісною для $\frac{f'(z)}{f(z)}$ є многозначна функція

$$Ln\, f(z) = \ln|f(z)| + i\, Arg\, f(z).$$

Будемо розглядати випадок, коли ∂G кусково-гладкий контур, що задається рівнянням $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $z(\alpha) = z(\beta)$. Тоді

$$\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{dz} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'\big(z(t)\big)}{f\big(z(t)\big)} z'(t)\mathrm{dt} = Ln\, f\big(z(t)\big)\Big|_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= i\, Arg\, f\big(z(\beta)\big) - i\, Arg\, f\big(z(\alpha)\big) = i\, \Delta_{\partial G} Arg\, f(z). \qquad (6.9)$$

Порівнюючи (6.8) і (6.9), одержуємо справедливість теореми. ■

Теорема 6.5 (Руше)**.** Нехай функції $f(z)$ і $F(z)$ аналітичні в замиканні однозв'язної області $G \subset \mathbb{C}$, що обмежена кусково-гладкою замкненою жордановою кривою, причому $|f(z)| < |F(z)|$ на ∂G. Тоді функції $f(z) + F(z)$ і $F(z)$ мають в G однакову кількість нулів.

Доведення. Із нерівності $|f(z)| < |F(z)|$, $z \in \partial G$ випливає, що $z \in \partial G$ $|F(z) + f(z)| \geq |F(z)| - |f(z)| > 0$. Це означає, що функція $F(z) + f(z)$ не має нулів на ∂G.

Позначимо N_1 – число нулів функції $F(z) + f(z)$, а N – число нулів функції $F(z)$ в області G. Нехай $\frac{f(z)}{F(z)} = g(z)$, тоді

$$F(z) + f(z) = F(z)\big(1 + g(z)\big)$$

і

$$F'(z) + f'(z) = F'(z)\big(1 + g(z)\big) + F(z)g'(z).$$

За теоремою 6.3

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{F'(z) + f'(z)}{F(z) + f(z)}\mathrm{dz} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{F'(z)\big(1 + g(z)\big) + F(z)g'(z)}{F(z)\big(1 + g(z)\big)}\mathrm{dz} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{F'(z)}{F(z)}\mathrm{dz} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{g'(z)}{1 + g(z)}\mathrm{dz} = N + i\,\Delta_{\partial G} Arg\big(1 + g(z)\big).$$

Оскільки $|g(z)| < 1$ на ∂G, то функція $w = 1 + g(z)$ відображає ∂G на замкнену криву γ, яка лежатиме в крузі $|w - 1| < 1$. При обході точкою z один раз кривої ∂G відповідна точка w один раз обійде криву γ, а круг $|w - 1| < 1$ не містить точки $w = 0$. Тому $\Delta_{\partial G} Arg\big(1 + g(z)\big) = 0$ і $N_1 = N$. ■

Наслідок 6.1 (основна теорема алгебри)**.** Многочлен n –го степеня має в $\mathbb{C}$ рівно n нулів.

Доведення. Нехай $P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, $F(z) = z^n$, $f(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. $P_n(z) = F(z) + f(z)$ аналітична в $\mathbb{C}$.

Оскільки $\frac{f(z)}{F(z)} \to 0$ при $z \to \infty$, то існує R , що $|f(z)| < |F(z)|$ на колі $|z| = R$. За теоремою Руше кількість нулів функцій $P_n(z)$ і $F(z)$ однакова.

Функція $F(z) = z^n$ має в точці $z = 0$ нуль n –го порядку, то і $P_n(z)$ в крузі $|z| < R$ має рівно n нулів. ■

Приклад 4. Знайти кількість розв'язків рівняння $z^4 - 3z + 1 = 0$ в області $G = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$.

Розв'язування. За основною теоремою алгебри дане рівняння в комплексній площині $\mathbb{C}$ має 4 розв'язки. Покладемо $f(z) = z^4 + 1$, $F(z) = -3z$. Для всіх $z \in \partial G = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ виконується нерівність

$$|f(z)| \le |z|^4 + 1 = 2 < 3 = |-3z| = |F(z)|.$$

Для функцій $f(z) = z^4 + 1$, $F(z) = -3z$ виконуються умови теореми Руше, тому функції $F(z) + f(z) = z^4 - 3z + 1$ і $F(z) = -3z$ мають в області $|z| < 1$ однакову кількість нулів. Функція $F(z) = -3z$ має в області $|z| < 1$ один нуль $z = 0$, тому і функція $F(z) + f(z) = z^4 - 3z + 1$ має в області $|z| < 1$ один нуль. Отже, рівняння $z^4 - 3z + 1 = 0$ в області $G = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ має один розв'язок.

6.4. Застосування лишків до обчислення інтегралів

6.4.1. Обчислення визначеного інтегралу

Розглянемо інтеграл $I = \int_0^{2\pi} R(\cos nt,\ \sin mt)\, dt$, де m і n – цілі числа, $R(u, v)$ – раціональна функція двох змінних і підінтегральна функція неперервна на $[o, 2\pi]$.

Із формул зв'язку між тригонометричними і показниковими функціями випливає, що

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}, \ \sin mt = \frac{e^{imt} - e^{-imt}}{2i}.$$

Виконаємо в інтегралі заміну $e^{it} = z, e^{it} i dt = dz, z i dt = dz,\ dt = \frac{1}{iz} dz$. Тоді

$$\cos nt = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \ \sin mt = \frac{z^m - z^{-m}}{2i}$$

і при $t \in [o, 2\pi]$ відповідна точка z пробігає проти годинникової стрілки коло $|z| = 1$. Тому

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos nt,\ \ \sin mt)\,dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^n + z^{-n}}{2},\ \ \frac{z^m - z^{-m}}{2i}\right)\frac{1}{iz}dz =$$

$$= \int_{|z|=1} f(z)dz,$$

де $f(z) = R\left(\frac{z^n+z^{-n}}{2},\ \ \frac{z^m-z^{-m}}{2i}\right)\frac{1}{iz}$ є раціональною функцією, особливими точками якої в крузі $|z| < 1$ є полюси $z_1, \dots z_l$, ($|z_k| < 1,\ k = 1, . . , l$), а на колі $|z| = 1$ особливих точок немає. Тому за основною теоремою про лишки

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b\cos t}$, $0 < |b| < a$.

Розв'язування. Виконаємо заміну $e^{it} = z$, $e^{it}idt = dz$, $dt = \frac{1}{iz}dz$, $\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Тоді

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} = \int_{|z|=1} \frac{1}{a + b\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}\frac{1}{iz}dz = \frac{2}{ib}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1} =$$

$$= \frac{2}{ib}\int_{|z|=1} \frac{dz}{\left(z + \frac{a}{b}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{2}{ib}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Точки $z_1 = -\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$ і $z_2 == -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$ є полюсами першого порядку підінтегральної функції. При $b > 0$ в круг попадає лише z_2. Тому

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} = \frac{2}{ib}2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_2} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{4\pi}{b}\frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

При $b < 0$ в круг попадає лише z_1. Тому

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} = \frac{2}{ib}2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{4\pi}{b}\frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Отже,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

6.4.2. Обчислення невласних інтегралів

Якщо інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ збіжний, то його можна визначити як границю

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Для знаходження цієї границі побудуємо замкнений контур L_R, який складається із відрізка $[-R, R]$ і півкола C_R=$\{z: |z| = R,\ Im\, z \geq 0\}$, де $R > 0$. Область, що обмежена цим контуром, позначимо через G.

Теорема 6.6. Нехай $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ збігається, функція $f(z)$ аналітична в півплощині $\{z\colon Im\, z \geq 0\}$ за винятком скінченної кількості особливих точок $z_1, \dots, z_m$, які лежать в області $\{z\colon Im\, z > 0\}$, і виконується умова $\lim\limits_{z\to\infty, Imz>0} (zf(z)) = 0$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (6.10)$$

Доведення. Виберемо $R > 0$ настільки великим, щоб всі особливі точки $z_1, \dots, z_m$ містились у області G. За теоремою про лишки

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (6.11)$$

Оскільки $\lim\limits_{z\to\infty, Imz>0} (zf(z)) = 0$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує $R_0 > 0$ таке, що $|zf(z)| < {}^{\varepsilon}/_{\pi}$ в $\{z: |z| \geq R_0,\ Im\, z \geq 0\}$. Нехай $R \geq R_0$, тоді

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \int_{C_R} |zf(z)| \frac{|dz|}{|z|} < \frac{\varepsilon}{\pi R} \int_{C_R} |dz| = \varepsilon.$$

Тому

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Права частина в (6.11) не залежить від R. Переходячи до границі в (6.11), одержимо (6.10). ■

Відзначимо, що теорема буде правильною, якщо умову $\lim\limits_{z\to\infty, Imz>0}(zf(z)) = 0$ замінити умовою:

існують $M > 0$, $R_0 > 0$, $\delta > 0$, що для всіх $z \in \{z: |z| > R_0,\ Im\, z \geq 0\}$ виконується нерівність $|f(z)| \leq M|z|^{-1-\delta}$.

Приклад 6. Обчислити $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

Розв'язування. Функція $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ має чотири полюси першого порядку $z_k = \sqrt[4]{-1} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + \sin\frac{\pi+2\pi k}{4}$, $k = 0,1,2,3$. $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Із них у верхній півплощині лежать точки $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ і $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Із (6.10) і (6.6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=z_0}\frac{1}{z^4+1} + \operatorname*{res}_{z=z_1}\frac{1}{z^4+1}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{z^4+1} + \lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z^4+1}\right) = 2\pi i\left(\lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z^3} + \lim_{z\to z_1}\frac{1}{4z^3}\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{{z_0}^3} + \frac{1}{{z_1}^3}\right) = \frac{\pi i}{2}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{9\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Перейдемо до обчислення невласних інтегралів вигляду

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx\, , a > 0.$$

Лема (Жордана). Нехай виконуються умови:

а) функція $f(z)$ неперервна на множині $\{z: |z| > R_0,\ Im\, z \geq 0\}$ для деякого $R_0 > 0$;

б) $max\{|f(z)|: z \in C_R\} = \alpha_R \to 0$ при $R \to \infty$, $C_R = \{z = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \pi\}$.

Тоді

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{iaz} f(z)dz\ = 0,$$

$a > 0$.

Доведення. Нехай $R \geq R_0$, зробимо заміну $z = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \pi$. Оскільки $e^{it} = \cos t + i \sin t, \sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$\left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} \left| e^{iaz} \right| |f(z)| |dz| \leq \alpha_R \int_{C_R} \left| e^{iaz} \right| |dz| =$$

$$= \alpha_R \int_0^{\pi} \left| e^{iaRe^{it}} \right| \left| Re^{it} i dt \right| = R\alpha_R \int_0^{\pi} e^{-aR \sin t} dt = 2R\alpha_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin t} dt \leq$$

$$\leq 2R\alpha_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2}{\pi}t} dt = \frac{\pi}{a} \alpha_R (1 - e^{-aR}) \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

■

Теорема 6.7. Нехай $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx, a > 0$ – збіжний, функція $f(z)$ аналітична в півплощині $\{z\colon Im\, z \geq 0\}$ за виключенням скінченої кількості особливих точок $z_1, \dots, z_n$, які лежать в області $\{z\colon Im\, z > 0\}$,

$$max\{|f(z)| \colon z \in C_R\} = \alpha_R \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{iaz} f(z) \right). \tag{6.12}$$

Доведення. Виберемо $R_0 > 0$ таким, щоб усі точки $z_1, \dots, z_n$ лежали в області $\{z\colon |z| < R_0,\ Im\, z \geq 0\}$. Для будь-якого $R > R_0$ за основною теоремою про лишки одержимо

$$\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x) dx + \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{iaz} f(z) \right).$$

За лемою Жордана другий інтеграл зліва прямує до нуля при $R \to \infty$. Перейшовши у попередній рівності до границі при $R \to \infty$, одержимо (6.12).

■

Приклад 7. Обчислити $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx,\ a > 0, b > 0$.

Розв'язування. Розглянемо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \frac{1}{x^2 + b^2} dx.$$

Функція $f(z)=\frac{1}{z^2+b^2}$ має в точках $z_1=bi$, $z_2=-bi$ $(b>0)$ полюси першого порядку і лише $z_1=bi$ лежить у верхній півплощині. Для функції $f(z)$ виконуються умови теореми 6.7, тому за рівністю (6.12)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}\frac{1}{x^2+b^2}dx=2\pi i\operatorname*{res}_{z=z_1}\left(e^{iaz}\frac{1}{z^2+b^2}\right)=2\pi i\lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\right)=$$

$$=2\pi i\frac{e^{iaz_1}}{z_1-z_2}=2\pi i\frac{e^{iabi}}{2bi}=\frac{\pi}{b}e^{-ab}\ .$$

Оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx=Re\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)\,dx,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx=\frac{\pi}{b}e^{-ab}\ .$$

Нехай функція $f(x)$ має скінченну кількість особливих точок $x_1,\dots,x_m$. Головне значення невласного інтеграла від $f(x)$ по проміжку $(-\infty,\infty)$ визначається рівністю

$$V.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{I_{R,\varepsilon}} f(x)dx,$$

де $I_{R,\varepsilon}=[-R,R]\setminus\bigcup_{k=1}^{m}(x_k-\varepsilon_k,x_k+\varepsilon_k)$, $\varepsilon_k>0$, $\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_m=\varepsilon$.

Теорема 6.8. Нехай функція $f(z)$ аналітична в півплощині $\{z\colon Im\,z\ge 0\}$ за виключенням скінченної кількості особливих точок $z_1,\dots,z_n$ з області $\{z\colon Im\,z>0\}$ і полюсів першого порядку $x_1,\dots,x_m$, які лежать на дійсній осі, $max\{|f(z)|\colon z\in C_R\}=\alpha_R\to 0$ при $R\to\infty$. Тоді

$$V.p.\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)dx=$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k}\left(e^{iaz}f(z)\right)+\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=x_k}\left(e^{iaz}f(z)\right). \qquad (6.13)$$

Доведення. Виберемо $R_0>0$ таким, щоб усі точки $z_1,\dots,z_n$ і $x_1,\dots,x_m$ лежали в області $\{z\colon |z|<R_0,\ Im\,z\ge 0\ \}$. Позначимо через γ_k $(k=1,\dots,m)$

півколо і центром x_k і радіусом ε_k, що лежить в області $\{z\colon\ Im\, z \geq 0\}$, Числа ε_k виберемо такими, щоб γ_k не перетинались. Розглянемо область, що обмежена півколом C_R, півколами γ_k і відрізками дійсної осі $I_{R,\varepsilon}$.

Для будь-якого $R > R_0$ за основною теоремою про лишки одержимо

$$\int_{I_{R,\varepsilon}} e^{iax} f(x)dx + \int_{C_R} e^{iaz} f(z)dz + \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} e^{iaz} f(z)dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(e^{iaz} f(z)\right). \tag{6.14}$$

півкола γ_k обходяться за годинниковою стрілкою.

За лемою Жордана другий інтеграл зліва прямує до нуля при $R \to \infty$. Розклад функції $e^{iax} f(x)$ в ряд Лорана в околі x_k має вигляд

$$e^{iaz} f(z) = \frac{c_{-1}^{(k)}}{z - x_k} + h_k(z),$$

де $h_k(z)$ – аналітична функція в околі x_k. Оскільки $z - x_k = \varepsilon_k e^{it}$, t$\in [\pi, 0]$,

$$\int_{\gamma_k} \frac{1}{z - x_k} dz = \int_{\pi}^{0} \frac{\varepsilon_k i e^{it}}{\varepsilon_k e^{it}} dt = -\pi i,$$

а $c_{-1}^{(k)} = \operatorname*{res}_{z=x_k} \left(e^{iaz} f(z)\right)$, то

$$\int_{\gamma_k} e^{iaz} f(z)dz = -\pi i c_{-1}^{(k)} + \int_{\gamma_k} h_k(z)dz.$$

Функція $h_k(z)$ – аналітична в околі x_k, отже обмежена в цьому околі. Тому $\int_{\gamma_k} h_k(z)dz \to 0$ при $\varepsilon_k \to 0$.

Враховуючи це, перейдемо у (6.14) до границі при $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, тоді одержимо (6.13). ■

Приклад 8. Обчислити $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx$, $a > 0$. .

Розв’язування. Розглянемо інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \frac{1}{x} dx.$$

Функція $f(z)=\frac{1}{z}$ має полюс першого порядку лише в точці $z=0$, що лежить на дійсній осі. Для функції $f(z)$ виконуються умови теореми 6.8, тому за рівністю (6.13)

$$V.p.\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}\frac{1}{x}dx=\pi i\operatorname*{res}_{z=0}\left(e^{iaz}\frac{1}{z}\right)=\pi i,$$

бо

$$\operatorname*{res}_{z=0}\left(e^{iaz}\frac{1}{z}\right)=1.$$

Тоді

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{1}{2}\,Im\int_{-\infty}^{\infty}e^{iax}\frac{1}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

6.5. Вправи до розділу 6

6.1. Знайти лишки заданих функцій в усіх ізольованих особливих точках:

$$a)\ \frac{1}{z^3-z^5};\quad b)\ \frac{z^2}{(z^2+1)^2};\ c)\ \frac{1}{z(1-z^2)};\ d)\ \frac{z-1}{z^{13}(z+2)};e)\ \frac{1}{z^6(z-2)};$$

$$f)\ \frac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)};\ g)\ \frac{\sin 2z}{(z+1)^3};\ h)\ \frac{\cos z}{(z^2+1)^2};\ i)\ \frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ j)\ \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1};$$

$$k)\ z\left(\cos\frac{\pi}{z}\right)^2;\ \ l)\ \frac{1}{z(1-e^{az})},a>0.$$

6.2. Обчислити:

$$a)\ \operatorname*{res}_{z=-1}\left(\sin\frac{z}{z+1}\right);\ b)\operatorname*{res}_{z=0}\frac{z^{n-1}}{(\sin z)^n},n\in N;\quad c)\operatorname*{res}_{z=0}\frac{\operatorname{tg} z-z}{(1-\cos z)^2};\ d)\ \operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}.$$

6.3. Використовуючи лишки, знайти інтеграли:

$$a)\ \int_{\gamma}\frac{dz}{z^4+1},\qquad \gamma:\ x^2+y^2=2x;\qquad b)\ \int_{|z|=2}\frac{z^3dz}{z^4-1};$$

$$c)\ \int_{\gamma}\frac{z^2+1}{z^2(z^2-2)}dz,\quad \gamma=\{z:|z+1|+|z-1|=6\};$$

$$d)\ \int_{\partial G}\frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2},\qquad G=\{z:2<|z-1|<4\};$$

$e)\ \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz$; $f)\ \int_{|z|=2} \frac{z\sin z\,dz}{(z-1)^5}$;

$g)\ \int_{\gamma} \frac{z\,\mathrm{sh}\,z\,dz}{z^2+z-6}$, $\gamma-$ трикутник з вешинами у точках $z=3$, $z=3i$, $z=-3i$;

$h)\ \int_{|z|=2} \left(\sin\frac{1}{z}\right)^2 dz$; $i)\ \int_{|z|=1} z^2\,\mathrm{tg}(\pi z)dz$;

$j)\ \int_{\partial G} \sin\frac{z}{z+1}dz,\ \ G=\{z:|z|>3\}$; $k)\ \int_{\partial G} \frac{z}{z+1}e^{\frac{1}{3z}}dz,\ \ G=\{z:|z|>4\}$.

6.4. Знайти кількість розв'язків рівняння:

а) $z^6-6z+10=0$ в області $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$;

б) $z^4-9z^3+1=0$ в області $\left\{z\in\mathbb{C}:|z|>\frac{1}{2}\right\}$;

в) $2z^4-5z+2=0$ в області $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$;

г) $z^3-12z+1=0$ в області $\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\}$.

6.5. Обчислити визначені інтеграли:

$a)\ \int_0^{2\pi} \frac{2+\cos x}{2-\sin x}dx$; $b)\ \int_0^{2\pi} \frac{(\sin x)^2}{5+4\cos x}dx$; $c)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin x+\cos x+2}$;

$d)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{cos^6 x+sin^6 x}$; $e)\ \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}dx$, $a>b>0$.

6.6. Обчислити невласні інтеграли:

$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$; $b)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$; $c)\ \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$; $d)\ \int_0^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$;

$e)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx$; $f)\ \int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx$; $g)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$;

$h)\ \int_0^{\infty} \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx$; $i)\ \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1}dx$; $j)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\alpha x}}{x^2+1}dx$; $k)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2+a^2}dx$.

Розділ 7. Перетворення Лапласа

7.1. Визначення перетворення Лапласа

Серед ефективних методів аналізу математичних моделей багатьох фізичних явищ і процесів у техніці є методи, в основі яких лежить ідея інтегральних перетворень. Один із таких методів оснований на перетворенні Лапласа. Перетворення Лапласа широко використовується в теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей.

Означення. *Перетворенням Лапласа* функції дійсної змінної $f(t)$ називається функція комплексної змінної $F(p)$, визначена формулою

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt. \tag{7.1}$$

Інтеграл у (7.1) називають *інтегралом Лапласа*.

Перш за все встановимо, які функції $f(t)$ ми розглядатимемо і які умови треба на них накласти, щоб невласний інтеграл (1) збігався і дійсно визначав деяку функцію $F(p)$.

Припускатимемо наступне:

1) Функція $f(t)$ – кусково-неперервна при $t \geq 0$; (це означає, що вона або неперервна, або має точки розриву тільки першого роду, у кожному скінченному інтервалі число таких точок розриву обов'язково скінчене).

2) Функція $f(t)$ рівна нулю при від'ємних значеннях t,

$$f(t) = 0 \text{ при } t < 0. \tag{7.2}$$

Оскільки в інтегралі Лапласа значення функції $f(t)$ при $t < 0$ взагалі не бере участь, то немає значення, чому вони рівні. Зручніше вважати, що вони рівні нулю. При вивченні багатьох фізичних процесів змінна t розглядається як час і сказане означає, що процес починається з деякого моменту часу (найзручніше вважати, що в момент $t = 0$).

3) При зростанні t модуль функції $f(t)$ може зростати, але не швидше за деяку показникову функцію, тобто існують сталі $M \geq 0$ і $\alpha \in R$, що

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}. \tag{7.3}$$

Число α у нерівності (3) називають показником зростання функції $f(t)$.

Остання умова забезпечує збіжність інтеграла Лапласа. Умові 3) задовольняють, звичайно, всі обмежені функції (зокрема, $\sin t$ і $\cos t$); в цьому випадку α можна покласти рівним нулю: $|f(t)| \leq M$.

Їй задовольняють і всі степеневі функції t^k $(k > 0)$, оскільки будь-яка така функція росте повільніше, ніж показникова функція e^t. Застосовуючи правило Лопіталя, легко перевірити, що $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^k}{e^t} = 0$. (При $k < 0$ відповідні степеневі функції мають нескінченний розрив при $t = 0$ і не задовольняють першій умові).

Функцію $f(t)$, що задовольняє сформульованим вище трьом умовам, називають *оригіналом*, а функцію $F(p)$, визначену формулою (7.1), – *зображенням за Лапласом функції* $f(t)$ (коротко – *зображенням* функції $f(t)$).

Відповідність між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$ записують у вигляді

$$f(t) \doteqdot F(p) \text{ або } F(p) \doteqdot f(t).$$

Теорема 7.1. Нехай функція $f(t)$ є оригіналом. Тоді інтеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

збігається абсолютно для всіх значень комплексної змінної p, яка задовольняє умові $Re\,p > \alpha$ (тобто в півплощині $Re\,p > \alpha$), де α стала, яка бере участь в нерівності (7.3), рівномірно збіжний при $Re\,p \geq \alpha_0 > \alpha,$ і визначає зображення $F(p)$, яке є аналітичною функцією в півплощині $Re\,p > \alpha$.

Доведення. Щоб довести абсолютну збіжність інтеграла, використаємо рівність (7.3), згідно якої $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, де M і α – дійсні сталі. Якщо $p = \sigma + is$, то $|e^{-pt}| = e^{-\sigma t}$ і тому

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{(\alpha-\sigma)t}\,. \qquad (7.4)$$

Звідси

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-pt}|dt \leq M\int_0^\infty e^{(\alpha-\sigma)t}dt = \frac{M}{\alpha-\sigma}.$$

Із цієї нерівності випливає , що інтеграл Лапласа збіжний абсолютно.

Якщо $Re\,p \geq \alpha_0 > \alpha$, то із (7.4) одержимо $|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{(\alpha-\alpha_0)t}$. Функція в правій частині цієї нерівності не залежить від p і інтеграл від неї в межах від 0 до ∞ збігається, бо $\alpha-\alpha_0 < 0$. Тому інтеграл Лапласа при $Re\,p \geq \alpha_0$ збігається рівномірно. Похідна підінтегральної функції у $F(p)$ дорівнює $-tf(t)e^{-pt}$. Її модуль не перевищує функцію $Mte^{(\alpha-\sigma)t}$, інтеграл від якої збіжний (рівний $\frac{M}{(\alpha-\alpha_0)^2}$). Тоді і інтеграл від похідної по параметру p збіжний рівномірно, а звідси і випливає, що інтеграл Лапласа можна диференціювати по p, тобто функція $F(p)$ є аналітичною. ■

Теорема 7.2. Нехай виконуються умови теореми 7.1 і замість умови (7.3) виконується умова: існує комплексне число p_0, для якого інтеграл

$$\int_0^\infty f(t)e^{-p_0t}dt$$

збігається. Тоді для всіх p, що задовольняють умові $Re(p-p_0) > 0$, інтеграл (7.1) збіжний.

Доведення. Позначимо $\varphi(t) = f(t)e^{-p_0t}$ і введемо допоміжну функцію $g(t) = -\int_t^\infty \varphi(\tau)\,d\tau$. Оскільки інтеграл

$$\int_0^\infty f(t)e^{-p_0t}dt$$

збігається, то для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке t_0, що $|g(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$.

Розглянемо тепер інтеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-pt}dt,$$

де $t_2 > t_1 \geq t_0$ довільні дійсні числа. Тоді, (враховуємо, що $\varphi(t) = g'(t)$) інтегруючи частинами, одержимо

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-pt}dt = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)e^{-(p-p_0)t}dt = \int_{t_1}^{t_2} g'(t)e^{-(p-p_0)t}dt =$$

$$= g(t_2)e^{-(p-p_0)t_2} - g(t_1)e^{-(p-p_0)t_1} + (p-p_0)\int_{t_1}^{t_2} g(t)e^{-(p-p_0)t}dt.$$

Звідси при $Re(p-p_0) > 0$ одержимо

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-pt}dt\right| \leq \left|g(t_2)e^{-(p-p_0)t_2}\right| + \left|g(t_1)e^{-(p-p_0)t_1}\right| +$$

$$+|p-p_0|\int_{t_1}^{t_2} |g(t)|e^{-Re(p-p_0)t}dt <$$

$$< 2\varepsilon + \varepsilon|p-p_0|\int_{t_1}^{t_2} e^{-Re(p-p_0)t}dt \leq \varepsilon\left(2 + \frac{|p-p_0|}{Re(p-p_0)}\right).$$

Отже, за критерієм Коші інтеграл (7.1) збіжний. ■

Приклад 1. Нехай $\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < 0, \\ 1, & \text{якщо } t \geq 0 \end{cases}$ – одинична функція Хевісайда.

Очевидно, що вона є оригіналом. Тоді

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}dt = \frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Оскільки всякий оригінал рівний нулю при $t < 0$, то для простоти писатимемо, що одинична функція $\eta(t) = 1$. Тоді

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}. \tag{7.5}$$

Приклад 2. Знайдемо зображення функції $e^{\alpha t}$, де $\alpha = \beta + i\gamma$ – довільне комплексне число.

Для $t \geq 0$ показникову функцію подамо у вигляді: $f(t) = \eta(t)e^{\alpha t}$. Очевидно, вона є оригіналом. Тоді

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{\alpha t}e^{-pt}dt=\int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t}dt=\frac{1}{p-\alpha},$$

де $Re\, p > Re\, \alpha$. Отже

$$e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}. \tag{7.6}$$

7.2. Властивості перетворення Лапласа

1. Лінійність. Якщо $f_k(t) \doteqdot F_k(p)$, $Re\, p > \alpha_k$, $k=1,\dots,n$, то для $Re\, p > \alpha = \max\limits_{1\le k\le n} \alpha_k$ і будь-яких дійсних або комплексних сталих c_k, $k=1,\dots,n$

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \doteqdot F(p)=\sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p).$$

Доведення. Випливає з властивості інтеграла:

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)\right)e^{-pt}dt=\sum_{k=1}^{n} c_k\int_0^{\infty} f_k(t)e^{-pt}dt.$$

Приклад 3. Знайти зображення тригонометричних функцій.

За властивістю лінійності із (7.6)

$$\sin\omega t=\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right) \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \tag{7.7}$$

$$\cos\omega t=\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}. \tag{7.8}$$

2. Подібність (зміна масштабу незалежної змінної). Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, то для будь-якої сталої $c>0$

$$f(ct) \doteqdot \frac{1}{c}F\left(\frac{p}{c}\right).$$

Доведення. Дійсно, за визначенням перетворення Лапласа

$$f(ct) \doteqdot \int_0^{\infty} f(ct)e^{-pt}dt=\left|\begin{matrix} ct=\tau \\ dt=\frac{1}{c}d\tau\end{matrix}\right|=\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\frac{1}{c}\tau}\frac{1}{c}d\tau=\frac{1}{c}F\left(\frac{p}{c}\right).$$

3. Зсув аргументу (теорема запізнення). Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, $Re\, p > \alpha$, то для будь-якого числа $\tau > 0$ і $Re\, p > \alpha$

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}F(p).$$

Доведення. Оскільки $f(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$, то

$$f(t-\tau) \doteqdot \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_{0}^{\infty} f(s)e^{-p(s+\tau)}ds = e^{-p\tau}F(p).$$

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}F(p).$$

Приклад 4. Знайти зображення одиничного імпульсу

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

Цей одиничний імпульс можна розглядати як різницю двох оригіналів: одиничної функції і одиничної функції, зсунутої на τ. Тобто

$$\varphi(t) = \eta(t) - \eta(t-\tau).$$

Оскільки $\eta(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}\frac{1}{p}$, то, застосовуючи властивість лінійності, одержимо

$$\varphi(t) = \eta(t) - \eta(t-\tau) \doteqdot \frac{1}{p} - e^{-p\tau}\frac{1}{p} = \frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau}).$$

Приклад 5. Нехай одиничний імпульс, що триває час довжиною τ, починається не в момент $t = 0$, а в деякий момент $t = T$ $(\tau < T)$.

Застосовуючи теорему запізнення, одержимо, що його зображення рівне

$$\frac{1}{p}(1 - e^{-p\tau})e^{-pT}.$$

Нехай маємо періодичну систему імпульсів:

$$f(t) = \varphi(t - nT), \quad t - nT \in [0, T), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Очевидно, що цю систему можна розглядати як суму імпульсів, які починаються в моменти часу nT $(n = 0,1,2,\ldots)$ і тривають час $\tau < T$. Застосовуючи теорему запізнення і лінійності, одержимо

$$f(t) \doteqdot \frac{1}{p}(1-e^{-p\tau}) + \frac{1}{p}(1-e^{-p\tau})e^{-pT} + \frac{1}{p}(1-e^{-p\tau})e^{-p2T} + \cdots$$

$$= \frac{1-e^{-p\tau}}{p(1-e^{-pT})}.$$

Приклад 6. Знайти зображення функції

$$f(t) = \begin{cases} \sin t\,, & t \in [0,\pi], \\ 0, & t \,\overline{\in}\, [0,\pi]. \end{cases}$$

Щоб одержати синусоїдальний імпульс у вигляді однієї півхвилі синусоїди $\sin t$, необхідно скласти два оригінали, один із яких є $\sin t$, а інший – та ж синусоїда, зсунута на π: $f(t) = \eta(t)\sin t + \eta(t-\pi)\sin(t-\pi)$.

За теоремами запізнення і лінійності, одержимо

$$f(t) \doteqdot \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}e^{-\pi t}.$$

4. Зміщення (теорема згасання). Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, $Re\,p > \alpha$, то для будь-якого комплексного числа p_0 при $Re\,p > Re\,p_0 + \alpha$

$$e^{p_0 t} f(t) \doteqdot F(p-p_0).$$

Тобто множення оригіналу на функцію $e^{p_0 t}$ спричиняє за собою зсув на p_0 незалежної змінної p. Тому дану властивість називають також *теоремою зсуву.*

Доведення. Із визначення перетворення Лапласа

$$e^{p_0 t} f(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{p_0 t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = F(p-p_0).$$

Приклад 7. Знайти зображення функцій $e^{p_0 t}\sin\omega t$, $e^{p_0 t}\cos\omega t$.

Із (7.7) і (7.8): $\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\cos\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2}$. За властивістю 4 одержимо

$$e^{p_0 t}\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{(p-p_0)^2+\omega^2}. \tag{7.9}$$

$$e^{p_0 t}\cos\omega t \doteqdot \frac{(p-p_0)}{(p-p_0)^2+\omega^2}. \tag{7.10}$$

5. Зображення похідної (диференціювання оригіналу). Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, де $Re\, p > \alpha$, функція $f(t)$ є диференційованою і функція $f'(t)$ має зображення за Лапласом, то

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0), \ \ Re\, p > \alpha.$$

Якщо існує $f^{(n)}(t)$ і вона задовольняє умовам існування зображення за Лапласом, то

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Зокрема, якщо $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p).$$

Доведення. Запишемо перетворення Лапласа для похідної $f'(t)$:

$$f'(t) \doteqdot \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt\,.$$

Інтегруючи частинами, одержимо

$$f'(t) \doteqdot \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p).$$

Бо, згідно умови $Re\, p > \alpha$, для оригіналу виконується нерівність $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ і тому

$$|f(t) e^{-pt}| \leq Me^{(\alpha - Re\, p)t} \to 0, \ \ t \to \infty.$$

Зображення похідних вищих порядків випливає із наступного правила:

диференціювання оригіналу зводиться до множення на p *його зображення і відніманні* $f(0)$.

6. Теорема диференціювання зображення. Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, $Re\, p > \alpha$, то

$$-tf(t) \doteqdot F'(p), Re\, p > \alpha.$$

Тобто, *диференціювання зображення зводиться до множення оригіналу на* $-t$.

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t).$$

Доведення. Із теореми 7.1 випливає, що функція $F(p)$ є аналітичною в півплощині $Re\,p > \alpha$. Тому

$$F'(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}(-t)dt = (-t)\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \risingdotseq (-t)f(t).$$

7. Теорема про диференціювання за параметром. Якщо $f(t;x) \risingdotseq F(p;x)$, $Re\,p > \alpha$ при будь-якому значенні $x \in (a;b) \subset R$ і функція $f(t;x)$ є диференційовною при $x \in (a;b)$, а її похідна $f_x'(t;x)$ при всіх $t \geq 0$ і $x \in (a;b)$ задовольняє умову $|f_x'(t;x)| \leq Me^{\alpha t}$ при деяких сталих $M \geq 0$ і $\alpha \in R$, то функція $F(p;x)$ диференційовна за $x \in (a;b)$, причому при кожному $x \in (a;b)$

$$f_x'(t;x) \risingdotseq F_x'(t;x), \qquad Re\,p > \alpha.$$

Доведення. Із наведених умов випливає, що функція $F(p;x) = \int_0^\infty f(t;x)e^{-pt}dt$ диференційовна за $x \in (a;b)$ і $F_x'(p;x) = \int_0^\infty f_x'(t;x)e^{-pt}dt \risingdotseq f_x'(t;x)$.

Покажемо, як можна застосовувати цю властивість. Згідно (7.6)

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}.$$

Тут параметром є α. Диференціюючи ліву і праву частину по цьому параметру, одержимо:

$$te^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{(p-\alpha)^2}.$$

Продовження диференціювання приводить до відповідностей

$$t^2e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{2!}{(p-\alpha)^3}, \qquad t^3e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{3!}{(p-\alpha)^4}$$

і, взагалі,

$$t^ne^{\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}. \tag{7.11}$$

Зокрема, при $\alpha = 0$ одержимо

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}. \tag{7.12}$$

Аналогічно, диференціюючи по параметру ω обидві частини відповідностей

$$\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \qquad \cos\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

одержимо

$$t\cos\omega t \doteqdot \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}, \quad t\sin\omega t \doteqdot \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}. \tag{7.13}$$

8. Теорема про зображення інтеграла. Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, де $Re\, p > \alpha$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \frac{1}{p}F(p), \;\; Re\, p > \alpha.$$

Доведення. Нехай $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Знаходимо зображення функції $\varphi(t)$ за формулою (7.1)

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^t f(\tau)d\tau,$$

де інтегрування у правій частині проводиться по області

$$\{(t;\tau):\; 0 \le t < \infty, 0 \le \tau \le t\} = \{(t;\tau): 0 \le \tau < \infty, \tau \le t < \infty\},$$

після зміни в останньому інтегралі порядку інтегрування, одержимо

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt}dt =$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau = \frac{1}{p}F(p).$$

9. Інтегрування зображення. Нехай $\frac{f(t)}{t}$ задовольняє умовам існування зображення, інтеграл $\int_p^\infty F(q)dq$ збіжний, $f(t) \doteqdot F(p)$, де $Re\, p > \alpha$. Тоді

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^\infty F(q)dq\,, \qquad Re\, p > \alpha.$$

Доведення. Нехай $\frac{f(t)}{t} \doteqdot I(p)$:

$$I(p) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt.$$

За теоремою 7.1 функція $I(p)$ є аналітичною в області $Re\, p > \alpha$, причому $I(\infty) = 0$. Знайдемо похідну функції $I(p)$, диференціюючи інтеграл по параметру:

$$I'(p) = -\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = -F(p).$$

Звідси, враховуючи умову $I(\infty) = 0$, одержимо (інтегруванням попередньої рівності в межах від p до ∞):

$$\int_p^{\infty} I'(q) dq = I(\infty) - I(p) = -\int_p^{\infty} F(q) dq.$$

Отже,

$$I(p) = \int_p^{\infty} F(q) dq.$$

10. Зображення згортки.

Згорткою двох функцій $f(t)$ і $g(t)$ $(t \in R)$ називається функція

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau,$$

тоді згортка двох оригіналів $f(t)$ і $g(t)$ є функція

$$\varphi(t) = \int_0^{t} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^{t} f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

Справедлива властивість:

Якщо $f(t) \doteqdot F(p)$, $Re\, p > \alpha_1$ і $f(t) \doteqdot F(p)$, $Re\, p > \alpha_2$, то згортці $\varphi(t)$ цих функцій відповідає добуток зображень:

$$\varphi(t) = \int_0^{t} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \doteqdot F(p) G(p), \qquad Re\, p > \alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

Доведення. Покажемо спочатку, що згортка задовольняє умові (7.3). Оскільки

$|f(t)| \le M_1\, e^{\alpha_1 t}$ і $|g(t)| \le M_2 e^{\alpha_2 t}$, то

$$\left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right| \le M_1\, M_2 \int_0^t e^{\alpha_1\tau}\, e^{\alpha_2(t-\tau)}d\tau \;= M_1\, M_2 \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} \le$$

$$\le \frac{2M_1\, M_2}{|\alpha_1 - \alpha_2|} e^{\alpha t}.$$

Легко перевірити, що $\varphi(t)$ задовольняє іншим умовам оригіналу. Запишемо інтеграл Лапласа для згортки

$$\varphi(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

де інтегрування у правій частині проводиться по області

$$\{(t;\tau):\ 0 \le t < \infty, 0 \le \tau \le t\} = \{(t;\tau): 0 \le \tau < \infty, \tau \le t < \infty\},$$

тому після зміни в останньому інтегралі порядку інтегрування, одержимо

$$\varphi(t) \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-pt}dt.$$

У внутрішньому інтегралі справа виконаємо підстановку $t - \tau = s,\ dt = ds$. Тоді

$$\varphi(t) \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_0^\infty g(s)e^{-p(\tau+s)}dt = F(p)G(p).$$

7.3. Знаходження оригіналу за зображенням

В даному параграфі ми розглянемо деякі умови, при яких задана функція $F(p)$ комплексної змінної p є зображенням функції $f(t)$ дійсної змінної t.

Теорема 7.3. Нехай функція $F(p)$ в області $Re\, p > \alpha$ є зображенням кусково-гладкої функції $f(t)$ дійсної змінної t, що має показник зростання α. Тоді при $x > \alpha$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \qquad (7.14)$$

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi(t) = e^{-xt}f(t),\ x > \alpha$. Ця функція є кусково-гладкою, на будь-якій обмеженій ділянці осі t має скінчене число точок розриву першого роду і прямує до нуля при $t \to \infty$. Вона може бути зображена інтегралом Фур'є

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) e^{iu(t-v)} dv. \qquad (7.15)$$

Підставляючи в (7.15) $\varphi(t) = e^{-xt}f(t)$, одержимо

$$e^{-xt}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xv} f(v) e^{iu(t-v)} dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} du \int_{0}^{\infty} f(v) e^{-(x+iu)v} dv, \qquad (7.16)$$

бо $f(v) = 0$ при $v < 0$. Тому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{xt+iut} du \int_{0}^{\infty} f(v) e^{-(x+iu)v} dv, \qquad (7.17)$$

Позначимо $p = x + iu$. Оскільки $dp = idu$ і внутрішній інтеграл в (7.17) є заданим зображенням $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$, тому рівність (7.17) має вигляд

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

■

Формула (7.14) часто називається формулою Мелліна. Вона є в певному розумінні оберненою до перетворення Лапласа (7.1), оскільки виражає оригінал через задане зображення. Із властивостей інтеграла Фур'є випливає, що інтеграл (7.14) співпадає з функцією $f(t)$ лише в точках її неперервності.

7.4. Застосування перетворення Лапласа до розв'язування диференціальних рівнянь

В даному параграфі ми розглянемо приклади застосування до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь. Із властивостей перетворення Лапласа випливає, що знаходження невідомого розв'язку $x(t)$ диференціального рівняння зводиться до розв'язування алгебраїчного рівняння відносно його зображення $X(p)$.

Приклад 1. Знайти розв'язок диференціального рівняння $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}$, що задовольняє умовам $x(0) = x'(0) = 0$.

Розв'язування. Позначимо невідомий розв'язок $x(t)$ і його зображення $X(p)$:

$$x(t) \doteqdot X(p).$$

Оскільки $2e^{3t} \doteqdot \frac{2}{p-3}$, то знаходячи перетворення Лапласа лівої і правої частини диференціального рівняння, одержимо

$$p^2 X(p) - 3p\, X(p) + 2\, X(p) = \frac{2}{p-3},$$

$$X(p)(p^2 - 3p + 2) = \frac{2}{p-3},$$

$$X(p) = \frac{2}{(p-3)(p-2)(p-1)} =$$

$$= \frac{1}{p-3} - \frac{2}{p-2} + \frac{1}{p-1} \doteqdot e^{3t} - 2e^{2t} + e^{t} = x(t).$$

Отже, розв'язком задачі є $x(t) = e^{3t} - 2e^{2t} + e^{t}$.

Приклад 2. Знайти розв'язок диференціального рівняння $x'' - x = 4\sin t + 5\cos 2t$, що задовольняє умовам $x(0) = -1$, $x'(0) = -2$.

Розв'язування. Позначимо невідомий розв'язок $x(t)$ і його зображення $X(p)$:

$$x(t) \doteqdot X(p).$$

Оскільки

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}, \quad \cos 2t \doteqdot \frac{p}{p^2+2^2},$$

$$x'(t) \doteqdot pX(p)+1,$$

$$x''(t) \doteqdot p^2X(p)+p+2,$$

то знаходячи перетворення Лапласа лівої і правої частини диференціального рівняння, одержимо

$$p^2X(p)+p+2-X(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{5p}{p^2+4},$$

а

$$X(p)=-\frac{1}{3}\frac{1}{p^2+1}-\frac{5}{3}\frac{1}{p^2+4}-\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{p+1}.$$

Тому

$$x(t)=-\frac{1}{3}\sin t-\frac{5}{6}\sin 2t-\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}.$$

Приклад 3. Знайти розв’язок диференціального рівняння $x''-2x'+x=t^2e^t$, що задовольняє умовам $x(0)=x'(0)=0$.

Розв’язування. Позначимо невідомий розв’язок $x(t)$ і його зображення $X(p)$:

$$x(t) \doteqdot X(p).$$

Оскільки

$$t^2e^t \doteqdot \frac{2}{(p-1)^3},$$

То, знаходячи перетворення Лапласа лівої і правої частини диференціального рівняння, одержимо

$$p^2X(p) - 2p\,X(p) + \ X(p) = \frac{2}{(p-1)^3},$$

$$X(p) = \frac{2}{(p-1)^5} = \frac{2}{4!}\frac{4!}{(p-1)^5} \risingdotseq \frac{1}{12}t^4e^t = x(t).$$

Отже, розв'язком задачі є $x(t) = \frac{1}{12}t^4e^t$.

Приклад 4. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) - y(t) = e^t, \\ y'(t) + 3x(t) - 2y(t) = 2e^t, \end{cases}$$

що задовольняє умовам $x(0) = 1,\ \ y(0) = 1$.

Розв'язування. Позначимо невідомий розв'язок $x(t), y(t)$ і його зображення $X(p),\ Y(t)$:

$$x(t) \risingdotseq X(p),\ \ y(t) \risingdotseq Y(p).$$

Оскільки $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1},\ x'(t) \ \risingdotseq p\,X(p) - 1,\ y'(t) \ \risingdotseq p\,Y(p) - 1,$

то одержимо систему

$$\begin{cases} p\,X(p) - 1 + X(p) - Y(p) = \dfrac{1}{p-1}, \\ p\,Y(p) - 1 + 3X(p) - 2Y(p) = \dfrac{2}{p-1}. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{1}{p-1} \risingdotseq e^t = x(t), \\ Y(p) = \dfrac{1}{p-1} \risingdotseq e^t = y(t). \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = e^t. \end{cases}$$

Приклад 5. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'(t) + 2x(t) + 2y(t) = 10e^{2t}, \\ y'(t) - 2x(t) + 2y(t) = 7e^t, \end{cases}$$

що задовольняє умовам $x(0) = 1,\ \ y(0) = 3.$

Розв'язування. Позначимо невідомий розв'язок $x(t), y(t)$ і його зображення $X(p),\ Y(t)$:

$$x(t) \doteqdot X(p),\ \ y(t) \doteqdot Y(p).$$

Оскільки $e^{2t} \doteqdot \frac{1}{p-2},\ x'(t)\ \doteqdot p\,X(p) - 1,\ y'(t)\ \doteqdot p\,Y(p) - 3,$

то одержимо систему

$$\begin{cases} p\,X(p) - 1 + 2X(p) + 2Y(p) = \dfrac{10}{p-2}, \\ p\,Y(p) - 3 - 2X(p) + Y(p) = \dfrac{7}{p-2}. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{1}{p-2} \doteqdot e^{2t} = x(t), \\ Y(p) = \dfrac{3}{p-2} \doteqdot 3e^{2t} = y(t). \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}, \\ y(t) = 3e^{2t}. \end{cases}$$

7.5. Вправи до розділу 7

7.1. Нехай $\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < 0, \\ 1, & \text{якщо } t \geq 0 \end{cases}$ – одинична функція Хевісайда. Знайти зображення таких функцій:

a) $\eta(t)\,\mathrm{sh}\,t$; b) $\eta(t)\,\mathrm{ch}\,t$; c) $\eta(t)e^{\alpha t}\sin\omega t$; d) $\eta(t)e^{\alpha t}\cos\omega t$;

e) періодичної системи імпульсів

$$f(t) = \varphi(t - nT), \quad t - nT \in [0, T), \qquad n = 0,1,2, \dots,$$

$$\varphi(t) = \eta(t) - \eta(t - \tau);$$

f) періодичної системи синусоїдальних імпульсів

$$f(t) = \sin(t - n\pi), \quad t \in [n\pi, (n+1)\pi), \qquad n = 0,1,2, \dots$$

7.2. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти розв'язки задач Коші:

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \qquad t > 0, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$y'' + 3y' - 4y = 0, \qquad t > 0, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$y'' - 4y' + 8y = 0, \qquad t > 0, y(0) = 1, y'(0) = -1;$$

$$y'' - 6y' + 5y = 0, \qquad t > 0, y(0) = -1, y'(0) = 2;$$

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \qquad t > 0, y(0) = 0, y'(0) = 2;$$

7.3. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = z + x, \\ z' = x + y, \end{cases}$$

що задовольняє умовам:

$$\begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = 1, \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

7.4. Знайти розв’язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'' - 3x - 4y + 3 = 0, \\ y'' + x + y - 5 = 0, \end{cases}$$

що задовольняє умовам:

$$\begin{cases} x(0) = x'(0) = 0, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

8. Завдання для модульного контролю

Оскільки курс є семестровим, а в семестрі проводиться два модульні контролі, то у відповідності до цього ввесь програмовий матеріал поділено на два модулі. До першого модуля ми виносимо матеріал перших трьох розділів, а до другого решту. Кожен модуль містить теоретичні питання і практичні завдання по відповідних розділах. Ми наводимо нижче зразки двох модульних контрольних робіт.

8.1. Завдання для першого модульного контролю

В.1.1

1. Знайти модуль і аргумент комплексного числа $(-4+3i)^3$.
2. Яку лінію визначає рівняння $z^2+\bar{z}^2=2a^2$?
3. Розв'язати рівняння $\sin z=\frac{4i}{3}$.
4. Знайти границю послідовності $z_n=\frac{n+1}{2n}+i\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$.
5. Перевірити виконання умов Коші-Рімана для функції $\cos z$ і довести, що $(\cos z)'=-\sin z$.
6. Знайти образ області D при відображенні $w=f(z)$:

$$D=\{z: |z|<1, Im\, z>0\},\quad w=\frac{2z-i}{2+iz}.$$

7. Круг $|z|<1$ з розрізом по відрізку $\left[\frac{1}{2},1\right]$ відобразити на верхню півплощину.

В.1.2

1. Знайти модуль і аргумент комплексного числа $(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^6$.
2. Яку лінію визначає рівняння $|z-2|=|1-2\bar{z}|$?
3. Розв'язати рівняння $\cos z=\frac{3i}{4}$.
4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^n}+i\frac{2^n}{3^n n}\right)$.
5. Знайти сталі $a,b,c,$ при яких функція $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$ буде аналітичною.
6. Знайти образ області D при відображенні $w=f(z)$:

$$D = \left\{z: 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}, \quad w = \frac{z}{z-1}.$$

7. Знайти образ області $\{z: Re\, z < 0,\ 0 < Im\, z < \pi\}$ при відображенні $w = e^z$:

В.1.3

1. Виконати дії (обчислити) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

2. Яку лінію визначає рівняння $|z| = Re\, z + 1$?

3. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} z = \frac{5i}{3}$.

4. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{in}{3n+i}\right)^n$.

5. Знайти множини точок, у яких функція $f(z) = (\bar{z})^2$ буде моногенною.

6. Знайти образ смуги $0 < Re\, z < 1$ при відображенні $w = \frac{z-1}{z}$.

7. Відобразити круг $|z| < 2$ на $Re\, w > 0$ так, щоб $w(0) = 1, \quad \arg w'(0) = \frac{\pi}{2}$.

В.1.4

1. Виконати дії(обчислити) $\frac{i^5+2}{i^{19}+1}$.

2. Яку лінію визначає рівняння $Im\frac{z-1}{z+1} = 0$?

3. Розв'язати рівняння $\sin z - \cos z = i$.

4. Дослідити на збіжність ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n} + i\frac{1}{n^2+1}\right)$.

5. Знайти аналітичну функцію $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ за її дійсною частиною $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$.

6. Знайти образи ліній $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ при відображенні $w = \frac{1}{z}$.

7. Відобразити круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, щоб $w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

$\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

В.1.5

1. Розв'язати рівняння $\bar{z} - 2z = 1 + 2i$.

2. Зобразити на комплексній площині множину точок $\{z: |z-1| \le |z+1|\}$.

3. Знайти $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{1-i}$.

4. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n}$.

5. Знайти аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ за її уявною частиною $v=3+x^2-y^2-\frac{1}{2}\frac{y}{x^2+y^2}$.

6. Знайти лінійне відображення, яке круг $|z+1-i|<3$ відображає на круг $|w-2|<1$, причому вертикальний діаметр переходить в горизонтальний.

7. Відобразити $Im\, z>0$ в круг $|w|<1$ так, щоб $w(i)=0, \arg w'(i)=-\frac{\pi}{2}$.

В.1.6

1. Знайти всі значення коренів $\sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}}$.

2. Зобразити на комплексній площині множину точок $\left\{z: Re\left(z(1-i)\right)<\sqrt{2}\right\}$.

3. Знайти $(3-4i)^{1+i}$.

4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+i\frac{2^n}{n!}\right)$.

5. Знайти аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ за її дійсною частиною $u=\ln(x^2+y^2)$.

6. Знайти лінійне відображення, яке трикутник з вершинами в точках $0,\ 1,\ i$ відображає на трикутник з вершинами $0,\ 2,\ 1+i$.

7. Дробово-лінійною функцією відобразити $|z|>1$ на $|w-i|<1$.

В.1.7

1. Розв'язати рівняння $z^8=1+i$.

2. Зобразити на комплексній площині множину точок $\{z: 2|z|>|1+z^2|\}$.

3. Знайти $(3+4i)^{1+i}$.

4. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^3}$.

5. Знайти аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ за її уявною частиною $v=x^3-3xy^2$.

6. Знайти образ півплощини $Re\, z>0$ при відображенні $w=(1-i)z+2$.

7. Знайти відображення верхньої півплощини на себе, щоб виконувались умови: $w(0)=1,\ w(i)=2,\ w(2)=\infty$.

B.1.8

1. Чи однакові множини значень $\sqrt{i^4}$ i $\left(\sqrt{i}\right)^4$?

2. Яку лінію визначає рівняння $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = a > 0$?

3. Знайти $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{-i}$.

4. Знайти границю послідовності $z_n = \sqrt{n^2+n} - n + i\ln\frac{n+2}{n+3}$

5. Знайти множини точок, у яких функція $f(z) = z\,Re\,z$ буде моногенною.

6. Знайти образ круга $|z+i| < 1$ при відображенні $w = 2iz + 4$.

7. Знайти образ області $\left\{z: -\frac{1}{2} < Re\,z < \frac{1}{2}\right\}$ при відображенні $w = \sin z$.

8.2. Завдання для другого модульного контролю

B.2.1

1. Знайти інтеграл $\int_L e^{\bar{z}}dz$, де L відрізок прямої з початком у точці $z_1 = 0$ і кінцем у точці $z_2 = \pi - i\pi$.

2. Розкласти функцію $\frac{z^2}{(1+z)^2}$ в ряд Тейлора за степенями z та вказати радіус збіжності.

3. Знайти полюси функції $f(z) = \frac{\cos z}{(z^2-z-2)^2}$ і визначити їх порядок.

4. Розкласти функцію $f(z) = \frac{1+cos^2 z}{z^4}$ в ряд Лорана в околі точки $z_0 = \infty$.

5. Обчислити $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2}$.

6. Знайти лишки функції $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$ в усіх ізольованих особливих точках.

7. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{2\pi} \frac{(\sin x)^2}{5+4\cos x}dx$.

8. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти розв’язок задачі Коші:

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \qquad t > 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

B.2.2

1. За інтегральною формулою Коші знайти інтеграл $\int_{|z|=2} \frac{z^3 sh\,z}{(z-1)^4}dz$.

2. Розкласти функцію $\frac{z}{z^2-2z+5}$ в степеневий ряд за степенями $z-1$ та вказати радіус збіжності.

3. Довести, що точка $z_0=\infty$ є усувною особливою точкою функції

$$f(z)=\frac{1-\cos\frac{1}{z}}{\sin\frac{1}{z}}.$$

4. Знайти область збіжності ряду Лорана $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$.

5. Обчислити $\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$.

6. Знайти лишки функції $\frac{1}{z^3-z^5}$ в усіх ізольованих особливих точках.

7. Обчислити невласний інтеграл $\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

8. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти розв'язок задачі Коші:

$$y''+3y'-4y=0, \qquad t>0, y(0)=0, y'(0)=1.$$

В.2.3

1. Знайти інтеграл $\int_L (z^2+z\bar{z})dz$, де L дуга параболи $y=x^2$, $0\le x\le 1$.

2. Розкласти функцію $\ln\frac{1+z}{1-z}$ в ряд Тейлора за степенями z та вказати радіус збіжності.

3. Знайти порядок нуля $z=0$ для функції $z^2\left(e^{z^2}-1\right)$.

4. Розкласти функцію $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ в ряд Лорана в кільці

$$Q=\{z: 1<|z|<2\}.$$

5. Обчислити $\operatorname*{res}_{z=-1}\left(\sin\frac{z}{z+1}\right)$.

6. Знайти лишки функції $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ в усіх ізольованих особливих точках.

7. Використовуючи лишки, знайти $\int_{|z|=1} z^2\operatorname{tg}(\pi z)dz$.

8. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти розв'язок задачі Коші:

$$y'' - 4y' + 8y = 0, \qquad t > 0, y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

B.2.4

1. За інтегральною формулою Коші знайти інтеграл $\int_{|z|=4} \frac{(z+i)sin^2 z}{z^2+9} dz$.
2. Розкласти функцію $sin^2 z$ в ряд Тейлора за степенями z та вказати радіус збіжності.

3. Знайти порядки всіх нулів функції $e^{z-i} - 1$.

4. Розкласти функцію $f(z) = \frac{1}{(z^2-4)^2}$ в ряд Лорана в кільці

$$Q = \{z: |z+2| > 4\}.$$

5. Обчислити $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{z^{n-1}}{(\sin z)^n}, n \in N$.

6. Знайти лишки функції $\frac{1}{z(1-z^2)}$ в усіх ізольованих особливих точках.

7. Обчислити невласний інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1} dx$.

8. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти розв'язок задачі Коші:

$$y'' - 6y' + 5y = 0, \qquad t > 0, y(0) = -1, y'(0) = 2.$$

B.2.5

1. За інтегральною формулою Коші знайти інтеграл $\int_{|z|=3} \frac{ch\, z}{(z+1)^3(z-1)} dz$.
2. Розкласти функцію $\cos z$ в степеневий ряд за степенями $z - \frac{\pi}{4}$ та вказати радіус збіжності.

3. Довести, що точка $z_0 = 0$ є істотно особливою точкою функції $f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}}$.

4. Розкласти функцію $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ в ряд Лорана в околі точки $z_0 = \infty$.

5. Обчислити $\operatorname*{res}_{z=\infty} z\left(\cos\frac{\pi}{z}\right)^2$.

6. Знайти лишки функції $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$ в усіх ізольованих особливих точках.

7. Використовуючи лишки, знайти інтеграл

$$\int_{\partial G} \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}, G = \{z: 2 < |z-1| < 4\}.$$

8. Використовуючи перетворення Лапласа, знайти розв'язки задач Коші:

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \qquad t > 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

Список літератури

1. Александров И. А., Соболев В. В. Аналитические функции комплексного переменного. – М.: Высшая школа, 1984. – 192 с.

2. Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968. – 416 с.

3. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1975. – 320 с.

4. Грищенко О. Ю., Нагнибіда Н. І., Настасієв П. П. Теорія функцій комплексної змінної: Розв’язування задач. – К.: Вища школа, 1994. – 375с.

5. Гольдберг А. А., Шеремета М. М. Аналітичні функції. – К.: УМК ВО, 1991. – 116с.

6. Гольдберг А. А., Шеремета М. М., Скасків О. Б., Заболоцький М. В. Комплексний аналіз. – Львів: Афіша, 2008. 203с.

7. Давидов Н. О. Елементи теорії функцій комплексної змінної. – К.: Рад. шк., 1968. – 212с.

8. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 1. – К.: Либідь, 1993. – 320с. Частина 2. – К.: Либідь, 1994. – 304с

9. Евграфов М. А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1968. – 472с.

10. Евграфов М. А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1972. – 415с.

11. Маркушевич И. А. Краткий курс теории аналитических функций. –М.: Наука, 1966. – 388с.

12. Мартиненко М. А., Юрик І. І. Теорія функцій комплексної змінної. Опереційне числення. – К.: Слово, 2008. – 295с.

13. Павлова Л. В., Редькіна О. І. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ. – К.: Вища школа, 1980. – 216с.

14. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 432с.

15. Самойленко В. Г., Бородін В. А., Верьовкіна Г. В., Ловейкін А. В., Романенко І. Б. Комплексний аналіз. Приклади і задачі. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2010. – 224с.

16. Свешников А.Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1974. – 304 с.

17. Шабат И. З. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576с.