МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

В.В. Рубіш

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина I

УЖГОРОД–2015

Рубіш В.В. Конспект лекцій з курсу "Вища математика": Частина I. – Ужгород: ДВНЗ УжНУ, 2015. – 96 с.

Рецензенти: Гайсак М.І. – доктор фізико-математичних наук, професор, Карбованець М.І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Автори: кандидат фізико-математичних наук, доцент Рубіш Василь Васильович.

Затверджено і рекомендовано на засіданні кафедри теоретичної фізики УжНУ 24 травня 2015 року, протокол № 5.

Схвалено на засіданні науково-методичної ради фізичного факультету УжНУ чч ммммммм 2015 року, протокол №Х.

Конспект лекцій містить короткі відомості з лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, вступу до математичного аналізу та диференціального числення.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Конспект лекцій містить короткі теоретичні відомості з традиційних розділів вищої математики (лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, вступу до математичного аналізу та диференціального числення функції однієї змінної), передбачених типовою навчальною програмою Міністерства освіти і науки України для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти.

Конспект лекцій може бути використаний в якості довідкового матеріалу з вищої математики студентами як очної, так і заочної форми навчання.

1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. Матриці та дії над ними

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, яка має m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Коротко матрицю позначають так: $A = (a_{ij})$, де a_{ij} – **елементи матриці**, запис $m \times n$ означає її розмір.

Якщо $m = n$, матриця називається **квадратною**. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її **порядком**. Дві матриці $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ називаються рівними, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$. Елементи a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$ утворюють **головну діагональ** квадратної матриці. Квадратна матриця називається **діагональною**, якщо всі її елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю. **Одинична** матриця E – це діагональна матриця, у якій елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Якщо $i = 1$, то отримуємо **матрицю-рядок**; якщо $j = 1$, дістаємо **матрицю-стовпець**.

Якщо елементи i-го рядка матриці записати в i-й стовпець $(i = 1, 2, \ldots, m)$, дістанемо **транспоновану матрицю** A^T.

Перерахуємо **основні операції над матрицями**.

1. **Множення матриці на число**. **Добутком матриці**A **і числа** λ, називається матриця $B = \lambda A$ тієї ж розмірності, елементи якої рівні $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, де a_{ij} – елементи матриці A, тобто при множенні матриці на число необхідно всі елементи матриці помножити на це число.

Приклад 1.1. *Нехай*

$$\lambda = -2, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$B = \lambda A = -2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. **Додавання і віднімання матриць**. Ці операції визначені тільки для матриць однакового розміру. **Сумою (різницею) матриць** A **і** B, що позначається $A + B\,(A - B)$, називається матриця C, елементи якої рівні $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, де a_{ij} і b_{ij} – відповідно елементи матриць A і B.

Приклад 1.2. *Нехай*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}.$$

3. **Множення матриць**. Операцію множення матриць можна виконати, лише для узгоджених матриць. Матриця A називається **узгодженою з матрицею** B, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. **Добутком матриць** $A_{m\times n} = (a_{ij})$ **і** $B_{n\times p} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times p} = A \cdot B$, елемент c_{ij} котрої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$
$$i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

З існування добутку AB не слідує існування добутку BA. У випадку його існування, як правило $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються **переставними** (або **комутуючими**). Відомо, що завжди $(AB)C = A(BC)$.

Приклад 1.3. *Знайти AB і BA, якщо:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

Знаходимо добуток AB:

$$AB = C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

де $c_{11} = 4(-1) + (-5)(-2) + 8 \cdot 3 = 30$; $c_{12} = 4 \cdot 5 + (-5)(-3) + 8 \cdot 4 = 67$; $c_{21} = 1(-1) + 3(-2) + (-1)3 = -10$; $c_{22} = 1 \cdot 5 + 3(-3) + (-1) \cdot 4 = -8$.

В результаті $AB = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$.

Далі знаходимо

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AB \neq BA$.

Приклад 1.4. *Знайти* $(AB)C$ *і* $A(BC)$, *якщо:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad (AB)C = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(BC) = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix},$$

тобто, $(AB)C = A(BC)$.

Квадратна матриця A^2 – це результат множення матриці A самої на себе $A \cdot A$. Аналогічно вводиться поняття n-го степеня матриці A, тобто

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\,\text{разів}}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайти ті добутки AB, BA, AC, CA, BC, CB, які мають зміст.

$$\textit{Відповідь}:\quad BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

обчислити $4A - 3B + C$, $A^T + B^T$, AB, BA, $BC + A^2$.

$$\textit{Відповідь}: 4A - 3B + C = \begin{pmatrix} 7 & 24 & 11 \\ -2 & -3 & 0 \\ 9 & -5 & 25 \end{pmatrix}, A^T + B^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 15 \\ -2 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 15 \\ -2 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BC + A^2 = \begin{pmatrix} 27 & 29 & 25 \\ 6 & -3 & -3 \\ 18 & -6 & 57 \end{pmatrix}.$$

1.2. Визначники. Обчислення визначників

Для квадратних матриць вводиться поняття **визначника**. Це число, яке знаходять за відповідними правилами. **Визначник другого порядку** обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.2}$$

Схема обчислень полягає у відшуканні різниці добутку елементів головної діагоналі та добутку елементів побічної діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.3)$$

Обчислення виконуються за **правилом трикутників**: зі знаком "+" беруться добутки елементів головної діагоналі, а також елементів, розміщених на прямих, паралельних головній діагоналі, та елемента, розміщеного у відповідному протилежному куті визначника. Зі знаком "−" беруться добутки елементів, побудовані за таким самим правилом відносно побічної діагоналі визначника.

Для обчислення визначників третього порядку використовують також **правило Саррюса**. За цим правилом у початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

Для знаходження визначника треба утворити зі знаком "+" алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком "мінус" – добутків елементів, розміщених на побічній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Мінором M_{ij} **елемента** a_{ij} називається визначник $n-1$-го порядку, який утворюється з визначника n-го порядку викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця (рядка і стовпця в яких знаходиться даний елемент a_{ij}).

Алгебраїчним доповненням A_{ij} **елемента** a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1.4)$$

Приклад 1.5. *Якщо* $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$, *то* $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -1.$

Теорема 1.1. *Визначник (довільного порядку n) дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Наприклад, розклад визначника за елементами першого рядка дається формулою

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}. \qquad (1.5)$$

Теорема 1.2. *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.*

Приклад 1.6.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-3)2 = 10;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 8 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 1 - (-1)1 \cdot 1 -$$

$$-3 \cdot 2 \cdot 2 = -16 + 3 + 4 - 16 + 1 - 12 = -36;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \\ -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \\ -2 & -6 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-140 + 108 + 84) - 2(-70 + 54) + 3(-28) - 4(-12) =$$

$$= 52 + 32 - 84 + 48 = 48.$$

Перерахуємо **основні властивості визначників**:

1) значення визначника не змінюється при заміні всіх його рядків на відповідні стовпці, і навпаки ($det\, A = det\, A^T$);

2) якщо поміняти місцями два паралельні рядки (стовпці) визначника, то він змінить знак на протилежний;

3) визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) рівний нулю;

4) якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника. Звідси випливає, що якщо елементи якого-небудь рядка (стовпця) домножити на число λ, то визначник Δ множиться на це ж число λ;

5) якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) рівні нулю, то визначник також рівний нулю;

6) визначник, у котрого елементи двох паралельних рядків (стовпців) відповідно пропорційні, рівний нулю;

7) якщо кожний елемент деякого рядка визначники є сумою двох доданків, то такий визначник рівний сумі визначників, в першому з котрих відповідний рядок складається з перших доданків, а у другому – із других доданків:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

8) визначник не зміниться, якщо до всіх елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого паралельного рядка (стовпця), помножені на одне і те ж довільне число λ. Наприклад, для стовпців визначника ця властивість виражається рівністю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+\lambda\, a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+\lambda\, a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+\lambda\, a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо **основні методи обчислення визначників**.

1. **Метод ефективного пониження порядку**. Згідно теореми 1.1 обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення n визначників $(n-1)$-го порядку. Такий метод обчислення є неефективним. Використовуючи основні властивості визначників, зокрема властивість 8, визначник n-го порядку завжди можна звести до обчислення одного визначника $(n-1)$-го порядку, зробивши в якому-небудь рядку (стовпці) всі елементи, крім одного, рівними нулю. Покажемо це на прикладі.

Приклад 1.7. *Обчислити визначник*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок.

За властивістю 4 визначників із першого рядка винесемо множник 10, а потім будемо послідовно домножати отриманий рядок на 3, 1, 2 і додавати відповідно до другого, третього та четвертого рядка. Тоді, відповідно до властивості 8, маємо:

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

На основі теореми 1.1 отриманий визначник можна розкласти за елементами другого стовпця. Тоді

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

В результаті ми отримали визначник третього порядку, котрий можна обчислити за допомогою правила Саррюса або ж подібним прийомом звести до обчислення одного визначника другого порядку. Дійсно, віднімаючи від другого і третього рядка даного визначника перший рядок і розкладаючи визначник за елементами третього стовпця, отримаємо

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910.$$

2. **Зведення визначника до трикутного вигляду**. Визначник, у котрого всі елементи, що розташовані вище або нижче головної діагоналі, рівні нулю, називається **визначником трикутного вигляду**. Очевидно, що в цьому випадку визначник рівний добутку елементів його головної діагоналі. Будь-який визначник можна звести до трикутного вигляду.

Приклад 1.8. *Обчислити визначник*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок.

Виконаємо наступні операції. Поміняємо місцями перший і четвертий стовпці, а потім – другий і третій. Четвертий стовпець отриманого визначника помножимо на 4 і віднімемо від першого, цей же стовпець, помножений на 3, – від другого, на 2 – від третього стовпця. В результаті отримаємо визначник трикутного вигляду, який рівний вихідному:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20.$$

Зведення визначника до трикутного вигляду буде використовуватися в подальшому при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса.

Завдання для самостійної роботи

Обчислити визначники.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. (*Відповідь*: 54.) 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. (*Відповідь*: 160.)

3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. (*Відповідь*: 27.)

1.3. Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці

Якщо A – квадратна матриця, а її визначник $D = |A| \neq 0$, то для неї існує **обернена матриця** A^{-1}, така що: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця.

Обернена матриця A^{-1} – це транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці A, поділених на визначник матриці A:

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Приклад 1.9. *Дано матрицю* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Знайти обернену їй матрицю* A^{-1} *та перевірити виконання рівностей* $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Розв'язок.

Обчислюємо $\det A = -10 \neq 0$ *та алгебраїчні доповнення* $A_{11} = -5$, $A_{12} = 2$, $A_{13} = 3$, $A_{21} = 5$, $A_{22} = 0$, $A_{23} = -5$, $A_{31} = -5$, $A_{32} = -4$, $A_{33} = -1$. *Тоді маємо*

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти матрицю A^{-1}, обернену до даної матриці A, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: 1) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 & -9 & 14 \\ 13 & 12 & -17 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix}$;

3) $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -7 & 3 & -13 & 41 \\ -13 & -3 & 8 & -16 \\ 18 & 3 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

1.4. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміром $m\times n$. Виберемо в ній довільним чином k рядків та k стовпців. На їх перетині дістанемо визначник k-го порядку, який називається мінором **k-го порядку даної матриці**.

Рангом матриці A (позначається $r(A)$) називається найвищий порядок її мінора, відмінного від нуля.

Існує два методи обчислення рангу матриці.

1. **Метод обвідних мінорів**. Якщо знайдений мінор k-го порядку матриці відмінний від нуля, а всі її мінори $(k+1)$-го порядку, які містять даний мінор k-го порядку, дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k.

Приклад 1.10. *Знайти ранг матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

A – матриця третього порядку, отже, її ранг не може бути більшим трьох. Визначник третього порядку дорівнює нулю:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

але існує мінор другого порядку $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 14$, *відмінний від нуля. Отже, ранг матриці A дорівнює двом, $r(A) = 2$.*

2. **Метод елементарних перетворень**. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці. До них належать:

а) перестановка місцями двох рядків або стовпців матриці;

б) множення всіх елементів рядка або стовпця на відмінне від нуля число;

в) додавання до елементів деякого рядка або стовпця відповідних елементів іншого рядка або стовпця, помножених на відмінне від нуля число.

Дві матриці називаються **еквівалентними**, якщо одна матриця одержується з іншої за допомогою елементарних перетворень. Еквівалентність матриць A і B позначають $A \sim B$. За допомогою елементарних перетворень вихідну матрицю зводять еквівалентної матриці, в кожному рядку та кожному стовпці якої залишається не більш одного, відмінного від нуля, елемента. Тоді ранг матриці дорівнює кількості відмінних від нуля елементів.

Приклад 1.11. *Знайти ранг матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

Поділимо третій стовпець матриці A на 2. Далі, отриманий перший рядок помножимо на 2 і віднімемо його від четвертого рядка. Тепер третій стовпець містить три нулі і одиницю (в першому рядку). Тому легко робимо нулі в першому рядку на першій, другій, четвертій та п'ятій позиції і маємо

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тепер четвертий рядок останньої матриці додаємо до другого і третього і отримуємо два нулі у другому стовпці, після чого робимо нулі в четвертому рядку всюди, крім одиниці на перетині четвертого рядка і другого стовпця. В результаті цих елементарних перетворень маємо:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ми отримали три одиниці. Отже, $r(A) = 3$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти ранг матриці A за допомогою елементарних перетворень або методом обвідних мінорів, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: 1) 2; 2) 2; 3) 3.

1.5. Розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими

Нехай дано систему n лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}\right\} \tag{1.7}$$

Якщо визначник D, складений з коефіцієнтів a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ системи (1.7)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.8}$$

то система має єдиний розв'язок, який можна одержати за **формулами Крамера**:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.9}$$

де D_i – **допоміжний** визначник, який дістаємо заміною у **основному** визначнику D i-го стовпця, стовпцем складеним з вільних членів b_1, b_2, $\ldots$, b_n. Якщо $D = 0$, а $D_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то система (1.7) не має розв'язків, тобто є несумісною. Якщо ж $D = D_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, тоді система (1.7) має безліч розв'язків, тобто є невизначеною.

Приклад 1.12. *Розв'язати систему рівнянь за допомогою формул Крамера:*

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 0, \\ 3x_2 + 4x_3 & = & -6, \\ x_1 + x_3 & = & 1. \end{array}\right\}$$

Розв'язок.

Обчислимо основний визначник системи

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 3 = 13.$$

Послідовно замінивши в D перший, другий та третій стовпці стовпцем із вільних членів, отримаємо:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 13, \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{13}{13} = 1,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -26, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-26}{13} = -2,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{0}{13} = 0.$$

Систему (1.7) можна представити у **матричному вигляді**:

$$AX = B, \tag{1.10}$$

де A – матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих, X – з невідомих, B – з вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді розв'язок системи лінійних рівнянь (1.7) можна знайти за формулою:

$$X = A^{-1}B, \tag{1.11}$$

де A^{-1} – матриця обернена до A.

Приклад 1.13. *Розв'язати систему рівнянь матричним методом:*

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 - x_3 &=& 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 1, \\ x_2 - x_3 &=& -3. \end{array}\right\}$$

Розв'язок.

Маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \det A = -11.$$

Обернена матриця рівна

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тоді знаходимо

$$X = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 4\cdot(-3) \\ 1\cdot 0 - 4\cdot 1 - 5\cdot(-3) \\ 1\cdot 0 - 4\cdot 1 + 6\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

тобто, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ *– розв'язок даної системи.*

1.6. Розв'язування довільних систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь, представлену у вигляді матричного рівняння $AX = B$, в якій матриця A має розмір $m \times n$. Така система є **сумісною**, якщо ранг $r(A)$ основної матриці A дорівнює рангу розширеної матриці $r(\bar{A})$. Розширену матрицю дістанемо, доповнивши матрицю A стовпцем з вільних членів. В цьому полягає **критерій сумісності Кронекера-Капеллі**.

У разі, коли система сумісна і ранг матриці $r(A)$ дорівнює кількості невідомих n, система має єдиний розв'язок. Якщо ж у сумісній системі ранг r менший за кількість невідомих, то система має безліч розв'язків. Щоб знайти розв'язки системи, беремо r рівнянь, у лівій частині яких залишаємо r невідомих. Рівняння та невідомі вибираємо так, щоб мінор, складений з коефіцієнтів зазначених рівнянь, був відмінний від нуля. Невідомі, залишені в лівій частині, називаються **базисними**. Решту невідомих переносимо у праву частину рівняння. Ці невідомі називаються **вільними**.

Загальний розв'язок системи дістаємо, розв'язуючи систему відносно базисних невідомих. Їх значення виражаються через вільні члени і вільні невідомі. **Частинні розв'язки** дістаємо, надаючи вільним невідомим певних числових значень. **Базисний розв'язок** системи маємо, якщо всі вільні невідомі дорівнюють нулю.

Приклад 1.14. *Дослідити систему і розв'язати її, якщо вона сумісна.*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 & = & 5. \end{array}\right\}$$

Розв'язок.

Складаємо основну матрицю системи A і методом обвідних мінорів знаходимо її ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

оскільки,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

то $r(A) = 2$. Аналогічно знаходимо ранг розширеної матриці:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad r(\bar{A}) = 2.$$

Отже, $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < n = 3$. Тому згідно критерію Кронекера–Капеллі система сумісна, має безліч розв'язків та містить два незалежних рівняння. За ці два рівняння можна прийняти перші два рівняння системи, оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В якості базисних змінних приймаємо x_1 та x_2, а x_3 – вільний невідомий параметр. Тоді

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 &=& 3 - x_3, \\ x_1 + 3x_2 &=& 1 + x_3, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_2 &=& \dfrac{2}{5}(x_3 - 1), \\ x_1 &=& \dfrac{1}{5}(11 - x_3). \end{array}$$

Таким чином, $x_1 = \dfrac{1}{5}(11 - x_3)$, $x_2 = \dfrac{2}{5}(x_3 - 1)$ – загальний розв'язок системи.

Довільні системи лінійних рівнянь розв'язуються за **методом Гаусса** (метод послідовного виключення невідомих). Він полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень система зводиться до рівносильної системи східчастого або трикутного вигляду, з якої послідовно, починаючи з останніх за номером невідомих, знаходимо всі інші невідомі.

Метод Гаусса зручно використовувати, працюючи з розширеною матрицею системи замість самих рівнянь. Розширену матрицю у цьому випадку записують з вертикальною прямою рискою, яка відділяє коефіцієнти біля невідомих від вільних членів. Стовпець вільних членів міняти місцями з іншими стовпцями розширеної матриці не можна.

Виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, після певної кількості кроків, отримаємо один з можливих випадків. Перший випадок:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1, \\ a''_{22}x_2 + a''_{23}x_3 + \ldots + a''_{2j}x_j + \ldots + a''_{2n}x_n &=& b''_2, \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3j}x_j + \ldots + a''_{3n}x_n &=& b''_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 &=& b''_i, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 &=& b''_m. \end{array}\right\} \qquad (1.12)$$

Система східчастого вигляду (1.12) вказує на два можливі випадки:

1) якщо будь-яке $b_i \neq 0$ тоді, коли ліва частина рівняння дорівнює нулю, то вихідна система розв'язку не має.

2) якщо усі $b_i = 0$ (коли ліві частини відповідних рівняння дорівнюють нулю), маємо тотожності, і ці нульові рядки можна відкинути. Тоді матимемо один з двох випадків:

а) кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих – система має єдиний розв'язок;

б) кількість рівнянь менша за кількості невідомих – система має безліч розв'зків.

Другий випадок ($r = n$):

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2j}x_j + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2,\\
a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3j}x_j + \ldots + a'_{3n}x_n &= b'_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ & \ldots\ \ \ldots\\
a'_{ii}x_i + \ldots + a'_{in}x_n &= b'_i,\\
\ldots\ldots\ & \ldots\ \ \ldots\\
a'_{nn}x_n &= b'_n.
\end{aligned}\right\}. \tag{1.13}$$

Якщо отримано систему трикутного вигляду (1.13), то це вказує на те, що початкова система $AX = B$ має єдиний розв'язок.

Приклад 1.15. *За допомогою методу послідовного виключення невідомих Гаусса дослідити систему на сумісність і у випадку сумісності розв'язати її.*

$$\left.\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2,\\
x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1,\\
3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= -2,\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3,\\
x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3.
\end{aligned}\right\}$$

Розв'язок.

Складемо розширену матрицю B і проведемо необхідні елементарні перетворення рядків:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2\\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3\\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3\\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \end{array}\right) \sim -\frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Останній матриці відповідає система, еквівалентна вихідній:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1,\\
x_2 + x_3 + x_4 &= 0,\\
x_3 - x_4 &= 2,\\
x_4 &= -1.
\end{aligned}\right\}$$

З неї, рухаючись знизу вверх, послідовно знаходимо: $x_4 = -1$, $x_3 = 2 + x_4 = 2-1 = 1$, $x_2 = -x_3 - x_4 = -1+1 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1-5+2 = -2$.

Отже, система сумісна, визначена, тобто, вона має єдиний розв'язок ($r = n = 4$): $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

Завдання для самостійної роботи

Перевірити сумісність системи рівнянь і у випадку сумісності знайти її розв'язки: а) за допомогою формул Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса.

$$1)\ \left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &=& 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &=& 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 6. \end{array}\right\} \qquad 2)\ \left.\begin{array}{rcr} 3x_1 - x_2 + x_3 &=& 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &=& 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &=& 3. \end{array}\right\}$$

$$3)\ \left.\begin{array}{rcr} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 &=& -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 &=& 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 &=& -5. \end{array}\right\}$$

Відповідь: 1) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$; 3) $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_3 = 5$.

1.7. Однорідна система лінійних рівнянь

Нехай задано однорідну систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &=& 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &=& 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &=& 0. \end{array}\right\} \qquad (1.14)$$

Ця система завжди має нульовий розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_n = 0$, тому що підстановка нулів замість невідомих в кожне з рівнянь (1.14) перетворює їх в тотожності. Ненульові розв'язки (якщо вони існують) системи (1.14) можна знайти методом Гаусса.

Однорідна система n рівнянь з n невідомими має єдиний нульовий розв'язок, якщо визначник системи D (див. формулу (1.8)) відмінний від нуля $D \neq 0$. Якщо $D = 0$, то система має безліч розв'язків. Розглянемо два типові випадки.

Приклад 1.16. *Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &=& 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &=& 0. \end{array}\right\}$$

Розв'язок.

Визначник системи

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

тому система має єдиний нульовий розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

Приклад 1.17. *Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Розв'язок.

Так як

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

то система має безліч розв'язків. Оскільки $r(A) = 2$, $n = 3$, *виберемо два довільні рівняння системи (наприклад, перше і друге) і знайдемо її розв'язки. Тоді маємо:*

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Так як визначник складений із коефіцієнтів при невідомих x_1 *та* x_2 *не рівний нулю, то в якості базисних невідомих візьмемо* x_1 *та* x_2 *(хоча можна брати і інші пари невідомих), а члени з* x_3 *перенесемо в праві частини рівнянь:*

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= x_3, \\ x_1 - 3x_2 &= -5x_3. \end{aligned}\right\}$$

Розв'яжемо останню систему за допомогою формул Крамера (1.9):

$$x_1 = D_1/D, \quad x_2 = D_2/D,$$

де

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -16x_3.$$

Звідки знаходимо, що $x_1 = -17x_3/13$, $x_2 = 16x_3/13$. *Поклавши* $x_3 = 13k$, *де* k *– довільний коефіцієнт пропорційності, одержуємо розв'язок вихідної системи:* $x_1 = -17k$, $x_2 = 16k$, $x_3 = 13k$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

1) $\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$ 2) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$

Відповідь: 1) $x_1 = -11k$, $x_2 = -k$, $x_3 = 7k$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; 3) $x_1 = 0$, $x_2 = -2k$, $x_3 = k$.

2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Вектори. Загальні поняття та означення

Вектором називають напрямлений відрізок AB з початком у точці A та кінцем у точці B (рис. 2.1).

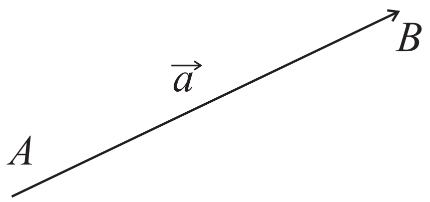

Рис. 2.1.

Довжиною вектора $\overrightarrow{AB}$ (або його модулем) $|\overrightarrow{AB}|$ називають число, що дорівнює довжині відрізка AB, який зображає вектор.

Колінеарними називають вектори, які лежать на одній прямій (або на паралельних прямих).

Компланарними називають вектори, які лежать в одній площині або паралельні деякій площині.

Рівними називають вектори, які мають однакову довжину та однаковий напрямок.

Нульовим вектором (нуль-вектором) називають вектор, у якого початок і кінець збігаються. Позначають його $\vec{0}$, його довжина $|\vec{0}| = 0$, його напрямок невизначений.

Одиничним вектором називають вектор, довжина якого рівна одиниці. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається **ортом вектора** $\vec{a}$ і позначається через $\vec{a}^0$. Тоді можна записати $\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{a}^0$.

Вільним називають вектор, який можна переміщати (переносити) у будь-яку точку простору за умови збереження його довжини та напрямку. Далі будемо розглядати тільки вільні вектори.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ називають вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, який має довжину $|\vec{b}| = |\lambda\vec{a}|$, а його напрямок збігається з напрямком вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$ (якщо $\lambda = 0$, маємо нуль-вектор).

Протилежним вектором $-\vec{a}$ називають добуток вектора $\vec{a}$ на число (-1), тобто $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$.

Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець - з кінцем вектора $\vec{b}$ (за умови, що початок $\vec{b}$ збігається з кінцем $\vec{a}$ ("правило трикутника") (рис. 2.2 а).

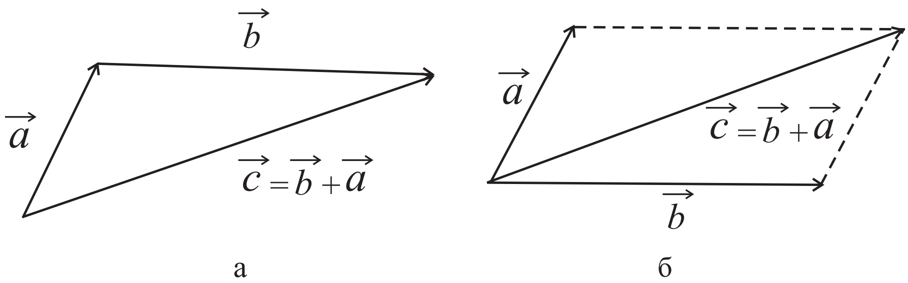

Рис. 2.2.

Якщо збігаються початки обох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то їх сумою також буде вектор $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$ ("правило паралелограма"), який є діагоналлю паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ та $\vec{b}$, як на сторонах (рис. 2.2 б).

Різницею двох векторів $\vec{a}$ **та** $\vec{b}$ називають вектор, який починається в кінці вектора $\vec{b}$ і закінчується в кінці $\vec{a}$ (рис. 2.3 а). Або можна дати таке означення: **різницею двох векторів** $\vec{a}$ **та** $\vec{b}$ називають суму вектора $\vec{a}$ та вектора $-\vec{b}$, протилежного до $\vec{b}$ (рис. 2.3 б).

Приклад 2.1. *Вектори* $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ *є сторонами трикутника* ABC *(рис. 2.4). Виразіть через* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *вектори* $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, *які співпадають з медіанами трикутника* ABC.

Розв'язок.

Для знаходження вектора $\overrightarrow{AM}$ *розглянемо трикутник* BAM *(рис. 2.4). Згідно "правила трикутника" додавання векторів маємо:* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$.

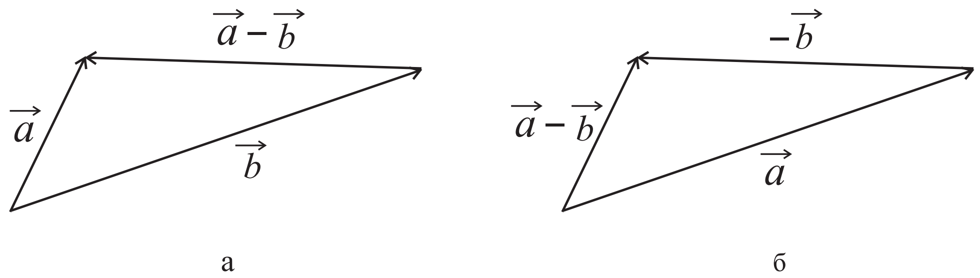

Рис. 2.3.

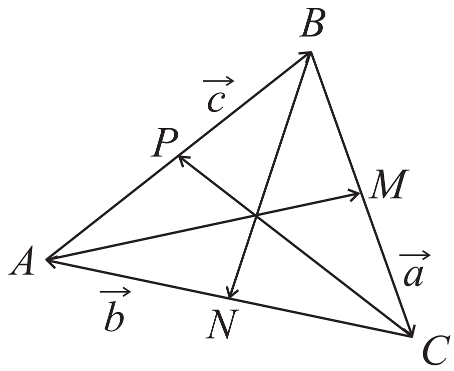

Рис. 2.4.

Оскільки $\overrightarrow{AM}$ *є медіаною сторони* $\overrightarrow{BC}$, *то ділить її пополам, тому* $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{a}$. *Тоді згідно умови задачі* $\overrightarrow{AM} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$. *З іншого боку* $-\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ *і* $\vec{a} = -(\vec{c} + \vec{b})$. *Підставивши одержаний результат у вираз для* $\overrightarrow{AM}$, *знаходимо* $\overrightarrow{AM} = \vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$.

Аналогічно знаходимо $\overrightarrow{BN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ *або* $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$; $\overrightarrow{CP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ *або* $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$.

Завдання для самостійної роботи

1. В трикутній піраміді $SABC$ відомі вектори $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Знайти вектор $\overrightarrow{SO}$, якщо точка O є центром мас трикутника ABC.
Відповідь: $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Відповідь: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11,4$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

2.2. Лінійна залежність і незалежність векторів. Розклад вектора за векторами базису. Базис n-вимірного простору

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ називається **лінійно незалежною**, якщо рівність

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_m\vec{a}_m = 0 \tag{2.1}$$

виконується тільки при $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$. Якщо ж рівність (2.1) виконується при ненульових значеннях k_i $(i = 1, \ldots, m)$, то система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ називається **лінійно залежною**. Наприклад, будь-які колінеарні вектори, три компланарні вектори, чотири і більше векторів в тривимірному просторі завжди є лінійно залежними.

Упорядкована трійка лінійно незалежних (некомпланарних) векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ в просторі називається його **базисом**. Довільний вектор $\vec{a}$ у просторі можна розкласти за базисом $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$: $\vec{d} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$, де α, β, γ – координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі: $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Базис називається **ортонормованим** (позначають $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), якщо його вектори є взаємно перпендикулярними, а довжина кожного з них рівна одиниці.

Упорядкована множина n дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається **n-вимірним вектором**:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{2.2}$$

Після введення операції множення вектора на число і додавання векторів можна розглядати n-вимірний векторний простір як сукупність усіх n-вимірних векторів.

Довільна система n лінійно незалежних векторів n-вимірного простору утворює **базис векторного простору**. Будь-який вектор n-вимірного простору розкладається за векторами базису.

Якщо кожен із заданих векторів (2.2) $(\vec{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ системи $a_1, a_2, \ldots, a_m$ та нульовий вектор $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ записати як матрицю стовпець, то векторну рівність (2.1) можна переписати у матричній формі:

$$k_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + k_n \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

або

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1m}k_m & = & 0, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{2m}k_m & = & 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \ldots + a_{nm}k_m & = & 0. \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

Ми отримали лінійну однорідну систему рівнянь відносно невідомих k_i. Вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$ є лінійно незалежними, якщо система (2.3) має лише нульовий розв'язок, тобто, визначник системи відмінний від нуля.

Приклад 2.2. *В деякому базисі вектори задані координатами:* $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{e}_1 = (2, 2, -1)$, $\vec{e}_2 = (0, 4, 8)$, $\vec{e}_3 = (-1, -1, 3)$. *Переконатися, що вектори* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *утворюють базис, і знайти в ньому координати вектора* $\vec{a}$.

Розв'язок.

Згідно (2.3), якщо визначник

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix},$$

складений з координат векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, *не рівний 0, то вектори* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *лінійно незалежні, а, отже, утворюють базис. Переконуємося, що* $D = 24 - 16 - 4 + 16 = 20 \neq 0$. *Таким чином, трійка* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *– базис.*

Позначимо координати вектора $\vec{a}$ *в базисі* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *через* x, y, z. *Тоді*

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Якщо координати кожного із заданих векторів $\vec{a}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ *та* $\vec{e}_3$ *записати як матрицю стовпець, то останню векторну рівність можна переписати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих* x, y, z:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - z & = & 1, \\ 2x + 4y - z & = & 1, \\ -x + 8y + 3z & = & 2. \end{array}\right\}$$

Розв'язуючи її, знаходимо $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$. *Отже,* $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 = (1, 0, 1)$.

Завдання для самостійної роботи

Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

1) $\vec{a} = (5, 4, 1)$, $\vec{b} = (-3, 5, 2)$, $\vec{c} = (2, -1, 3)$, $\vec{d} = (7, 23, 4)$.

2) $\vec{a} = (2, -1, 4)$, $\vec{b} = (-3, 0, -2)$, $\vec{c} = (4, 5, -3)$, $\vec{d} = (0, 11, -14)$.

3) $\vec{a} = (1, 3, 4)$, $\vec{b} = (-2, 5, 0)$, $\vec{c} = (3, -2, -4)$, $\vec{d} = (13, -5, -4)$.

Відповідь: 1) $(3, 2, -1)$. 2) $(-1, 2, 2)$. 3) $(2, -1, 3)$.

2.3. Проекція вектора на вісь. Розклад вектора за осями

Проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вісь l (пряму з напрямком) називають число

$$\vec{a}_l = \overrightarrow{AB}_l = |\vec{a}| \cos\varphi, \qquad (2.4)$$

де φ – кут між додатним напрямком осі l та вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, який змінюється в межах від 0 до π.

Геометричний зміст поняття: **проекція** вектора $\vec{a}$ на вісь l – це довжина відрізка $A_1B_1 = \overrightarrow{AB}_l = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi$, взята зі знаком "+", якщо $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ та "−", якщо $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (рис. 2.5). При $\varphi = \pi/2$ відрізок A_1B_1 перетворюється в точку і $\vec{a}_l = 0$.

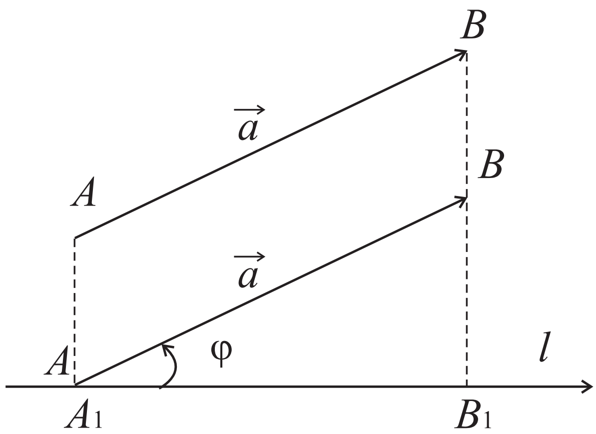

Рис. 2.5.

Властивості проекцій

1. Проекція суми кількох векторів на дану вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь, тобто

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})_l = \vec{a}_l + \vec{b}_l + \vec{c}_l. \qquad (2.5)$$

2. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція також помножиться на це число:

$$(\lambda\vec{a})_l = \lambda\vec{a}_l. \qquad (2.6)$$

Розклад вектора за координатними осями

Якщо в просторі зафіксовано точку O і базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, то кажуть, що в просторі задано **декартову систему координат** $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Точку O називають **початком координат**, а прямі Ox, Oy, Oz, які проходять через початок координат і є відповідно паралельними векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – **осями координат**. Якщо базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ є ортономованим, то відповідну йому систему координат називають **прямокутною**.

Будь-який вектор $\vec{a}$ може бути розкладений за ортами координатних осей:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (2.7)$$

Коефіцієнти такого розкладу називаються **координатами вектора** в даній системі координат і рівні проекціям вектора $\vec{a}$ на відповідні координатні осі: $x = \vec{a}_x$ – абсциса, $y = \vec{a}_y$ – ордината, $z = \vec{a}_z$ – апліката. Тому вектор можна записати у вигляді $\vec{a} = (x, y, z)$.

Радіус-вектором точки M називають вектор, початок якого збігається з початком координат, а кінець знаходиться в даній точці. Координати радіус-вектора т. M називають **координатами точки** $M(x, y, z)$ (рис. 2.6).

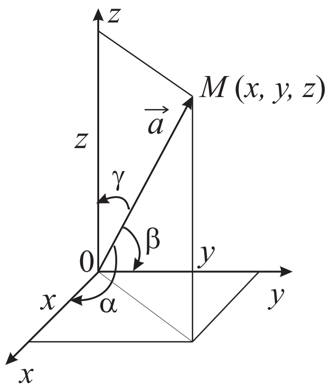

Рис. 2.6.

Приклад 2.3. *Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомі кути $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$, які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz, а його довжина $|\vec{a}| = 4$.*

Розв'язок.

Координати вектора $\vec{a}$ в даній системі координат рівні його проекціям на відповідні координатні осі. Тому згідно означення проекції (2.4) маємо:

$$\begin{aligned}
x &= \vec{a}_x = |\vec{a}|\cos\alpha = 4\cos 45° = 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},\\
y &= \vec{a}_y = |\vec{a}|\cos\beta = 4\cos 60° = 4\cdot\frac{1}{2} = 2,\\
z &= \vec{a}_z = |\vec{a}|\cos\gamma = 4\cos 120° = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.
\end{aligned}$$

Отже, $\vec{a} = (2\sqrt{2},\ 2,\ -2)$.

2.4. Операції з векторами

1. Добутком вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ на довільне число λ є вектор

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z). \tag{2.8}$$

2. Сумою двох векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ є вектор

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \tag{2.9}$$

3. Різницею двох векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ є вектор

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2). \tag{2.10}$$

4. Довжина вектора $\vec{a} = (x, y, z)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.11}$$

5. Вектори рівні, якщо вони мають однакові координати: для двох векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{a} = \vec{b} \Longleftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2. \tag{2.12}$$

6. Вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ колінеарні, якщо

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{2.13}$$

Приклад 2.4. *Визначити модулі суми і різниці векторів $\vec{a} = (3, -5, 8)$ та $\vec{b} = (-1, 1, -4)$.*

Розв'язок.

Згідно правил додавання (2.9) та віднімання (2.10) векторів заданих координатами $\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1), -5 + 1, 8 + (-4)) = (2, -4, 4)$ і $\vec{a} - \vec{b} = (3 - (-1), -5 - 1, 8 - (-4)) = (4, -6, 12)$. Знаючи координати векторів, за правилом (2.11) знаходимо їх модулі: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$ та $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2} = \sqrt{196} = 14$.

Приклад 2.5. *Знайти проекцію вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ на вектор $\vec{e}$, якщо кут між ними рівний $\varphi = 60^\circ$.*

Розв'язок.

За умовою задачі координати координати вектора $\vec{a}$ відомі $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (2, -2, 1)$, тому можемо знайти його модуль $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$. Тоді за формулою (2.4) знаходимо проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{e}$

$$\vec{a}_e = |\vec{a}| \cos\varphi = 3 \cos 60^\circ = \frac{3}{2}.$$

Відстань між двома точками

Відстань між точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ можна розглядати як довжину вектора: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, тоді її можна знайти за формулою

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2.14)$$

Приклад 2.6. *Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ та їхню довжину, якщо відомі координати точок $A(5, -1, 2)$ та $B(1, 2, 1)$.*

Розв'язок.

Для того, щоб знайти координати вектора необхідно від координат кінця вектора відняти відповідні координати початку. Зокрема: $\overrightarrow{AB} = (1 - 5, 2 - (-1), 1 - 2) = (-4, 3, -1)$ *та* $\overrightarrow{BA} = (5 - 1, -1 - 2, 2 - 1) = (4, -3, 1)$. *Знаючи координати векторів, легко знаходимо їх довжини* $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} = 2\sqrt{6}$ *і* $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{26} = 2\sqrt{6}$. *Як видно вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ мають однакову довжину, але протилежно напрямлені. Довжину вектора можна розглядати і як відстань між точками його початку і кінця.*

Напрямні косинуси вектора

Вектор $\vec{a}$ може бути заданий за допомогою модуля (2.11) та α, β, γ – кутів, які утворює цей вектор з осями координат (див. рис. 2.6). Косинуси кутів α, β, γ називаються **напрямними косинусами вектора** $\vec{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \qquad (2.15)$$

Зв'язок між напрямними косинусами

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2.16)$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ збігаються з координатами його орта

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Приклад 2.7. *Знайти напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2, 3, 4)$, $B(3, 5, 6)$.*

Розв'язок.

Знаходимо координати вектора $\overrightarrow{AB} = (3-2, 5-3, 6-4) = (1,2,2)$ *та його модуль* $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$. *Тепер за формулами (2.15) знаходимо його напрямні косинуси*

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3}, \\ \cos\beta &= \frac{y}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3}, \\ \cos\gamma &= \frac{z}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити модуль вектора $\vec{a} = (3, -6, 2)$.

Відповідь: $|\vec{a}| = 7$.

2. Визначити початок вектора $\vec{a} = (2, -3, -1)$, якщо його кінець збігається з точкою $(1, -1, 2)$.

Відповідь: $(-1, 2, 3)$.

3. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (12, -15, -16)$.

Відповідь: $\cos\alpha = \frac{12}{25}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$.

4. Задано проекції $F_x = 5$, $F_y = 5\sqrt{2}$, $F_z = -5$ сили $\vec{F}$ на координатні осі. Знайти величину сили і напрям її дії.

Відповідь: $|\vec{F}| = 10$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 120^\circ$.

2.5. Ділення відрізка в заданому співвідношенні

Точка A ділить відрізок A_1A_2 у співвідношенні $\lambda = \dfrac{A_1A}{AA_2}$. Нехай $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, λ – відомі, тоді координати точки A рівні:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{2.17}$$

Приклад 2.8. *Відрізок, обмежений точками* $A(2, -2, 4)$, $B(5, 4, 6)$, *поділено на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.*

Розв'язок.

Нехай M *– перша точка поділу. Вона ділить відрізок* $\overrightarrow{AB}$ *у співвідношенні* $\lambda = \dfrac{AM}{MA} = \dfrac{1}{2}$. *Тому згідно (2.17) маємо*

$$x = \frac{2+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}} = 3, \quad y = \frac{-2+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}} = 0, \quad z = \frac{4+\frac{1}{2}\cdot 6}{1+\frac{1}{2}} = \frac{14}{3}.$$

Отже, $M\left(3, 0, \frac{14}{3}\right)$.

Друга точка N *ділить відрізок* $\overrightarrow{AB}$ *у співвідношенні* $\lambda = \dfrac{AN}{NA} = 2$ *і*

$$x = \frac{2 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = 4, \quad y = \frac{-2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 2, \quad z = \frac{4 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = \frac{16}{3}.$$

Отже, $N\left(4, 2, \frac{16}{3}\right)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Відрізок, обмежений точками $A(-1, 8, -3)$ і $B(9, -7, -2)$, поділено точками M_1, M_2, M_3, M_4 на п'ять рівних частин. Знайти координати точок M_1 і M_3.

Відповідь: $M_1(1, 5, -2)$, $M_3(5, -1, 0)$.

2. Визначити координати кінців A і B відрізка, розділеного точками $C(2, 0, 2)$ і $D(5, -2, 0)$ на три рівні частини.

Відповідь: $A(-1, 2, 4)$, $B(8, -4, -2)$.

2.6. Скалярний добуток двох векторів. Кут між векторами. Умови паралельності та перпендикулярності

Скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними (рис. 2.7)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi. \tag{2.18}$$

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, заданих координатами, дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{2.19}$$

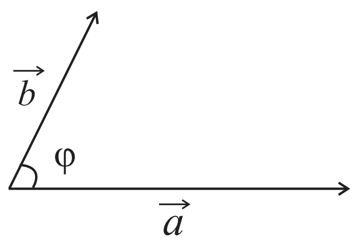

Рис. 2.7.

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $\lambda\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

4. Скалярний добуток вектора $\vec{a}$ самого на себе рівний квадрату його модуля: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$. З іншого боку $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

5. Проекція вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$:

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Кут між векторами

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначають за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{2.20}$$

Умови паралельності та перпендикулярності двох векторів

1. Якщо вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ колінеарні (паралельні), то їх відповідні координати пропорційні

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{2.21}$$

2. Якщо вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярні ($\vec{a} \perp \vec{b}$), то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тоді скалярний добуток цих векторів рівний нулю:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{2.22}$$

Приклад 2.9. *Дано вектори* $\vec{a} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$ *і* $\vec{b} = 4\vec{m} - \vec{n}$, *де* $|\vec{m}| = 1$; $|\vec{n}| = 3$; $\varphi = (\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \pi$. *Знайти: а)* $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-2\vec{a} + 4\vec{b})$; *б) проекцію вектора* $(-2\vec{a} + 4\vec{b})$ *на вектор* $\vec{b}$; *в)* $\cos(\widehat{\vec{a}, 4\vec{b}})$.

Розв'язок.

а) Обчислюємо

$$(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-2\vec{a} + 4\vec{b}) = (-6\vec{m} + 9\vec{n} + 8\vec{m} - 2\vec{n}) \cdot (4\vec{m} - 6\vec{n} + 16\vec{m} - 4\vec{n}) =$$
$$= 10 \cdot (2\vec{m} + 7\vec{n}) \cdot (2\vec{m} - \vec{n}) =$$
$$= 10 \cdot (4|\vec{m}|^2 + 12|\vec{m}||\vec{n}| \cos\varphi - 7|\vec{n}|^2) =$$
$$= 10 \cdot (4 \cdot 1 + 12 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) - 7 \cdot 9) = -950;$$

б) Нехай $c = (-2\vec{a} + 4\vec{b}) = (20\vec{m} - 10\vec{n})$. *Тоді*

$$\vec{c}_{\vec{b}} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|},$$
$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 10 \cdot (2\vec{m} - \vec{n}) \cdot (4\vec{m} - \vec{n}) =$$
$$= 10 \cdot (8|\vec{m}|^2 - 6|\vec{m}||\vec{n}| \cos\pi + |\vec{n}|^2) = 350,$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{|\vec{b}|^2} = \sqrt{(4\vec{m} - \vec{n})^2} =$$
$$= \sqrt{16|\vec{m}|^2 - 8|\vec{m}||\vec{n}| \cos\pi + |\vec{n}|^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Остаточно одержуємо

$$(-2\vec{a}+4\vec{b})_{\vec{b}} = \frac{350}{7} = 50;$$

в) Нехай $\vec{d} = 4\vec{b}$. *Тоді*

$$\cos(\vec{a}\widehat{,\,4}\vec{b}) = \cos(\vec{a}\widehat{,\,}\vec{d}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{d} = 4\cdot(-2\vec{m}+3\vec{n})\cdot(4\vec{m}-\vec{n}) =$$

$$= 4\cdot(-8|\vec{m}|^2 + 14|\vec{m}||\vec{n}|\cos\pi - 3|\vec{n}|^2) = 308,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2\vec{m}+3\vec{n})^2} =$$

$$= \sqrt{4|\vec{m}|^2 - 12|\vec{m}||\vec{n}|\cos\pi + 9|\vec{n}|^2} = \sqrt{121} = 11,$$

$$|\vec{d}| = 4\cdot|\vec{b}| = 4\cdot 7 = 28.$$

В результаті маємо:

$$\cos(\vec{a}\widehat{,\,4}\vec{b}) = \frac{308}{11\cdot 28} = 1.$$

Приклад 2.10. *За координатами точок* $A(4,6,3)$, $B(-5,2,6)$ *і* $C(4,-4,-3)$ *знайти: а) скалярний добуток векторів* $\vec{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$ *і* $b = \overrightarrow{AB}$; *б) проекцію вектора* $c = \overrightarrow{CB}$ *на вектор* $d = \overrightarrow{AC}$; *в)* $\cos(\vec{a}\widehat{,\,}\vec{d})$.

Розв'язок.

Послідовно знаходимо $\overrightarrow{AB} = (-9,-4,3)$, $\overrightarrow{AC} = (0,-10,-6)$, $\overrightarrow{CB} = (-9,6,9)$ *та* $4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} = (-36,34,42)$.

а) Маємо $\vec{a} = (-36,34,42)$, $\vec{b} = (-9,-4,3)$. *Тоді*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (-36)\cdot(-9) + 34\cdot(-4) + 42\cdot 3 = 314.$$

б) Так як

$$\vec{c}_{\vec{d}} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|}, \quad \vec{d} = (0,-10,-6),$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = 0 - 60 - 54 = -114, \quad |\vec{d}| = \sqrt{0+100+36} = \sqrt{136},$$

то

$$\vec{c}_{\vec{d}} = -\frac{54}{\sqrt{34}};$$

в) Оскільки

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{a}||\vec{d}|}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{1296+1156+1764} = \sqrt{4216},$$
$$\vec{a}\cdot\vec{d} = 0 - 340 - 252 = -592,$$

то

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = -\frac{592}{\sqrt{4216}\sqrt{136}} = -\frac{74}{17\sqrt{31}}.$$

Робота $\vec{A}$ сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки на шляху $|\vec{s}|$, вздовж вектора $\vec{s}$, обчислюється за формулою

$$A = \vec{F}\cdot\vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos(\widehat{\vec{F},\vec{s}}).$$

Отже, робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення. В цьому суть **механічного змісту** скалярного добутку.

Приклад 2.11. *Обчислити роботу рівнодійної $\vec{F}$ сил $\vec{F_1} = (3,-4,5)$, $\vec{F_2} = (2,1,-4)$, $\vec{F_3} = (-1,6,2)$, прикладених до матеріальної точки, котра під їх дією переміщується прямолінійно з точки $M_1(4,2,-3)$ в точку $M_2(7,4,1)$.*

Розв'язок.

Так як $\vec{F} = \vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3} = (4,3,3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{s} = (3,2,4)$, *то* $A = \vec{F}\cdot\vec{s} = 4\cdot 3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 4 = 30$.

Завдання для самостійної роботи

1. Дано вектори $\vec{a} = -3\vec{m} - 2\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} + 5\vec{n}$, де $|\vec{m}| = 3$; $|\vec{n}| = 6$; $\varphi = (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = 4\pi/3$. Знайти: а) $(-\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; б) проекцію вектора $(\vec{a}+\vec{b})$ на вектор $\vec{b}$; в) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Відповідь: а) 1287; б) $15\sqrt{\frac{13}{7}}$; в) $-\frac{2}{\sqrt{7}}$.

2. Дано вершини чотирикутника $A(1,-2,2)$, $B(1,4,0)$, $C(-4,1,1)$, $D(-5,-5,3)$. Визначити кут φ між його діагоналями.

Відповідь: $\varphi = 90°$.

3. Дано три сили $\vec{P} = (9,-3,4)$, $\vec{Q} = (5,6,-2)$, $\vec{R} = (-4,-2,7)$, прикладені до точки $A(-5,4,-2)$. Визначити роботу рівнодійної цих сил, коли точка до якої вони прикладені, рухаючись прямолінійно, переміщується в точку $B(4,6,-5)$.

Відповідь: 65.

2.7. Векторний добуток двох векторів.

Упорядкована трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарних векторів називається **правою** (рис. 2.8а), якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки; в протилежному випадку трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається **лівою** (рис. 2.8б).

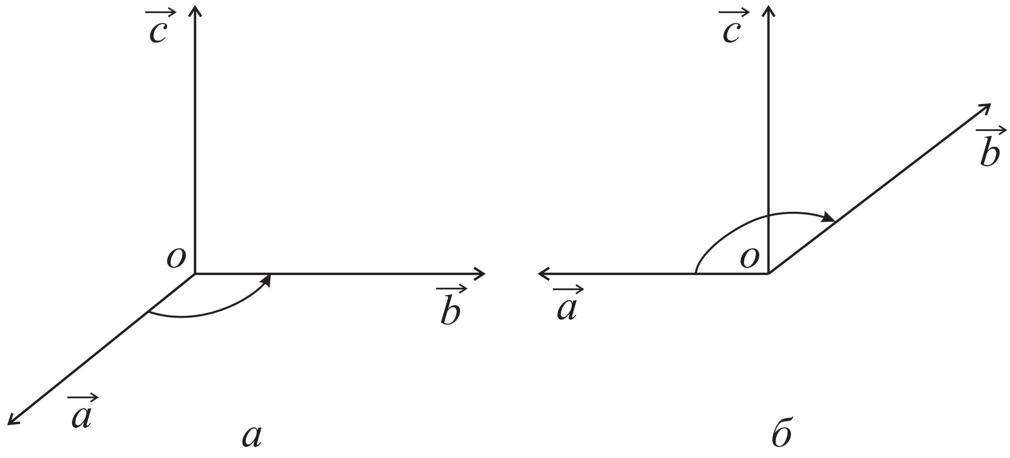

Рис. 2.8.

Векторним добутком $\vec{a}\times\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають третій вектор $\vec{c}$, який задовольняє наступні умови:

1) модуль вектора $\vec{c}$ рівний добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними (рис. 2.9а):

$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi; \tag{2.23}$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний як до вектора $\vec{a}$, так і до вектора $\vec{b}$;

3) якщо вектор $\vec{c}$ не нульовий, то він з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворює праву трійку векторів (рис. 2.9а).

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

1. $(\vec{a}\times\vec{b}) = -(\vec{b}\times\vec{a})$;
2. $\lambda\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;
3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

Приклад 2.12. *Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Обчислити $|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|$.*

Розв'язок.

Обчислюємо

$$|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})| = |3(\vec{a}\times\vec{a}) - 6(\vec{a}\times\vec{b}) - \vec{b}\times\vec{a} + 2(\vec{b}\times\vec{b})| =$$
$$= |-5(\vec{a}\times\vec{b})| = 5\cdot|\vec{a}\times\vec{b}| = 5\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\tfrac{\pi}{2} = 5\cdot3\cdot4\cdot1 = 60.$$

Геометричні властивості векторного добутку:

1) Векторний добуток двох ненульових векторів рівний нулю тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні;

2) Модуль векторного добутку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ чисельно рівний площі паралелограма, побудованого на них

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{2.24}$$

Відповідно площа трикутника рівна:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{2.25}$$

В цьому полягає **геометричний зміст** векторного добутку.

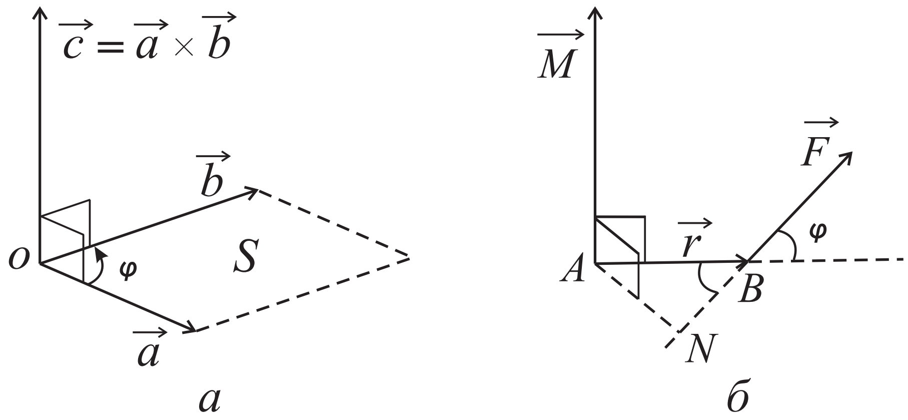

Рис. 2.9.

Векторний добуток векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ заданих координатами рівний

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \tag{2.26}$$

Приклад 2.13. *Знайти площу трикутника ABC, якщо відомо, що: $A(1,2,0)$, $B(3,0,3)$ і $C(5,2,6)$.*

Розв'язок.

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = (2,-2,3)$, $\overrightarrow{AC} = (4,0,6)$ то

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 0\vec{j} + 8\vec{k} = (-12, 0, 8).$$

Тоді площа
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{144+64} = 2\sqrt{13}.$$

Якщо обидва вектори лежать в одній координатній площині, наприклад в площині Oxy, то їх можна розглядати як вектори, аплікати яких рівні нулю і застосовувати до них вже відомі формули (2.24)–(2.26).

Приклад 2.14. *Знайти площу трикутника з вершинами* $A(-3,-1)$, $B(1,-5)$, $\mathrm{C}(9,3)$.

Розв'язок.

Точки A, B, C *лежать в площині* Oxy, *тому можна вважати, що в загальному випадку вони мають координати:* $A(x_1, y_1, 0)$, $B(x_2, y_2, 0)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3, 0)$. *Тоді векторний добуток векторів* $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$ *і* $\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$ *буде рівний*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + (x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2))\,\vec{k} = \\ &= (0, 0, x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2))\,, \end{aligned}$$

а площа трикутника ABC, *визначатиметься формулою*

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\,|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|\,. \qquad (2.27)$$

Підставивши координати точок A, B *і* C, *отримаємо:*

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2}\,|-3(-5-3) + 1(3-(-1)) + 9(-1-(-5))| = \frac{1}{2}\,(24+4+36) = \\ &= \frac{64}{2} = 32\,\textit{кв. од.} \end{aligned}$$

За допомогою векторного добутку можна обчислити **обертаючий момент** $\vec{M}$ **сили** $\vec{F}$, прикладеної до точки B тіла, закріпленого в точці A (рис. 2.9б):
$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}, \quad |\vec{M}| = |\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\sin\varphi. \qquad (2.28)$$

Приклад 2.15. *Силу* $\vec{F} = (3, 2, -4)$ *прикладено до точки* $A(2,-1,1)$. *Знайти обертаючий момент* $\vec{M}$ *цієї сили відносно початку координат* O.

Розв'язок.

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k} = (2, 11, 7),$$

$$\vec{M} = \sqrt{4 + 121 + 49} = \sqrt{174}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Обчислити $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Відповідь: $|\vec{a} \times \vec{b}| = 16$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Відповідь: $S = 3,5$.

3. Силу $\vec{F} = (2, 2, 9)$ прикладено до точки $A(4, 2, -3)$. Обчислити величину та напрямні косинуси моменту $\vec{M}$ цієї сили відносно точки $B(2, 4, 0)$.

Відповідь: $|\vec{M}| = 28$, $\cos\alpha = 3/7$, $\cos\beta = 6/7$, $\cos\gamma = -2/7$.

2.8. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ впорядкованої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a} \times \vec{b}$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \tag{2.29}$$

Перерахуємо **основні властивості мішаного добутку векторів**:
1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;
2. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$;
3. геометричний зміст мішаного добутку полягає в наступному:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \pm V, \tag{2.30}$$

де V – об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятий зі знаком "+", якщо трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – права, або зі знаком "$-$", якщо вона ліва (див. рис. 2.8); об'єм відповідної піраміди

$$V_{\text{пір}} = \pm\frac{1}{6}\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}; \tag{2.31}$$

4. необхідна і достатня умова компланарності або лінійної залежності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виражається рівністю

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0. \tag{2.32}$$

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задано своїми координатами: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то їх мішаний добуток визначається за формулою

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.33}$$

Приклад 2.16. *Дано вектори* $\vec{a} = (7, 6, 1)$, $\vec{b} = (4, 0, 3)$, $\vec{c} = (3, 6, 4)$. *Необхідно встановити, чи компланарні дані вектори, у випадку їх некомпланарності з'ясувати, яку трійку (праву чи ліву) вони утворюють, і обчислити об'єм побудованої на них піраміди.*

Розв'язок.

Обчислимо

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -144.$$

Із значення мішаного добутку випливає, що вектори некомпланарні, утворюють ліву трійку і об'єм піраміди рівний $V = \dfrac{1}{6} \cdot 144 = 24$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$, $\vec{b} = (3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$ і $\vec{c} = (\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})$.

Відповідь: $V = 13$.

2. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, що утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, обчислити $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Відповідь: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 24$.

3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

3.1. Лінії на площині та їх рівняння

Рівняння

$$F(x, y) = 0 \tag{3.1}$$

називається **рівнянням лінії** l, яка задана на площині відносно деякої системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x, y кожної точки, що лежить на лінії l, і не задовольняють координати x, y жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

3.2. Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої на площині

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами. Відповідно різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

1. **Рівняння прямої, що проходить через точку** $M_0(x_0, y_0)$, **паралельно вектору** $\vec{s} = (m, n)$. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка прямої (рис. 3.1), тоді $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$ і пряма лінія на площині може бути задана **векторним рівнянням у параметричній формі**

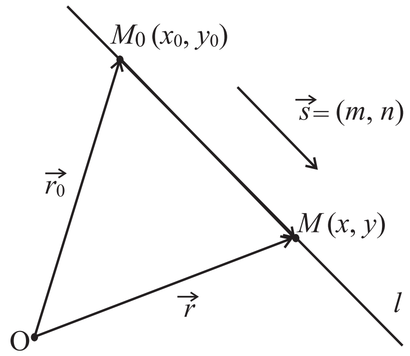

Рис. 3.1.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}t, \tag{3.2}$$

$\vec{s}$ – **напрямний вектор прямої** l, $\vec{r}_0$ – радіус-вектор фіксованої точки $M_0(x_0, y_0)$ на прямій, $\vec{r}(t)$ – радіус-вектор довільної точки на прямій, t – скалярний параметр.

Прирівнюючи відповідні координати векторів $\vec{r}$ та $\vec{r}_0 + \vec{s}t$ за формулою (3.2), маємо

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \tag{3.3}$$

звідки

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{3.4}$$

Рівняння (3.3) називаються **параметричними рівняннями прямої**, рівняння (3.4) – її **канонічним рівнянням**.

Приклад 3.1. *Сила* $\vec{F} = (3, -1)$ *прикладена до точки* $M_0(-1, 2)$. *Записати рівняння прямої, вздовж якої напрямлена ця сила.*

Розв'язок.

Записуємо рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0, *паралельно до заданого вектора* $\vec{F}$

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{-1}$$

або

$$3y + x - 5 = 0.$$

2. Якщо в рівнянні (3.4) ввести позначення $\dfrac{n}{m} = k$, $y_0 - \dfrac{n}{m}x_0 = b$, то дістанемо

$$y = kx + b. \tag{3.5}$$

Відношення $k = \dfrac{n}{m} = \mathrm{tg}\alpha$, де α – кут, утворений прямою з додатнім на-

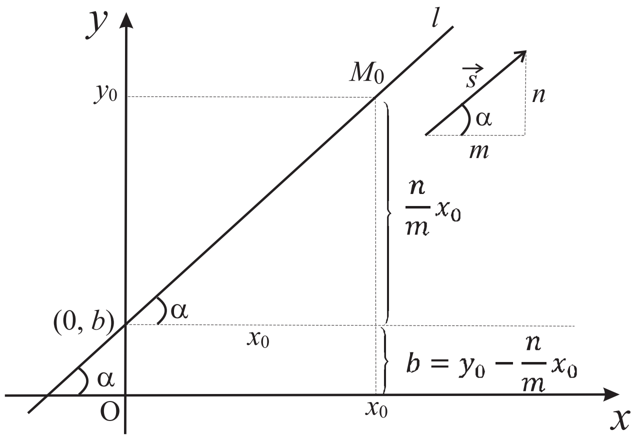

Рис. 3.2.

прямом осі Ox (рис. 3.2), називається **кутовим коефіцієнтом прямої**, а величина $b = y_0 - \dfrac{n}{m}x_0$ є ординатою точки перетину прямої з віссю Oy. Рівняння (3.5), називається **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**.

Приклад 3.2. *Записати рівняння прямої, що проходить через точку* $A(4, -2)$ *під кутом* $135°$ *до додатного напрямку осі* Ox.

Розв'язок.

Знаходимо $\mathrm{tg}\,135° = -1$ *та обчислюємо* $b = y_0 - \mathrm{tg}\,135° \cdot x_0 = -2 + 4 = 2$. *Тоді рівняння прямої набуває вигляду* $y = -x + 2 = 2 - x$.

Якщо пряма має кутовий коефіцієнт k і проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$, то її рівняння має вигляд:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{3.6}$$

3. **Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки** $M_1(x_1, y_1)$ **та** $M_2(x_2, y_2)$, дістанемо з рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{3.7}$$

Приклад 3.3. *Скласти рівняння прямої, що проходить через точки* $A(-5, 4)$, $B(3, -2)$.

Розв'язок.

Маємо
$$\frac{x+5}{3+5} = \frac{y-4}{-2-4} \quad \textit{або} \quad \frac{x+5}{8} = \frac{y-4}{-6}.$$

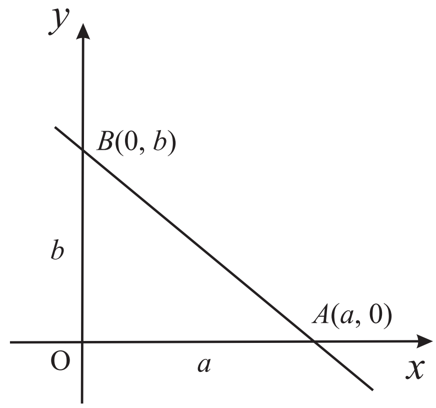

Рис. 3.3.

4. Якщо пряма проходить через точки $A(a, 0)$ та $B(0, b)$, тобто відтинає на осях відрізки a та b (рис. 3.3), то з рівняння (3.7) маємо

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \quad \text{або} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{3.8}$$

Рівняння (3.8) називається **рівнянням прямої, у відрізках на осях**.

Приклад 3.4. *Скласти рівняння прямої, що проходить через точку* $A(2, -1)$ *та відтинає на півосі* Oy *відрізок, вдвічі більший ніж на додатній півосі* Ox.

Розв'язок.

Нехай дана пряма на додатній півосі Ox *відтинає відрізок* a, *а на півосі* Oy – *відрізок* $b = 2a$. *Тоді рівняння прямої у відрізках на осях має вигляд*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} = 1.$$

Якщо точка $A(2, -1)$ *лежить цій на прямій, то її координати повинні задовільняти дане рівняння*

$$\frac{2}{a} + \frac{-1}{2a} = 1.$$

Звідки знаходимо значення $a = \dfrac{3}{2}$. *Тоді рівняння прямої остаточно набуває вигляду*

$$\frac{2x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \quad \textit{або} \quad 2x + y = 3.$$

5. Розглянемо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\vec{n} = (A, B)$. Візьмемо на прямій l довільну точку (рис. 3.4) $M(x, y)$ і введемо вектор

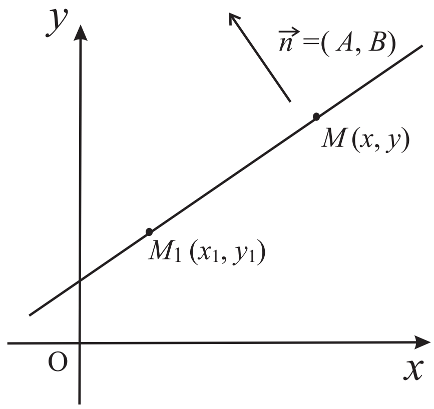

Рис. 3.4.

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$. Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \tag{3.9}$$

Рівняння (3.9) називається **рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора**. Вектор $\vec{n} = (A, B)$ називається **нормальним вектором прямої**.

Приклад 3.5. *Записати рівняння прямої заданої точкою* $M(-1, 2)$ *і нормальним вектором* $\vec{n} = (2, 2)$.

Розв'язок.

Відповідно до формули (3.9) *маємо:*

$$2(x + 1) + 2(y - 2) = 0$$

або

$$x + y - 1 = 0.$$

6. Рівняння виду

$$Ax + By + \mathrm{C} = 0 \tag{3.10}$$

називається **загальним рівнянням прямої**. Коефіцієнти A і B при x і y загального рівняння є координатами її нормального вектора.

Особливі випадки:

а) при $C=0$ $y=-\dfrac{A}{B}x$ – пряма проходить через початок системи координат;

б) при $B=0$ $x=-\dfrac{C}{A}=a$ – пряма паралельна осі Oy;

в) при $A=0$ $y=-\dfrac{C}{B}=b$ – пряма паралельна осі Ox;

г) при $B=C=0$ $Ax=0$, $x=0$ – вісь Oy;

д) при $A=C=0$ $By=0$, $y=0$ – вісь Ox.

Приклад 3.6. *Точка $A(-2,3)$ лежить на прямій, перпендикулярній до прямої $2x-3y+8=0$. Записати рівняння цієї прямої.*

Розв'язок.

Із загального рівняння прямої $2x-3y+8=0$ знаходимо координати її нормального вектора $\vec{n}=(2,-3)$. Пряма, рівняння якої ми шукаємо, перпендикулярна до прямої $2x-3y+8=0$, а отже паралельна вектору $\vec{n}=(2,-3)$. Тоді записуємо рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2,3)$ і має напрямний вектор $\vec{s}=(2,-3)$:

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{-3}.$$

Можемо привести його до загального вигляду

$$3x+2y=0.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(3,1)$ перпендикулярно до прямої BC, якщо $B(2,5)$, $C(1,0)$.

Відповідь: $x+5y-8=0$.

2. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2,1)$ паралельно до прямої MN, якщо $M(-3,-2)$, $N(1,6)$.

Відповідь: $2x-y+5=0$.

3.3. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

1. Кут φ, який відраховується проти годинникової стрілки від прямої l_1 до прямої l_2 (див. рис. 3.5), заданих рівняннями $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$, визначається формулою

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (3.11)$$

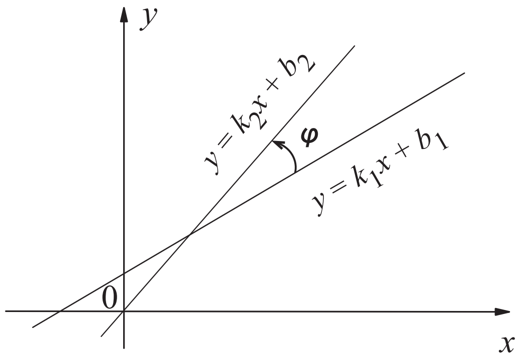

Рис. 3.5.

Якщо прямі паралельні, то $\varphi = 0$ і $\text{tg}\varphi = 0$. Отже, умовою паралельності двох прямих є рівність їх кутових коефіцієнтів

$$k_1 = k_2. \tag{3.12}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\varphi = 90^\circ$ і $\text{tg}\varphi$ не існує. Таким чином умова перпендикулярності має вигляд:

$$k_1k_2 + 1 = 0 \quad \text{або} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{3.13}$$

Приклад 3.7. *Точка $P(-2, 3)$ лежить на прямій, що перпендикулярна до прямої $2x - 3y + 8 = 0$. Записати рівняння цієї прямої.*

Розв'язок.

Так як шукана пряма перпендикулярна заданій, то згідно (3.13) її кутовий коефіцієнт k_2 має бути обернений за абсолютною величиною і протилежний за знаком до кутового коефіцієнта заданої прямої k_1:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт заданої прямої. Для цього перепишемо її рівняння у вигляді

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Звідки знаходимо:

$$k_1 = -\frac{A}{B} = \frac{2}{3}.$$

За умовою перпендикулярності:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}.$$

Знаходимо рівняння шуканої прямої за формулою (3.6):

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$
$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x + 2),$$
$$2(y - 3) = -3(x + 2),$$
$$2y - 6 = -3x - 6,$$
$$3x + 2y = 0.$$

Отже, шукане рівняння прямої: $3x + 2y = 0$.

2. Нехай прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}; \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}. \tag{3.14}$$

Оскільки вектори $\vec{s}_1 = (m_1, n_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2)$ є напрямними векторами прямих і кут $\varphi = (\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2})$, то маємо

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \tag{3.15}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ теж паралельні, тому їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \tag{3.16}$$

– **умова паралельності двох прямих**. Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ теж перпендикулярні і їх скалярний добуток дорівнює нулю

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \tag{3.17}$$

– **умова перпендикулярності двох прямих**.

Приклад 3.8. *Знайти кути трикутника, вершини якого* $A(1, -1)$, $B(3, 5)$, $C(-7, 11)$ *(див. рис. 3.6).*

Розв'язок.

Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки (3.7)*:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Для знаходження рівняння сторони AB *підставимо координати точок* $A(1, -1)$ *та* $B(3, 5)$ *в рівняння* (3.7)*:*

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y + 1}{5 + 1} \Rightarrow \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{6} \Rightarrow \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{3}.$$

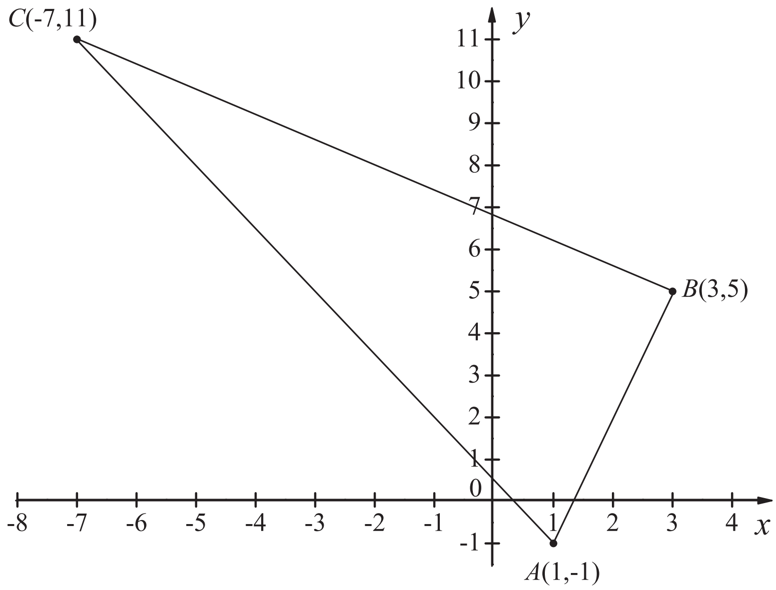

Рис. 3.6.

Для знаходження рівняння сторони AC беремо точки $A(1,-1)$ та $C(-7,11)$, тоді

$$\frac{x-1}{-7-1}=\frac{y+1}{11+1}\Rightarrow\frac{x-1}{-8}=\frac{y+1}{12}\Rightarrow\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}.$$

Рівняння сторони BC знаходимо, використовуючи точки $B(3,5)$ та $C(-7,11)$

$$\frac{x-3}{-7-3}=\frac{y-5}{11-5}\Rightarrow\frac{x-3}{-10}=\frac{y-5}{6}\Rightarrow\frac{x-3}{-5}=\frac{y-5}{3}.$$

З одержаних рівнянь сторін трикутника можемо визначити координати їх напрямних векторів і за формулою (3.15) знайти кути між ними. Зокрема, $\vec{s}_{AB}=(1,3)$, $\vec{s}_{AC}=(-2,3)$, $\vec{s}_{BC}=(-5,3)$ і

$$\cos\angle A=\frac{m_{AB}m_{AC}+n_{AB}n_{AC}}{\sqrt{m_{AB}^2+n_{AB}^2}\sqrt{m_{AC}^2+n_{AC}^2}}=\frac{1\cdot(-2)+3\cdot 3}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{(-2)^2+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{130}},$$

$$\angle A=\arccos\frac{7}{\sqrt{130}}\approx 52^\circ;$$

$$\cos\angle(AB\widehat{,}BC)=\frac{m_{AB}m_{BC}+n_{AB}n_{BC}}{\sqrt{m_{AB}^2+n_{AB}^2}\sqrt{m_{BC}^2+n_{BC}^2}}=\frac{1\cdot(-5)+3\cdot 3}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{(-5)^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{85}},$$

$$\cos\angle B=\cos(\pi-\angle(AB\widehat{,}BC))=-\cos\angle(AB\widehat{,}BC)=-\frac{2}{\sqrt{85}},$$

$$\angle B=\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{85}}\right)\approx 103^\circ;$$

$$\cos\angle C=\frac{m_{AC}m_{BC}+n_{AC}n_{BC}}{\sqrt{m_{AC}^2+n_{AC}^2}\sqrt{m_{BC}^2+n_{BC}^2}}=\frac{(-2)\cdot(-5)+3\cdot 3}{\sqrt{(-2)^2+3^2}\sqrt{(-5)^2+3^2}}=\frac{19}{\sqrt{442}},$$

$$\angle C=\arccos\frac{19}{\sqrt{442}}\approx 25^\circ.$$

3. Нехай тепер прямі l_1 та l_2 задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$. Тоді кут φ між ними дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1=(A_1,B_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2,B_2)$. Аналогічно дістанемо

1) формулу для косинуса кута φ між прямими

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}};\tag{3.18}$$

2) умову паралельності прямих

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2};\tag{3.19}$$

3) умову перпендикулярності прямих

$$A_1A_2+B_1B_2=0.\tag{3.20}$$

Координати точки перетину прямих заданих рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$ визначаються шляхом розв'язання системи цих рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0.\end{aligned}\right\}\tag{3.21}$$

Приклад 3.9. *Знайти кути та площу трикутника, сторони якого задано рівняннями:* $5x-2y-11=0$, $x+2y+5=0$, $x-2y+1=0$.

Розв'язок.

Побудуємо заданий трикутник (див. рис. 3.7) і позначимо його вершини буквами A, B, C. *Рівняння сторони* AB *є* $x-2y+1=0$. *Координати нормального вектора прямої* AB *рівні* $\vec{n}_{AB}=(1,-2)$. *Рівняння сторони* BC *є* $x+2y+5=0$, *координати нормального вектора* BC *рівні* $\vec{n}_{BC}=(1,2)$. *Рівняння сторони* AC *є* $5x-2y-11=0$, *координати нормального вектора* AC *рівні* $\vec{n}_{AC}=(5,-2)$. *Кути трикутника знаходимо за формулою* (3.18). *Зокрема,*

$$\cos\angle A=\frac{A_{AB}A_{AC}+B_{AB}B_{AC}}{\sqrt{A_{AB}^2+B_{AB}^2}\sqrt{A_{AC}^2+B_{AC}^2}}=\frac{1\cdot 5+(-2)\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\frac{9}{\sqrt{145}},$$

$$\angle A=\arccos\frac{9}{\sqrt{145}}\approx 42^\circ.$$

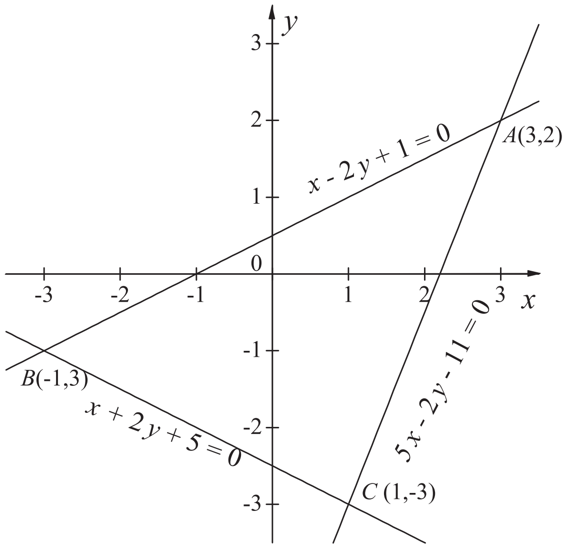

Рис. 3.7.

Кут між прямими BC і AB (див. рис. 3.7 та взаємне розташування BC і AB) рівний

$$\cos\varphi = \frac{A_{AB}A_{BC} + B_{AB}B_{BC}}{\sqrt{A_{AB}^2 + B_{AB}^2}\sqrt{A_{BC}^2 + B_{BC}^2}} = \frac{1\cdot 1 + (-2)\cdot 2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = -\frac{3}{5},$$

тому

$$\cos\angle B = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi = \frac{3}{5},$$

$$\angle B = \arccos\frac{3}{5} \approx 53^\circ.$$

$$\cos\angle C = \frac{A_{AC}A_{BC} + B_{AC}B_{BC}}{\sqrt{A_{AC}^2 + B_{AC}^2}\sqrt{A_{BC}^2 + B_{BC}^2}} = \frac{5\cdot 1 + (-2)\cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{145}},$$

$$\angle C = \arccos\frac{1}{\sqrt{145}} \approx 85^\circ.$$

Для того, щоб знайти площу трикутника, необхідно визначити координати його вершин. Точки A, B і C ми знайдемо розв'язавши системи рівнянь (3.21) *прямих що перетинаються.*

Розв'яжемо систему:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 1 = 0,\\ 5x - 2y - 11 = 0. \end{aligned}\right\}$$

За формулами Крамера маємо:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 8, \quad \triangle_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 11 & -2 \end{vmatrix} = 24, \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = 16,$$

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle} = \frac{24}{8} = 3, \quad y = \frac{\triangle_y}{\triangle} = \frac{16}{8} = 2.$$

Отримуємо точку $A(3, 2)$.

Розв'язуємо систему:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 1 = 0, \\ x + 2y + 5 = 0. \end{array}\right\}$$

Аналогічно

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \triangle_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -12, \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -4,$$

$$x = \frac{-12}{4} = -3, \quad y = \frac{-4}{4} = -1.$$

Отримуємо точку $B(-3, -1)$.

Розв'язуємо систему:

$$\left.\begin{array}{r} 5x - 2y - 11 = 0, \\ x + 2y + 5 = 0. \end{array}\right\}$$

Знаходимо

$$\triangle = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 12, \quad \triangle_x = \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 12, \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -36,$$

$$x = \frac{12}{12} = 1, \quad y = \frac{-36}{12} = -3.$$

Отримуємо точку $C(1, -3)$.

Площу трикутника знайдемо за формулою (2.27)*:*

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|; \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2}\left|3(-1 - (-3)) - 3(-3 - 2) + 1(2 - (-1))\right| = \frac{1}{2}(6 + 15 + 3) = \\ &= \frac{24}{2} = 12 \text{ кв. од.} \end{aligned}$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ **до прямої** $Ax + By + C = 0$ знаходять за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.22}$$

Число d завжди додатне, тому що це відстань. **Відхиленням** δ точки $M_0(x_0, y_0)$ від прямої $Ax + By + C = 0$ називається додатне число $\delta = d$, якщо точки M_0 і початок координат $O(0, 0)$ лежать по різні сторони від прямої, і від'ємне число $\delta = -d$, якщо точки M_0 і $O(0,0)$ лежать по один бік від неї. З формули (3.22) випливає, що відхилення

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{3.23}$$

де знак знаменника має бути протилежний до знака C.

Приклад 3.10. *Знайти відстань між двома паралельними прямими:*

$$3x + 4y - 12 = 0,$$
$$3x + 4y + 13 = 0.$$

Розв'язок.

Шукану відстань знайдемо як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої. Візьмемо на першій прямій довільну точку, наприклад точку з абсцисою $x = 4$, її ордината буде:

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot y - 12 = 0; \quad 4y = 0; \quad y = 0.$$

Отже, на першій прямій вибрана точка $M_0(4,0)$. Відстань від точки $M_0(4,0)$ до заданої другої прямої $3x + 4y + 13 = 0$ знайдемо за формулою (3.22):

$$d = \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 13|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|12 + 0 + 13|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5\,(\textit{лін. од.}).$$

Приклад 3.11. *Задано вершини трикутника $A(12,-4)$, $B(0,5)$, $C(-12,-11)$. Знайти:*

1) довжини сторін;

2) рівняння сторін;

3) рівняння висоти, що проведена з вершини B;

4) довжину цієї висоти;

5) рівняння медіани, що проведена із вершини A;

6) точку перетину висоти, що проведена із вершини B, та медіани, що проведена з точки A;

7) рівняння бісектриси кута C;

8) центр ваги трикутника;

9) кут C;

10) площу трикутника.

Розв'язок.

1. Довжини сторін знайдемо за допомогою формули (2.14) для відстані між двома точками :

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.\\
d_{AB} &= \sqrt{(0-12)^2+(5+4)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15;\\
d_{BC} &= \sqrt{(-12-0)^2+(-11-5)^2}=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20;\\
d_{AC} &= \sqrt{(-12-12)^2+(-11+4)^2}=\sqrt{576+49}=\sqrt{625}=25.
\end{aligned}$$

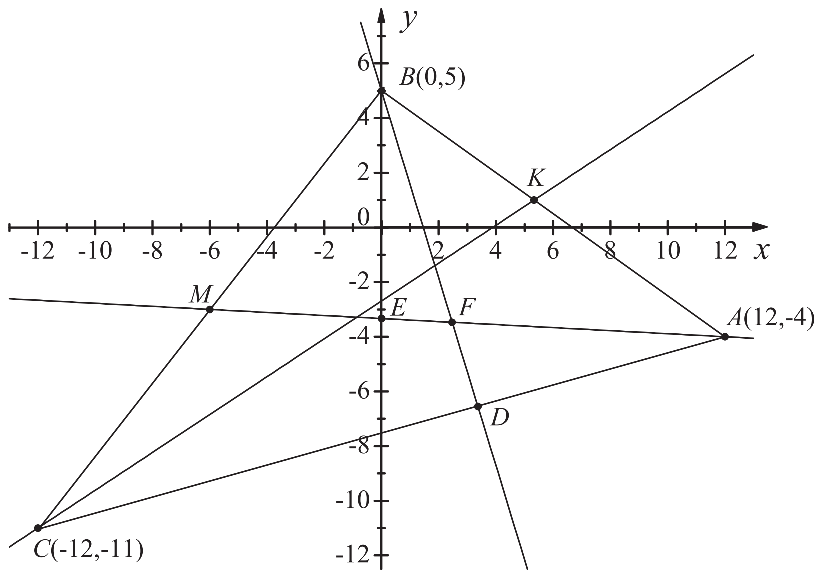

Рис. 3.8.

2. Кожна сторона трикутника проходить через дві точки (див. рис. 3.8), тому для знаходження рівнянь сторін використаємо формулу (3.7):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Знаходимо рівняння сторін:

$$AB:\quad \frac{x-12}{0-12}=\frac{y+4}{5+4}\Rightarrow\frac{x-12}{-12}=\frac{y+4}{9}\Rightarrow\frac{x-12}{-4}=\frac{y+4}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x-36=-4y-16\Rightarrow 3x+4y-20=0;$$

$$BC:\quad \frac{x-0}{-12-0}=\frac{y-5}{-11-5}\Rightarrow\frac{x}{-12}=\frac{y-5}{-16}\Rightarrow\frac{x}{3}=\frac{y-5}{4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x=3y-15\Rightarrow 4x-3y+15=0;$$

$$AC:\quad \frac{x-12}{-12-12}=\frac{y+4}{-11+4}\Rightarrow\frac{x-12}{-24}=\frac{y+4}{-7}\Rightarrow\frac{x-12}{24}=\frac{y+4}{7}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7x-84=24y+96\Rightarrow 7x-24y-180=0.$$

3. Щоб скласти рівняння висоти, яка проведена із точки B на сторону AC, необхідно знати кутовий коефіцієнт висоти.

Спочатку знайдемо кутовий коефіцієнт сторони AC

$$k_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{7}{-24} = \frac{7}{24}.$$

З умови перпендикулярності двох прямих $k_1 \cdot k_2 = -1$ знайдемо кутовий коефіцієнт висоти BD:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{\frac{7}{24}} = -\frac{24}{7}.$$

Складемо рівняння висоти, скориставшись формулою (3.6)*:*

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$
$$y - 5 = -\frac{24}{7}(x - 0) \Rightarrow 7y - 35 = -24x \Rightarrow 24x + 7y - 35 = 0.$$

Отже, шукане рівняння висоти BD: $24x + 7y - 35 = 0$.

4. Для знаходження довжини BD використаємо формулу (3.22)

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

за допомогою якої знайдемо відстань від точки $B(0, 5)$ до прямої AC ($7x - 24y - 180 = 0$)

$$d_{BD} = \frac{|7 \cdot 0 - 24 \cdot 5 - 180|}{\sqrt{7^2 + (-24)^2}} = \frac{|-300|}{\sqrt{49 + 576}} = \frac{300}{25} = 12.$$

5. Для знаходження рівняння медіани AM потрібно знайти координати точки M, яка ділить сторону BC навпіл. За формулами (2.17) *(при $\lambda = 1$) знаходимо:*

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0 + (-12)}{2} = -6;$$
$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5 + (-11)}{2} = -3.$$

Координати точки $M(-6, -3)$.

Рівняння медіани AM знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(12, -4)$ та $M(-6, -3)$.

$$\frac{x - 12}{-6 - 12} = \frac{y + 4}{-3 + 4} \Rightarrow \frac{x - 12}{-18} = \frac{y + 4}{1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - 12 = -18y - 72 \Rightarrow x + 18y + 60 = 0.$$

Отже, шукане рівняння медіани AM: $x + 18y + 60 = 0$.

6. Щоб знайти координати точки F перетину висоти BD та медіани AM, необхідно розв'язати систему рівнянь цих прямих:

$$\left.\begin{array}{r} 24x + 7y - 35 = 0, \\ x + 18y + 60 = 0. \end{array}\right\}$$

Знаходимо

$$\triangle = \begin{vmatrix} 24 & 7 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} = 425, \quad \triangle_x = \begin{vmatrix} 35 & 7 \\ -60 & 18 \end{vmatrix} = 1050, \quad \triangle_y = \begin{vmatrix} 24 & 35 \\ 1 & -60 \end{vmatrix} = -1475,$$

$$x = \frac{1050}{425} = \frac{42}{17} \approx 2.47, \quad y = \frac{-1475}{425} = -\frac{59}{17} \approx -3.47.$$

Отримуємо точку перетину $F(2.47, -3.47)$.

7. Для знаходження рівняння бісектриси внутрішнього кута C необхідно знайти координати точки K. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника, яка ділить протилежну сторону AB у відношенні $\lambda = \dfrac{AK}{KB} = \dfrac{AC}{BC}$, знаходимо $\lambda = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{25}{20} = \dfrac{5}{4}$. Координати точки K знаходимо за формулами (2.17):

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{12 + \frac{5}{4}\cdot 0}{1+\frac{5}{4}} = \frac{12\cdot 4}{9} = \frac{16}{3}, \\ y &= \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{-4 + \frac{5}{4}\cdot 5}{1+\frac{5}{4}} = \frac{9}{4}\cdot\frac{4}{9} = 1. \end{aligned}$$

Шукана точка $K\left(-\frac{16}{3}, 1\right)$.

Знаходимо рівняння бісектриси внутрішнього кути C як рівняння прямої, що проходить через дві точки $C(-12, -11)$ та $K\left(-\frac{16}{3}, 1\right)$:

$$\frac{x+12}{\frac{16}{3}+12} = \frac{y+11}{1+11} \Rightarrow \frac{x+12}{\frac{52}{3}} = \frac{y+11}{12} \Rightarrow \frac{3(x+12)}{13} = \frac{y+11}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x + 108 = 13y + 143 \Rightarrow 9x - 13y - 35 = 0.$$

Отже, шукане рівняння бісектриси CK: $9x - 13y - 35 = 0$.

8. Центр ваги трикутника E лежить на перетині його медіан або може бути визначений за формулами:

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3};$$
$$x_E = \frac{12 + 0 - 12}{3} = 0, \quad y_E = \frac{-4 + 5 - 11}{3} = -\frac{10}{3}.$$

Шукана точка центру ваги трикутника $E\left(0, -\frac{10}{3}\right)$.

9. Величину кута C знаходимо за формулою (3.11)*:*

$$\operatorname{tg}\angle C = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{AC}k_{BC}}.$$

З розв'язаного вище маємо: $k_{AC} = \dfrac{7}{24}$, $k_{BC} = \dfrac{4}{3}$; *тоді*

$$\operatorname{tg}\angle C = \frac{\frac{4}{3} - \frac{7}{24}}{1 + \frac{7}{24} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$

Величина кута $\angle C = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \approx 37^\circ$.

10. Площу трикутника знайдемо за формулою:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} d_{AC} d_{BD}; \\ S &= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 25 \cdot 6 = 150. \end{aligned}$$

Шукана площа $S = 150$ *(кв. од.).*

Завдання для самостійної роботи

1. Дано вершини трикутника ABC: $A(4,3)$, $B(-3,-3)$, $C(2,7)$. Знайти:

а) рівняння сторони AB;

б) рівняння висоти CH;

в) рівняння медіани AM;

г) точку N перетину медіани AM і висоти CH;

д) рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB.

е) відстань від точки C до прямої AB.

Відповідь: а) $6x - 7y - 3 = 0$, б) $7x + 6y - 56 = 0$, в) $2x - 9y + 19 = 0$, г) $N(26/5; 49/15)$, д) $6x - 7y + 37 = 0$, е) $d = 40/\sqrt{85} \approx 4,4$.

2. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC $4x + y = 12$ та його висот BH $5x - 4y = 12$ і AM $x + y = 6$. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника ABC.

Відповідь: $7x - 7y - 16 = 0$, $4x + 5y - 28 = 0$.

3. Знайти рівняння прямої, що знаходиться на відстані 2 від паралельної їй прямої $12x + 5y - 52 = 0$.

Відповідь: $12x + 5y - 26 = 0$ або $12x + 5y - 78 = 0$.

3.4. Площина в просторі

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано площину П точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярним до цієї площини. Виберемо на площині П довільну точку $M(x, y, z)$. При будь-якому положенні точки M вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ є взаємно перпендикулярними, тому їх скалярний добуток рівний нулю

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \tag{3.24}$$

(3.24) – **рівняння площини, що проходить через точку** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **і має нормальний вектор** $\vec{n} = (A, B, C)$.

Або

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3.25}$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Рівняння (3.25) називається **загальним рівнянням площини**. Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ називається **нормальним вектором** площини.

$D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$ – рівняння площини, що проходить через початок системи координат $O(0, 0, 0)$;

$C = 0$, $Ax + By + D = 0$ – рівняння площини, паралельної осі Oz;

$C = D = 0$, $Ax + By = 0$ – рівняння площини, що проходить через вісь Oz;

$B = C = 0$, $Ax + D = 0$ – рівняння площини, паралельної площині Oyz;

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ – рівняння координатних площин.

Площина П в декартовій системі координат може бути задана також рівняннями:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{3.26}$$

– **рівняння площини у відрізках на осях**, де a, b, c – величини відрізків, що їх відтинає площина на координатних осях Ox, Oy, Oz відповідно;

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.27}$$

– **рівняння площини, що проходить через три точки** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$**,** $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (які не лежать на одній прямій).

Приклад 3.12. *Скласти рівняння площини:*

1) що приходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо $M_1(3, -1, 2)$ і $M_2(4, -2, -1)$.

2) яка паралельна площині Oxz і проходить через точку $M_0(7, -3, 5)$;

3) що проходить через вісь Oz і точку $M_0(-3, 1, -2)$;

4) яка паралельна осі Ox і проходить через дві точки $M_1(4, 0, -2)$ і $M_2(5, 1, 7)$;

5) що приходить через точку $C(3,4,-5)$ паралельно двом векторам $\vec{a} = (3,1,-1)$ і $\vec{b} = (1,-2,1)$;

6) що приходить через точку $M_0(7,-5,1)$ і відтинає на осях координат рівні додатні відрізки;

7) яка відтинає на осях Ox та Oy відрізки $a = 3$, $b = -2$ і паралельна до вектора $\vec{s} = (2,1,-1)$.

Розв'язок.

1. Скориставшись рівнянням (3.24), можемо записати рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендиеулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (4-3,\ (-2)-(-1),\ -1-2) = (1,-1,-3)$:

$$1(x-3) - 1(y+1) - 3(z-2) = 0 \quad \textit{або} \quad x - y - 3z + 2 = 0.$$

Це і є шукане рівняння площини.

2. Знову скористаємося рівнянням (3.24). Якщо дана площина паралельна площині Oxz, то вона має нормальний вектор $\vec{n} = (0,B,0)$. Тоді рівняння площини, що проходить через точку $M_0(7,-3,5)$ має вигляд:

$$0(x-7) + B(y+3) + 0(z-5) = 0 \quad \textit{або} \quad B(y+3) = 0.$$

Остаточно отримуємо рівняння площини $y + 3 = 0$.

3. Розглянемо загальне рівняння площини (3.25). Якщо площина проходить через вісь Oz, то вона має нормальний вектор $\vec{n} = (A,B,0)$ і коефіцієнт $D = 0$. Враховуючи, що шукана площина проходить через точку $M_0(-3,1,-2)$, то отримаємо систему рівняння, розв'язавши яку знайдемо її рівняння:

$$\left.\begin{array}{r} Ax + By = 0, \\ -Ax_0 - By_0 = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} Ax + By = 0, \\ 3A - B = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow Ax + 3Ay = 0, \Rightarrow x + 3y = 0.$$

4. Оскільки площина паралельна до координатної осі Ox, то її нормальний вектор має координати: $\vec{n} = (0,B,C)$. Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (5-4,\ 1-0,\ 7-(-2)) = (1,1,9)$, який лежить на площині. Вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ взаємно перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0,$$
$$0 \cdot 1 + 1 \cdot B + 9 \cdot C = 0, \quad \textit{звідки знаходимо} \quad B = -9C.$$

Запишемо рівняння площини (3.24), що проходить через точку $M_1(4,0,-2)$

$$0 \cdot 4 + B(y-0) + C(z+2) = 0 \quad \textit{або} \quad By + C(z+2) = 0$$

і підставимо в нього знайдене значення $B = -9C$

$$-9Cy + C(z+2) = 0 \quad \textit{або} \quad 9y - z - 2 = 0.$$

Це і є шукане рівняння площини.

5. Нехай точка $M(x, y, z)$ – довільна точка шуканої площини. Тоді вектор $\overrightarrow{CM} = (x-3,\ y-4,\ z+5)$ належить цій площині. За умовою задачі вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\overrightarrow{CM}$ є компланарними. Через це їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\overrightarrow{CM} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}\right) = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи визначник, знаходимо шукане рівняння:

$$-x + 3 - 4y + 16 - 7z - 35 = 0 \quad \textit{або} \quad x + 4y + 7z + 16 = 0.$$

6. Скористаємося знову рівнянням (3.24). Одержимо рівняння площини що проходить через задану точку $M_0(7, -5, 1)$:

$$A(x-7) + B(y+5) + C(z-1) = 0 \quad \textit{або} \quad Ax + By + Cz - 7A + 5B - C = 0.$$

Перепишемо його у вигляді

$$\frac{x}{\frac{1}{A}} + \frac{y}{\frac{1}{B}} + \frac{z}{\frac{1}{C}} = 7A - 5B + C.$$

Для того щоб одержане рівняння перейшло в рівняння площини у відрізках на осях (3.26), необхідно покласти:

$$7A - 5B + C = 1, \quad a = 1/A, \quad b = 1/B, \quad c = 1/C.$$

За умовою задачі $a = b = c$, отже $A = B = C$. Тоді з першого виразу знаходимо $A = B = C = 1/3$ і шукане рівняння площини набуває вигляду

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{x}{3} = 1 \quad \textit{або} \quad x + y + z - 3 = 0.$$

Зауваження! *Якщо необхідно побудувати площину, зручно перейти від загального рівняння площини (3.24) до рівняння площини у відрізках на осях (3.26). Для цього треба перенести у праву частину вільний член і поділити на нього обидві частини рівняння. Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, легко побудувати площину. У нашому випадку $a = b = c = 1/3$ і площину побудовано на рис. 3.9.*

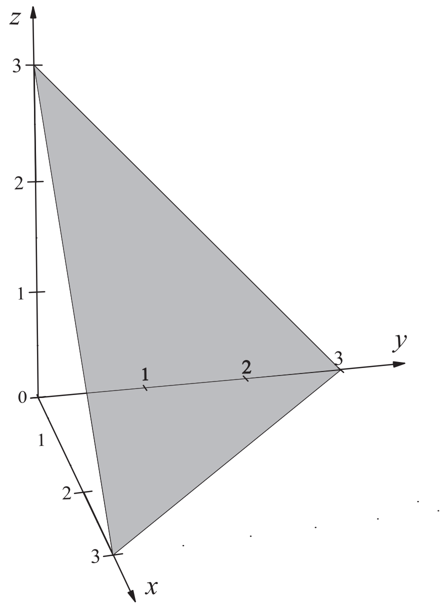

Рис. 3.9.

7. Оскільки площина відтинає на осях Ox та Oy відрізки $a = 3$ $b = -2$, то вона проходить через точки $M_1(3,0,0)$ і $M_2(0,-2,0)$. Візьмемо на площині точку $M(x,y,z)$ і знайдемо вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x-3,\ y,\ z)$ та $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3,-2,0)$, які належить цій площині. Вектори $\vec{s}$, $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ є компланарними, тому їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи визначник, знаходимо шукане рівняння:

$$2x - 3y + z - 6 = 0.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Записати рівняння площини:

а) що проходить через точку $B(2,1,-1)$ і має напрямний вектор $\vec{n} = (1,-2,3)$;

б) що проходить через точки $M_1(1,1,1)$ і $M_2(2,3,4)$ перпендикулярно до площини $2x - 7y + 5z + 9 = 0$.

Відповідь: а) $x - 2y + 3z + 3 = 0$, б) $31x + y - 11z - 21 = 0$.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(2,-3,5)$ паралельно площині Oxy.

Відповідь: $z - 5 = 0$.

3. Знайти величину відрізків, які відтинає на осях координат площина, що проходить через точку $M(-2,7,3)$ паралельно площині $x-4y+5z-1 = 0$.

Відповідь: $a=-15$, $b=15/4$, $c=-3$.

4. Скласти рівняння площини, що перпендикулярна до площини $2x-2y+4z-5=0$ і відтинає на осях Ox та Oy відрізки $a=-2$, $b=2/3$.

Відповідь: $x-3y-2z+2=0$.

3.5. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин

Величину кута φ між площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ обчислюють за формулою

$$\cos\varphi=\cos(\widehat{\vec n_1,\vec n_2})=\frac{\vec n_1\cdot\vec n_2}{|\vec n_1||\vec n_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}, \qquad (3.28)$$

де $\vec n_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\vec n_2=(A_2,B_2,C_2)$ – нормальні вектори даних площин. За допомогою формули (3.28) можна отримати **умову перпендикулярності** даних **площин**:

$$\vec n_1\cdot\vec n_2=0 \quad \text{або} \quad A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (3.29)$$

Умова паралельності розглядуваних **площин** має вигляд

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3.30)$$

Дві площини збігаються, якщо виконуються рівності

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \qquad (3.31)$$

Приклад 3.13. *Знайти косинус кута між площиною, що проходить через точки $O(0,0,0)$, $M_1(1,-1,0)$, $M_2(1,1,1)$, та площиною Oxy.*

Розв'язок.

За формулою (3.27) знаходимо рівняння площини, що проходить через точки O, M_1 та M_2

$$\begin{vmatrix} x & y & z\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

або

$$x+y-2z=0.$$

Рівняння координатної площини Oxy відоме $z=0$. Знаючи нормальні вектори площин $\vec n_1=(1,1,-2)$ і $\vec n_2=(0,0,1)$ за формулою (3.28) знаходимо

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot0+1\cdot0+(-2)\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{0+0+1^2}}=-\frac{2}{\sqrt6}.$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначають за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.32}$$

Приклад 3.14. *Знайти висоту AH піраміди, заданої своїми вершинами $A(-1, 2, -1)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, 1, -1)$, $D(2, 0, -1)$.*

Розв'язок.

За формулою (3.27) *знаходимо рівняння площини, що проходить через точки B, C та D*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

звідки $3x + 6y + z - 5 = 0$.

Висоту AH знайдемо як відстань точки $A(-1, 2, -1)$ від площини BCD за формулою (3.32)*:*

$$AH = \frac{|3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 5|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{46}}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити кут між площинами $x - 2y + 2z - 3 = 0$ і $3x - 4y + 5 = 0$.

Відповідь: $\cos\varphi = 11/15$, $\varphi \approx 42°51'$.

2. Знайти відстань від точки $M(2, 0, -\frac{1}{2})$ до площини $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

Відповідь: $d = 4$.

3. Обчислити відстань між паралельними площинами $3x + 6y + 2z - 15 = 0$ і $3x + 6y + 2z + 13 = 0$.

Відповідь: $d = 4$.

3.6. Пряма лінія в просторі. Різні види рівнянь прямої в просторі

Залежно від способу задання прямої в просторі можна розглядати різні її рівняння.

1. Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (m, n, p)$, а $M(x, y, z)$ – довільна точка цієї прямої. Якщо $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$ –

радіуси-вектори точок M_0 і M (рис. 3.10), то справедлива векторна рівність (аналогічна (3.2))

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}t \quad (-\infty < t < +\infty), \tag{3.33}$$

яка випливає з правила додавання векторів. Рівняння (3.33) називається **векторно-параметричним рівнянням прямої**, $\vec{s}$ – *напрямним вектором прямої* (3.33), t – *параметром.*

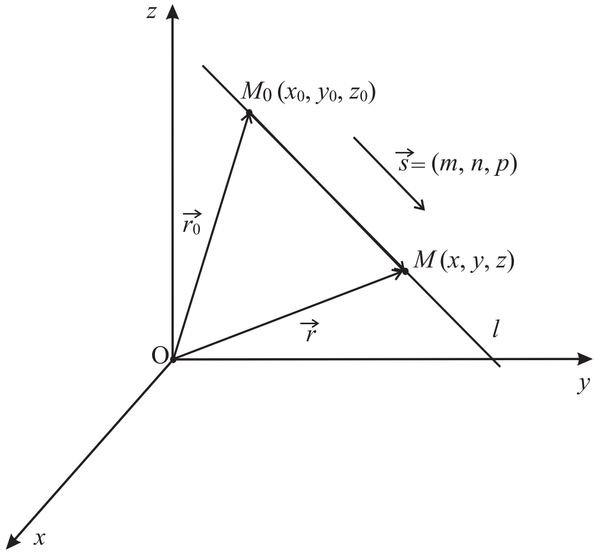

Рис. 3.10.

2. Із рівняння (3.33) отримуємо три скалярні рівняння:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt, \tag{3.34}$$

які називаються **параметричними рівняннями прямої**.

3. Розв'язуючи рівняння системи (3.34) відносно t та прирівнюючи отримані співвідношення, приходимо до **канонічних рівнянь прямої**:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{3.35}$$

Якщо $m = 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$, то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

визначає пряму, перпендикулярну до осі Ox. Аналогічно рівняння, в яких лише $n = 0$ або $p = 0$, визначають прямі, перпендикулярні до осі Oy або Oz.

Якщо $m = n = 0$, $p \neq 0$, або $m = p = 0$, $n \neq 0$, або $n = p = 0$, $m \neq 0$, то рівняння (3.35) визначають прямі, відповідно паралельні осям Oz, Oy, Ox.

Приклад 3.15. *Скласти рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(2,-3,4)$ *перпендикулярно до прямих* $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$ *і* $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-4}{3}$.

Розв'язок.

Задані прямі мають напрямні вектори: $\vec{s}_1 = (1,-1,1)$ *і* $\vec{s}_2 = (2,1,3)$. *Оскільки пряма перпендикулярна до заданих прямих, то за її напрямний вектор можна прийняти векторний добуток* $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$*:*

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-4,-1,3).$$

Знаючи напрямний вектор та точку M_0 *через яку проходить шукана пряма записуємо її канонічні рівняння:*

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-3}.$$

4. **Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки** $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$ записується у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3.36}$$

Приклад 3.16. *Скласти канонічні та параметричні рівняння прямої, що проходить через точки* $M_1(3,-5,2)$ *і* $M_2(1,-1,-4)$.

Розв'язок.

За формулою (3.36) *знаходимо:*

$$\frac{x-3}{1-3} = \frac{y+5}{-1+5} = \frac{z-2}{-4-2} \quad \Rightarrow \frac{x-3}{-2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{-6}$$

або $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z-2}{6}$ *– це і є канонічні рівняння шуканої прямої.*

Для знаходження параметричних рівнянь цієї прямої скористаємося формулою (3.34) *і одержимо:*

$$x = 3+t, \quad y = -5-2t, \quad z = 2+3t, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

5. Дві площини, що перетинаються

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \\ \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2), \end{aligned} \tag{3.37}$$

де $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, однозначно задають пряму. Рівняння (3.37) називаються **загальними рівняннями прямої в просторі**.

Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої, заданої рівняннями (3.37), визначається за формулою

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \tag{3.38}$$

а для знаходження координат точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ одну з її координат, наприклад $x = x_0$, беруть довільною, а дві інші визначають із системи

$$\left.\begin{aligned} B_1y + C_1z = -D_1 - A_1x_0, \\ B_2y + C_2z = -D_2 - A_2x_0. \end{aligned}\right\}$$

Тоді рівняння даної прямої можна записати у канонічному вигляді (3.35).

Приклад 3.17. *Пряма задана загальними рівняннями*

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z + 4 = 0, \\ 3x + y - 5z - 8 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Записати її канонічні рівняння.

Розв'язок.

Знаходимо напрямний вектор прямої

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (3, 11, 4).$$

Поклавши у початковій системі $z = 0$ і додаючи дані рівняння, отримуємо $x = 1$, $y = 5$. Точка $M_0(1, 5, 0)$ лежить на даній прямій. Її канонічні рівняння мають вигляд

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{11} = \frac{z}{4}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2, 0, -3)$:

а) паралельно вектору $\vec{s} = (2, -3, 5)$;

б) паралельно прямій $\left.\begin{array}{l} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0. \end{array}\right\}$

Відповідь: а) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$, б) $\dfrac{x-2}{11} = \dfrac{y}{-17} = \dfrac{z+3}{-13}$.

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат паралельно прямій $x = 2t + 5$, $y = -3t + 1$, $z = -7t - 4$.

Відповідь: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{-7}$.

3. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M(1, -5, 3)$ перпендикулярно до прямих $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$ і $x = 3t + 1$, $y = -t - 5$, $z = 2t + 3$.

Відповідь: $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+5}{-7} = \dfrac{z-3}{-11}$.

3.7. Кут між двома прямими в просторі. Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Розглянемо випадки взаємного розташування двох прямих в просторі. Дві прямі в просторі можуть бути мимобіжними або перетинаються, або паралельними, або співпадати. У будь-якому випадку вони утворюють деякий кут (між їх напрямними векторами $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$). Якщо прямі задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \tag{3.39}$$

то величина кута φ між ними визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{3.40}$$

Тепер можна записати **умову перпендикулярності прямих**:

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \quad \text{або} \quad m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \tag{3.41}$$

Умова паралельності прямих (3.39) має вигляд $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1 M_2}$ або

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}, \tag{3.42}$$

а **умова їх співпадіння** – $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, де точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ належать прямим (3.39).

Запишемо **необхідну і достатню умову перетину непаралельних прямих** ($\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$), заданих рівняннями (3.39):

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.43}$$

Якщо умова (3.43) не виконується, то прямі (3.39) – мимобіжні.

Відстань h від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої (3.35), що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ у напрямі вектора $\vec{s} = (m, n, p)$, обчислюється за формулою

$$h = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{s}\,|}. \tag{3.44}$$

Приклад 3.18. *Знайти косинус кута між прямими* $\left.\begin{array}{c} 2x - y - 7 = 0, \\ 2x - z + 5 = 0 \end{array}\right\}$ *та* $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + 8 = 0, \\ 3x - z = 0. \end{array}\right\}$

Розв'язок.

За формулою (3.38) *знаходимо напрямні вектори даних прямих:*

$$\vec{s}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1, 2, 2) \quad \text{та} \quad \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2, 3, 6).$$

Тоді відповідно до (3.40) *отримуємо*

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{20}{21}.$$

Приклад 3.19. *При якому значенні p прямі*

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = pt - 7 \end{array}\right\} \quad і \quad \left.\begin{array}{l} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

паралельні?

Розв'язок.

За формулами (3.34) і (3.38) знаходимо напрямні вектори даних прямих:

$$\vec{s_1} = (2, -1, p) \quad і \quad \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-8, 4, -4).$$

З умови (3.42) маємо

$$\frac{2}{-8} = \frac{-1}{4} = \frac{p}{-4}; \quad \frac{p}{-4} = -\frac{1}{4},$$

звідки $p = 1$.

Приклад 3.20. *Перевірити чи перетинаються прямі* $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ *і* $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-3}{5}$.

Розв'язок.

За умовою задачі перша пряма проходить через точку $M_1(-2, 3, 4)$ *у напрямі вектора* $\vec{s_1} = (-1, 2, 3)$*, а друга – через точку* $M_2(0, -4, 3)$ *паралельно до вектора* $\vec{s_2} = (3, 2, 5)$.

Для того щоб встановити чи перетинаються дані прямі необхідно перевірити умову (3.43): $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = 0$. *Знаходимо мішаний добуток*

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -82 \neq 0.$$

Оскільки умова (3.43) не виконується, то дані прямі не перетинаються, а, отже, є мимобіжними.

Приклад 3.21. *Обчислити відстань між прямими* $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{2}$ *і* $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{2}$.

Розв'язок.

Як випливає з умови задачі перша пряма проходить через точку $M_0(2, -1, 0)$ *у напрямі вектора* $\vec{s} = (3, 4, 2)$*, а друга – через точку* $M_1(7, 1, 3)$.

Знаходимо вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (5, 2, 3)$*, потім векторний добуток*

$$\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (8, 1, -14)$$

та його модуль $|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}| = \sqrt{8^2+1^2+(-14)^2} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}$.

Відстань від точки M_1 *до першої прямої, яка і є відстанню між даними прямими знаходимо за формулою* (3.44)*:*

$$h = \frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{s}\,|} = \frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}} = \frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 3 \text{ \textit{лін. од.}}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити кут між прямими $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3}$ і $\left.\begin{array}{l} 3x+y-5z=0, \\ 2x+3y-8z+1=0. \end{array}\right\}$

Відповідь: $\varphi = \pi/2$.

2. Довести, що пряма $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-6}$ перпендикулярна до прямої $\left.\begin{array}{l} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{array}\right\}$.

Відповідь: так.

3. Перевірити, чи лежать на одній прямій точки $A(0,0,2)$, $B(4,2,5)$ і $C(12,6,11)$.

Відповідь: лежать.

3.8. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Кутом між прямою і площиною називається кут між прямою l і її ортогональною проекцією на площину l' (рис. 3.11).

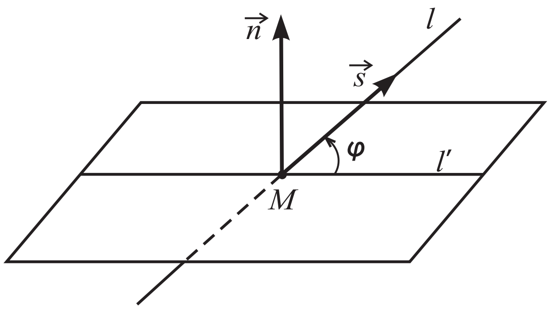

Рис. 3.11.

Величина кута φ між прямою $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p_0}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою

$$|\cos(\vec{n},\widehat{\ }\vec{s}\,)| = \sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (3.45)$$

Умова паралельності прямої і площини: якщо пряма паралельна площині, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні, тому

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \quad \text{або} \quad Am + Bn + Cp = 0. \tag{3.46}$$

Умова перпендикулярності прямої і площини: якщо пряма перпендикулярна до площини, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ паралельні, тому має місце співвідношення:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \tag{3.47}$$

Розглянемо детальніше випадки взаємного розташування прямої і площини. Пряма (3.35) і площина $Ax + By + Cz + D = 0$ можуть перетинатися, бути паралельними або пряма може лежати в площині.

Перейдемо від канонічних рівнянь (3.35) до параметричних (3.34) і підставимо значення x, y, z з рівнянь (3.34) в рівняння площини. Отримаємо рівняння відносно невідомого параметра t:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$$

або

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \tag{3.48}$$

Можливі три випадки.

1. При $Am + Bn + Cp \neq 0$ рівняння (3.48) має єдиний розв'язок:

$$t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)/(Am + Bn + Cp). \tag{3.49}$$

Підставивши це значення t в параметричні рівняння прямої (3.34), знайдемо координати точки перетину M (рис. 3.11).

2. При

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \tag{3.50}$$

рівняння (3.48) не має розв'язків, і пряма не має спільних точок з площиною. Ми отримали відому вже умову паралельності прямої і площини (3.46).

3. При

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \tag{3.51}$$

будь-яке значення t є розв'язком рівняння (3.48), тобто будь-яка точка прямої належить площині. Рівності (3.51) називаються **умовами приналежності прямої площині**.

Приклад 3.22. *Визначити кут між прямою*

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3 = 0, \\ 3y + z - 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

і площиною $2x + 3y - z + 1 = 0$.

Розв'язок.

Знаючи нормальний вектор площини $\vec{n} = (2, 3, -1)$ *та знайшовши за формулою* (3.38) *напрямний вектор прямої*

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 3),$$

з формули (3.45) *маємо*

$$\sin\varphi = \frac{|2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{5}{7},$$

звідки $\varphi = \arcsin(5/7) \approx 45°36'$.

Приклад 3.23. *Встановити взаємне розташування прямої* $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ *і площини* $x + 2y - 4z + 1 = 0$.

Розв'язок.

За умовою задачі $M_0(13, 1, 4)$ *– задана точка прямої, а* $\vec{s} = (8, 2, 3)$ *– її напрямний вектор;* $\vec{n} = (1, 2, -4)$ *– нормальний вектор площини. Розглянемо рівняння* (3.48) *та виконання умов* (3.50), (3.51):

$$Am + Bn + Cp = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 = 8 + 4 - 12 = 0,$$
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 1 \cdot 13 + 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 4 + 1 = 13 + 2 - 16 + 1 = 0.$$

Оскільки, виконуються рівності (3.51), *то пряма лежить в площині.*

Приклад 3.24. *Знайти координати* x_2, y_2, z_2 *точки* M_2, *симетричної точці* $M_1(6, -4, -2)$ *відносно площини* $x + y + z - 3 = 0$.

Розв'язок.

Складемо канонічні рівняння прямої M_1M_2, *що проходить через точку* M_1 *перпендикулярно до площини* $x + y + z - 3 = 0$ *(вздовж напрямного вектора* $\vec{s} = \vec{n} = (1, 1, 1)$*):*

$$\frac{x-6}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

Представимо його у параметричній формі:

$$x = 6 + t, \quad y = -4 + 5, \quad z = -2 + t.$$

Одержані значення x, y, z підставимо у рівняння площини: $(t+6)+(t-4)+(t-2)-3=0$ і знайдемо $t=1$. Підставивши значення параметра $t=1$ в параметричні рівняння прямої, знайдемо точку M перетину прямої M_1M_2 з даною площиною: $M(7,-3,-1)$. Так як точка M є серединою відрізка M_1M_2, то справедливі рівності (див. (2.17)):

$$7=\frac{6+x_2}{2}, \quad -3=\frac{-4+y_2}{2}, \quad -1=\frac{-2+z_2}{2},$$

із яких знаходимо координати точки M_2: $x_2=8$, $y_2=-2$, $z_2=0$.

Приклад 3.25. *Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(3,4,0)$ і пряму $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.*

Розв'язок.

Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка площини, а $B(2,3,-1)$ – задана точка прямої. Тоді вектори $\overrightarrow{AM}=(x-3,y-4,z)$, $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-1)$ і напрямний вектор $\vec{s}=(1,2,2)$ прямої компланарні, тому їх мішаний добуток рівний нулю

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\vec{s}=\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Обчислюючи визначник, знаходимо шукане рівняння площини: $y-z-4=0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Встановити взаємне розташування прямої $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$ і площини $3x-3y+2z-5=0$.

Відповідь: паралельні.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через через дві паралельні прямі $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ і $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$.

Відповідь: $x+2y-2z-1=0$.

3. Знайти проекцію точки $M(2,-1,3)$ на площину $x+3y-4z-13=0$.

Відповідь: $M_1(3,2,-1)$.

4. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Лінією (кривою) другого порядку називають множину M точок площини, декартові координати x, y яких задовольняють алгебраїчне рівняння другої степені

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_0 = 0, \tag{4.1}$$

де a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – постійні дійсні числа, причому хоча б одне з чисел a_1, a_2, a_3 відмінне від нуля. Рівняння (4.1) називають **загальним рівнянням лінії другого порядку**. Зокрема, до ліній другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола і парабола.

4.1. Коло

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Рівняння

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{4.2}$$

визначає коло (див. рис. 4.1) з центром в точці $C(x_0, y_0)$ і радіусом R. Зокрема, якщо центром кола є початок координат ($x_0 = 0, y_0 = 0$), то рів-

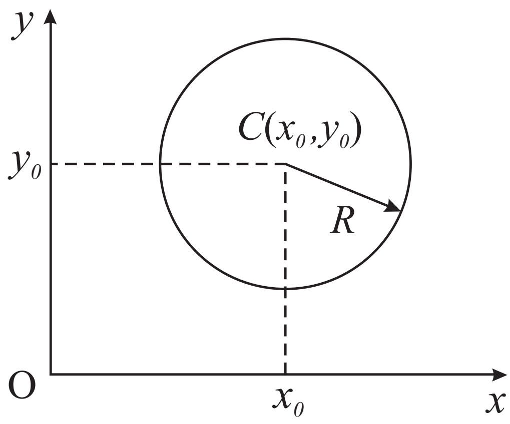

Рис. 4.1.

няння кола має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{4.3}$$

Якщо в рівнянні (4.2) розкрити дужки, то воно набуває вигляду

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0, \tag{4.4}$$

де $m = -2x_0$, $n = -2y_0$ та $p = x_0^2 + y_0^2 - R^2$ і називається **загальним рівнянням кола**.

Для того щоб від рівняння (4.4) знову перейти до рівняння (4.2), потрібно в лівій частині (4.4) виділити повні квадрати:

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p. \tag{4.5}$$

Приклад 4.1. *Скласти рівняння кола з центром в точці $C(-3,4)$ і радіусом $R = 5$.*

Розв'язок.

Підставляючи в рівняння (4.2) значення $x_0 = -3$, $y_0 = 4$ та $R = 5$, зразу одержимо:

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

Приклад 4.2. *Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.*

Розв'язок.

Згрупуємо доданки із змінною x та змінною y та доповнимо одержані вирази до повних квадратів:

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0,$$

або

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 - 3 = 0,$$

звідки

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16.$$

Отже, точка $(2,-3)$ – центр кола, а $R = 4$ – його радіус.

Приклад 4.3. *Скласти рівняння кола, що проходить через точки $A(7,7)$, $B(-2,4)$, а його центр лежить на прямій $2x-y-4 = 0$. Зробити малюнок.*

Розв'язок.

Якщо коло проходить через точки $A(7,7)$ і $B(-2,4)$, то координати цих точок повинні задовольняти рівнянню кола (4.2). Таким чином отримуємо два рівняння:

$$(7-x_0)^2 + (7-y_0)^2 = R^2,$$
$$(-2-x_0)^2 + (4-y_0)^2 = R^2.$$

Якщо центр кола лежить на прямій $2x - y - 4 = 0$, то його координати повинні задовольняти рівняння цієї прямої. Одержуємо третє рівняння:

$$2x_0 - y_0 - 4 = 0.$$

Для знаходження x_0, y_0 та R розв'яжемо систему рівнянь

$$\left.\begin{array}{l}(7-x_0)^2+(7-y_0)^2=R^2,\\(-2-x_0)^2+(4-y_0)^2=R^2,\\2x_0-y_0-4=0,\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}98-14x_0-14y_0+x_0^2+y_0^2=R^2,\\20+4x_0-8y_0+x_0^2+y_0^2=R^2,\\2x_0-y_0-4=0.\end{array}\right\}$$

Віднімемо від першого рівняння друге і одержимо систему

$$\left.\begin{array}{l}3x_0+y_0-13=0,\\2x_0-y_0-4=0.\end{array}\right\}$$

Тепер до першого рівняння додамо друге і знайдемо x_0:

$$5x_0=17,\quad x_0=17/5.$$

Підставивши отримане значення $x_0=17/5$ в рівняння $2x_0-y_0-4=0$, одержимо значення $y_0=14/5$. Таким чином, координати центра кола знайдено: $C\left(\frac{17}{5},\frac{14}{5}\right)$.

З першого рівняння вихідної системи знаходимо R^2:

$$R^2=(7-x_0)^2+(7-y_0)^2=\left(7-\frac{17}{5}\right)^2+\left(7-\frac{14}{5}\right)^2=\frac{153}{5}.$$

Отже, шукане рівняння кола має вигляд:

$$\left(x-\frac{17}{5}\right)^2+\left(y-\frac{14}{5}\right)^2=\frac{153}{5},$$

а саме коло зображено на рис. 4.2.

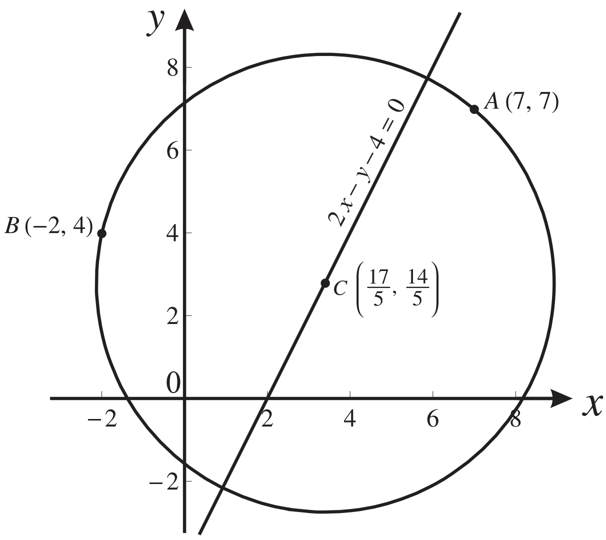

Рис. 4.2.

Завдання для самостійної роботи

Скласти рівняння кола в кожному з таких випадків:

1) центром кола є точка $C(2,-3)$, радіус $R=7$;

Відповідь: $(x-2)^2+(y+3)^2=49$.

2) центром кола є точка $C(6,-8)$ і коло проходить через початок координат;

Відповідь: $(x-6)^2+(y+8)^2=100$.

3) точки $A(3,2)$ і $B(-1,6)$ є кінцями одного з діаметрів кола;

Відповідь: $(x-1)^2+(y-4)^2=8$.

4) центром кола є точка $C(1,-1)$, а пряма $5x-12y+9=0$ є дотичною до кола;

Відповідь: $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

5) коло проходить через точки $A(3,1)$ і $B(-1,3)$, центр лежить на прямій $3x-y-2=0$;

Відповідь: $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

6) коло проходить через три точки: $M_1(-1,5)$, $M_2(-2,-2)$ і $M_3(5,5)$;

Відповідь: $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

7) коло проходить через точку $M(1,2)$ і дотикається до координатних осей;

Відповідь: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ або $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

4.2. Еліпс

Еліпсом називають геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала $2a$ $(a>b)$, більша за F_1F_2.

Канонічне рівняння еліпса з півосями a і b, центром в початку координат і вершинами A_1, A_2, B_1, B_2, розташованими на осях координат має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4.6}$$

Відстані між вершинами називаються осями еліпса: $A_1A_2=2a$ – **велика (фокальна)** вісь і $B_1B_2=2b$ – **мала** вісь для еліпса у котрого $a>b$ (див. рис. 4.3,*а*) і навпаки $A_1A_2=2a$ – **мала** вісь, а $B_1B_2=2b$ – **велика** вісь для еліпса у котрого $b>a$ (див. рис. 4.3,*б*). Точки F_1 і F_2 називаються **фокусами**, а $F_1F_2=2c$ – відстань між фокусами. Відповідно до означення будь-яка точка M еліпса задовольняє умові $F_1M+F_2M=2a$ і $b^2=a^2-c^2$ у випадку $a>b$ або $F_1M+F_2M=2b$ і $a^2=b^2-c^2$ у випадку $b>a$.

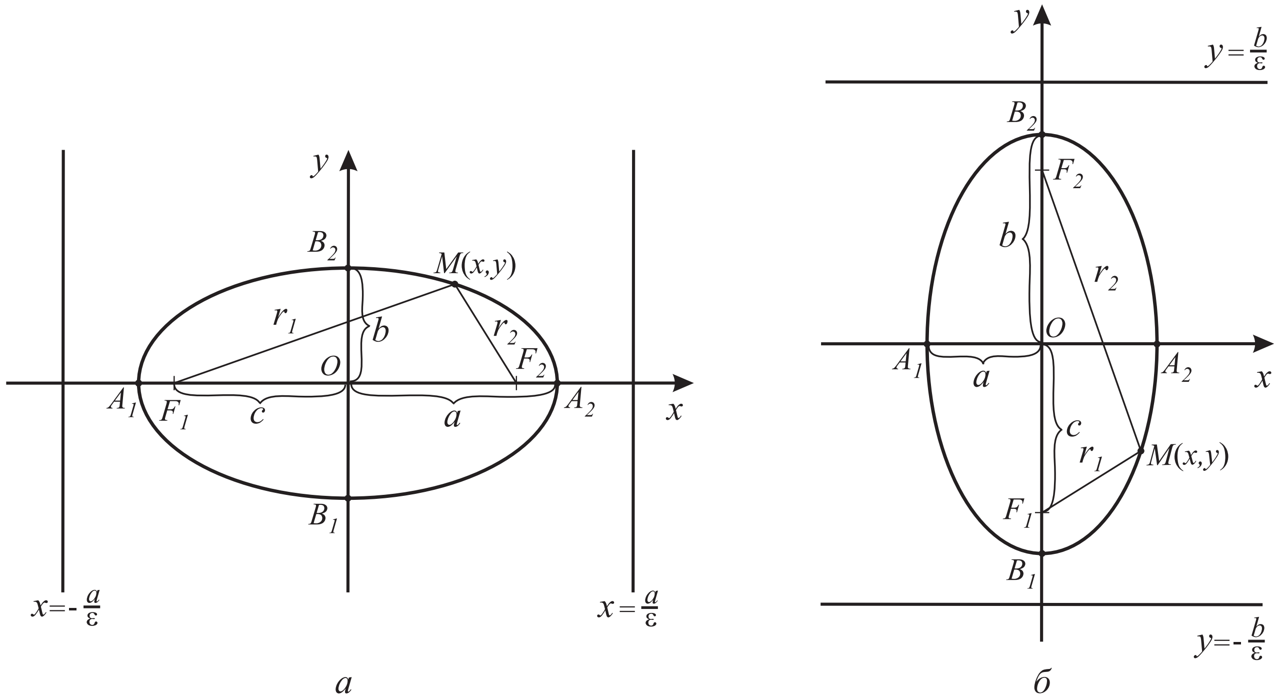

Рис. 4.3.

Число ε, рівне відношення відстані між фокусами F_1F_2 до довжини великої осі, називається **ексцентриситетом еліпса**:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (a > b) \quad \text{і} \quad \varepsilon = \frac{c}{b} \quad (b > a).$$

В будь-якому випадку $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

З вище приведених формул для відношення осей дістаємо

$$\text{якщо} \qquad a > b, \qquad \text{то} \qquad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

$$\text{якщо} \qquad b > a, \qquad \text{то} \qquad \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b^2} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отже, якщо $\varepsilon = 0$, то $b = a$, тобто еліпс перетворюється в коло; якщо $\varepsilon \to 1$, то відношення осей b/a (a/b) зменшується, тобто еліпс все більше розтягується вздовж осі Ox (Oy).

Відстані $F_1M = r_1$ та $F_2M = r_2$ точки $M = (x, y)$ еліпса до його фокусів називаються **фокальними радіусами точки** M і визначаються за формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x \qquad \text{при} \qquad a > b,$$

$$r_1 = b + \varepsilon y, \qquad r_2 = b - \varepsilon y \qquad \text{при} \qquad b > a.$$

Прямі паралельні до малої осі еліпса, називаються **директрисами еліпса**; їх рівняння мають вигляд

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c},$$

якщо $a > b$, або

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \pm\frac{b^2}{c},$$

якщо $a < b$ (див. рис. 4.3). Осі координат є осями симетрії еліпса.

Рівняння дотичної до еліпса $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Еліпс з центром у точці $C_0(x_0, y_0)$ задається рівнянням

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{4.7}$$

Приклад 4.4. *Задано рівняння еліпса* $25x^2 + 169y^2 = 4225$. *Знайти довжину осей, координати його фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис та координати точок еліпса, відстань від яких до лівого фокуса* F_1 *дорівнює 14. Зробити малюнок.*

Розв'язок.

Приведемо задане рівняння еліпса до кононічного виду (4.6), *розділивши обидві його частини на 4225*

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \textit{або} \quad \frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Звідти одержуємо, що $a = 13$, $2a = 26$; $b = 5$, $2b = 10$. *Знаючи* a *і* b, *із співвідношення* $b^2 = a^2 - c^2$ *знаходимо* c:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 25 = 144, \quad c = \sqrt{144} = 12.$$

Тоді координати фокусів будуть: $F_1(-12, 0)$ *і* $F_2(12, 0)$ *(див. рис. 4.4).*

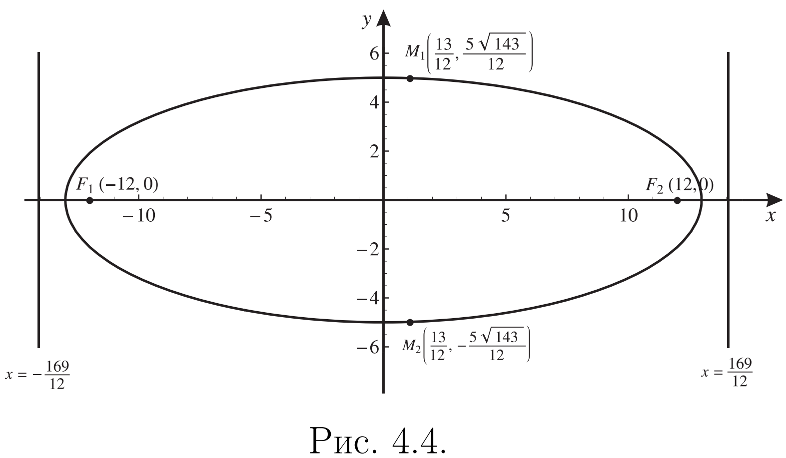

Рис. 4.4.

Обчислюємо ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{12}{13}$ *та записуємо рівняння директрис* $x = \pm\dfrac{a^2}{c} = \pm\dfrac{169}{12}$.

З рівняння $r_1 = a + \varepsilon x$ *знаходимо абсцису точок еліпса, що знаходяться на відстані 14 від лівого фокуса* F_1

$$x = \frac{r_1 - a}{\varepsilon} = \frac{14 - 13}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}.$$

Підставивши її значення в канонічне рівняння еліпса, знайдемо ординати цих точок

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \pm\frac{5}{13}\sqrt{169 - \frac{169}{144}} = \pm\frac{5\sqrt{143}}{12}.$$

Таким чином отримуємо координати шуканих точок: $M_1\left(\frac{13}{12}, \frac{5\sqrt{143}}{12}\right)$ *та* $M_2\left(\frac{13}{12}, -\frac{5\sqrt{143}}{12}\right)$.

Приклад 4.5. *Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:*

1) його мала вісь рівна 24, а відстань між фокусами рівна 10;

2) відстань між фокусами рівна 6, ексцентриситет рівний 3/5;

3) відстань між фокусами рівна 4, відстань між директрисами рівна 5;

4) відстань між директрисами рівна 32, ексцентриситет рівний 0,5;

Розв'язок.

Для того щоб скласти рівняння еліпса необхідно знати його півосі a *та* b.

1. За умовою задачі $2b = 24$, $b = 12$*;* $2c = 10$, $c = 5$*. Велику піввісь* a *знайдемо із співвідношення* $b^2 = a^2 - c^2$*. Таким чином,* $a^2 = b^2 + c^2 = 12^2 + 5^2 = 169$*. Тоді одержуємо рівняння еліпса:*

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

2. Згідно умови $2c = 6$, $c = 3$*;* $\varepsilon = \frac{3}{5}$*. Велику піввісь* a *знайдемо з формули* $\varepsilon = \frac{c}{a}$*, а малу піввісь* b *– із співвідношення* $b^2 = a^2 - c^2$*:*

$$a = \frac{c}{\varepsilon}, \quad a = \frac{3}{3/5} = 5; \quad b^2 = 5^2 - 3^2 = 16.$$

Таким чином, шукане рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

3. За умовою $2c = 4$, $c = 2$. Нехай $d = 5$ – відстань між директрисами. Тоді їх рівняння має вигляд: $x = \pm\frac{d}{2} = \pm\frac{5}{2}$. З іншого боку $x = \pm\frac{a^2}{c}$. З цих двох рівнянь знаходимо квадрат великої півосі: $a^2 = \frac{c\,d}{2} = \frac{2\cdot 5}{2} = 5$ і аналогічно до попередніх випадків $b^2 = 5-4 = 1$. Одержуємо наступне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

4. Нам відома відстань між директрисами $d = 32$ та ексцентриситет еліпса $\varepsilon = 0,5$. З рівнянь директрис $x = \pm\frac{d}{2}$ і $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ знаходимо велику піввісь: $a = \frac{\varepsilon\,d}{2} = \frac{0,5\cdot 32}{2} = 8$. Підставляючи значення $a = 8$ у формулу $\varepsilon = \frac{c}{a}$, знаходимо $c = \varepsilon\,a = 0,5\cdot 8 = 4$, а знаючи його, легко обчислюємо значення малої півосі: $b^2 = a^2 - c^2 = 8^2 - 4^2 = 48$. В цьому випадку рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дано еліпс, канонічне рівняння якого має вигляд $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Знайти координати його фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис. Зробити малюнок.

Відповідь: $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, $\varepsilon = 0,8$, $x = \pm 25/4$.

2. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:
а) його півосі відповідно дорівнюють 4 і 2;
б) відстань між фокусами рівна $2c = 6$, а більша вісь $2a = 10$;
в) більша вісь $2a = 20$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,8$;
г) менша вісь $2b = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}/2$;
д) сума осей дорівнює 16, а відстань між фокусами $2c = 8$;
е) відстань між фокусами $2c = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$.

Відповідь: а) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, б) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, в) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$, г) $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, д) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, е) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

3. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{2y^2}{5} = 1$, паралельних прямій $3x + 2y + 7 = 0$.

Відповідь: $3x + 2y - 10 = 0$ і $3x + 2y + 10 = 0$.

4.3. Гіпербола

Гіперболою називають геометричне місце точок, різниця відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала

$2a$ $(0 < 2a < F_1F_2)$. Тобто, для будь-якої точки M виконується умова $|F_1M - F_2M| = 2a$.

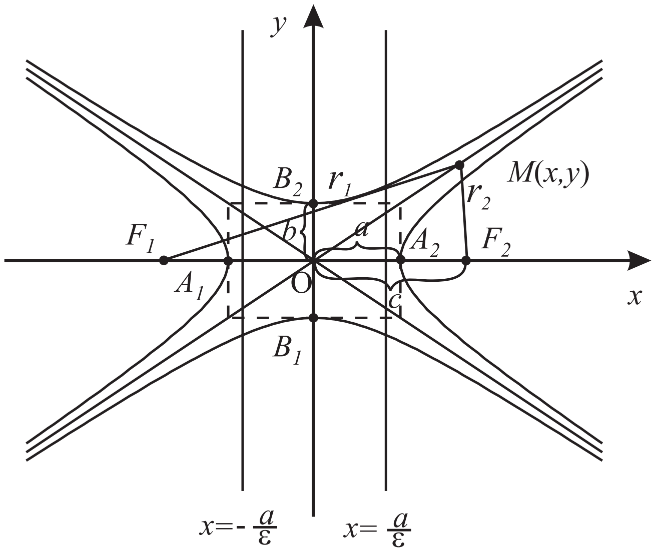

Рис. 4.5.

Канонічне рівняння гіперболи (див. рис. 4.5) має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{4.8}$$

Параметри $2a$, $2b$ – називаються **дійсною і уявною осями гіперболи** (4.8); a, b – її півосі; точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ – **вершини**, Ox і Oy – **дійсна і уявна** осі симетрії, $O(0, 0)$ – **центр гіперболи**.

Прямі $y = \pm\dfrac{b}{a}\,x$ називаються **асимптотами гіперболи**.

Точки $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, – **фокуси гіперболи**. Відстань між фокусами дорівнює $2c$. Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 + b^2/a^2}$ називається **ексцентриситет гіперболи** $(1 < \varepsilon < \infty)$. Відстані r_1 та r_2 від точки $M(x, y)$ гіперболи до її фокусів називаються **фокальними радіусами цієї точки** і визначаються за формулами:

$$r_1 = ex - a, \quad r_2 = ex + a,$$

за умови, що точка $M(x, y)$ лежить на правій вітці гіперболи.

Прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються **директрисами гіперболи**.

Гіпербола, для якої $a = b$, називається **рівносторонньою**, її рівняння $x^2 - y^2 = a^2$, а рівняння асимптот має вигляд $y = \pm x$.

Гіпербола, рівняння якої має вигляд

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \tag{4.9}$$

називаються **спряженою з гіперболою** (4.8). Її вершини знаходяться в точках $B_1(0,-b)$ і $B_2(0,b)$ на осі Oy, асимптоти співпадають з асимптотами гіперболи (4.8), $\varepsilon = c/b$ (див. рис. 4.5).

Дотична до гіперболи (4.8) у точці $M_0(x_0, y_0)$ визначається рівнянням

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Рівняння гіперболи з центром у точці $C_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{4.10}$$

а рівняння її асимптот

$$y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0). \tag{4.11}$$

4.4. Парабола

Параболою називають геометричне місце точок площини, що знаходяться на однаковій відстані від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

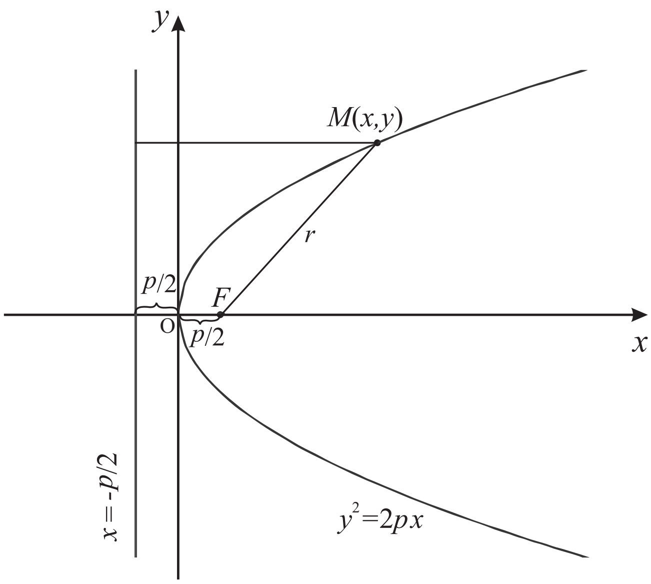

Рис. 4.6.

Є два вигляди **канонічного** рівняння параболи:

$$y^2 = 2px \tag{4.12}$$

– парабола симетрична відносно осі Ox (рис. 4.6), $p > 0$ – параметр параболи;

$$x^2 = 2py \tag{4.13}$$

– парабола симетрична відносно осі Oy.

В обидвох випадках **вершина** параболи, тобто точка $O(0,0)$, яка лежить на **осі симетрії** Ox (Oy), знаходиться в початку координат.

Парабола (4.12) має **фокус** $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ і **директрису** $x=-\frac{p}{2}$; **фокальний радіус-вектор точки** $M(x,y)$ параболи визначається рівністю $r=x+\frac{p}{2}$.

Парабола (4.13) має **фокус** $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ і **директрису** $y=-\frac{p}{2}$; **фокальний радіус-вектор точки** $M(x,y)$ параболи визначається рівністю $r=y+\frac{p}{2}$.

Ексцентриситет параболи $\varepsilon=1$.

Дотична до параболи $y^2=2px$ у точці $M_0(x_0,y_0)$ визначається рівністю $yy_0=p(x+x_0)$.

Рівняння параболи з вершиною у точці $C_0(x_0,y_0)$ має вигляд $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.

5. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

5.1. Дійсні числа

Абсолютною величиною (модулем) дійсного числа x є невід'ємне число $|x|$, яке визначається за формулою

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x\geqslant 0,\\ -x, & \text{якщо} \quad x<0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Властивості модуля дійсного числа:
1) $a=b\Rightarrow |a|=|b|$; 2) $|x|\geqslant x$; 3) $|x|=|-x|$;
4) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$; 5) $|x-y|\geqslant |x|-|y|$;
6) $|x\cdot y|=|x|+|y|$; 7) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}, y\neq 0$;
8) $|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$; 9) $|x|\geqslant a\Leftrightarrow x\geqslant a$, $x\leqslant -a$.

Під **множиною** розуміють сукупність (сімейство, набір, зібрання) деяких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою чи властивістю. Об'єкти, з яких складається множина, є її **елементами**. Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x\in X$. Запис $x\bar{\in}X$ означає, що елемент x не належить множині X.

Множина, елементами якої є числа, називається **числовою**.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, є **скінченною**, а множина, яка містить нескінченну кількість елементів, є **нескінченною**. Множина, яка не містить жодного елемента, називається **порожньою** і позначається $\varnothing$.

Множина C, яка містить елементи, кожен з яких належить множині A або B, є **об'єднанням (сумою) множин** A і B: $C=A\cup B$.

Множина D, що складається з елементів, кожний з яких належить одночасно множинам A і B, є **перерізом (добутком) множин** A і B: $D = A \cap B$.

Множина E, що складається з елементів, кожний з яких належить множині A і не належить множині B, є **різницею множин** A і B: $E = A \setminus B$.

5.2. Функція

5.2.1. Функція. Найпростіші властивості функції

Якщо кожному числу x з множини D за певним правилом поставлено у відповідність єдине число y, то y є функцією від x і позначається $y = f(x)$, $x \in D$.

Змінна x є **незалежною змінною** або **аргументом**, а змінна y – **залежною змінною**, або **функцією**.

Множина D значень x, для яких функція $y = f(x)$ має дійсний зміст, називається **областю визначення** цієї функції.

Множина E всіх чисел y, таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in D$, є **множиною значень** функції.

Функція $f(x)$ є **парною**, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D$ і **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D$.

Функція $f(x)$, яка визначена на всій числовій прямій, є **періодичною**, якщо $f(x+T) = f(x)$. Число T називається **періодом функції**. Якщо T – період функції, то її періодом також є числа kT, де $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Найменше з додатних чисел T є **основним періодом функції**.

Якщо функція $f(x)$ визначена на множині D і для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу з цієї множини при умові $x_1 < x_2$ маємо:

1) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція є **зростаючою**;

2) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція є **спадною**;

3) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функція є **неспадною**;

4) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функція є **незростаючою**.

Зростаючі, незростаючі, спадні і неспадні функції на множині D називаються **монотонними** на цій множині.

Функція $f(x)$, визначена на множині D, є **обмеженою** на цій множині, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in D$ виконується умова $|f(x)| \leqslant M$.

Якщо для функцій $f(x)$ і $g(x)$, які визначені на множині D, існує таке число N, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| \leqslant N$ або $|g(x)| \geqslant N$, то $f(x)$ є **обмеженою зверху**, а $g(x)$ – **обмеженою знизу** функцією.

Якщо рівняння $F(x, y) = 0$, яке не розв'язане відносно y, визначає y як функцію x, то y є **неявною** функцією x.

Функція $x = \varphi(y)$ є **оберненою** до функції $y = f(x)$, якщо:

1) областю визначення функції φ є множина значень функції f;

2) множина значень функції φ є областю визначення функції f;

3) кожному значенню змінної $y \in E$ відповідає єдине значення змінної $x \in D$.

Функція $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in E$ має обернену функцію $x = \varphi(y)$ тоді і тільки тоді, коли вона є строго монотонною в області D.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ однієї незалежної змінної t, які визначенні на одному й тому самому проміжку, є параметричним заданням функцій; змінна t при цьому називається **параметром**.

Якщо функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \Phi(x)$, то змінну y можна розглядати як складену функцію від x: $y = \varphi(\Phi(x))$.

Найпростішими **елементарними функціями** є:

1) степенева $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$;

2) показникова $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

3) логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометричні: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

5) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

5.3. Границя

5.3.1. Послідовність. Границя послідовності

Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

називають **числовою послідовністю** і позначають символом $\{x_n\}$, де x_1, x_2, ..., x_n – члени або елементи послідовності, x_n – загальний член послідовності.

Число x_0 є **границею послідовності** $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

Якщо x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, то пишуть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Послідовність, яка має границю називається **збіжною**, в протилежному випадку – **розбіжною**.

5.3.2. Границя функції. Обчислення границь

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A називається **границею функції** $f(x)$ **в точці** x_0 (пишуть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує залежне від ε число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - x_0| < \delta$.

Аналогічно, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$, якщо для всякого числа $\varepsilon > 0$ існує залежне від ε число Nтаке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N$.

Якщо $x \to x_0$ і при цьому $x < x_0$, то пишуть $x \to x_0 - 0$; аналогічно, якщо $x \to x_0$ і при цьому $x > x_0$, то пишуть $x \to x_0 + 0$. Числа $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ і $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ називаються відповідно **границею зліва функції** $f(x)$ **в точці** x_0 і **границею справа функції** $f(x)$ **в точці** x_0. Для існування границі функції $f(x)$ при $x \to x_0$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. Замість $x \to 0 - 0$ і $x \to 0 + 0$ пишуть $x \to -0$ і $x \to +0$ відповідно.

Ліва і права границі функції називаються **односторонніми границями**.

Властивості границь.

1) Границя постійної рівна самій постійній: $\lim c = c$, $c = \mathrm{const}$.

2) Якщо кожна з функцій $u(x)$ та $v(x)$ має скінченну границю при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то справедливі формули:

а) $\lim cu = c \lim u$;

б) $\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v$;

в) $\lim(u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v$;

г) $\lim \dfrac{u}{v} = \dfrac{\lim u}{\lim v}$, $\lim v \neq 0$.

Наслідки:

1) $\lim u^n = [\lim u]^n$, зокрема,

2) $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, $n \in N$.

Якщо для будь-якого як завгодно великого числа N існує таке число $\delta(N)$, що при $0 < |x - x_0| < \delta(N)$ виконується нерівність $|f(x)| > N$, то функція $y = f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \to x_0$ $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty)$. Аналогічно визначається нескінченно велика $f(x)$ при $x \to \infty$.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що при $0 < |x - x_0| < \delta$ справедлива нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$, то $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою функцією при** $x \to x_0$. Аналогічно визначається нескінченно мала $\alpha(x)$ при $x \to \infty$.

Деякі властивості нескінченно малих величин:

1) якщо при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ $\alpha(x)$ – нескінченно мала, а $f(x)$ – нескінченно велика величина, то при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ і $\dfrac{1}{f(x)}$ – відповідно нескінченно велика і нескінченно мала величини;

2) сума скінченого числа нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною;

3) добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою величиною;

4) частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є нескінченно малою величиною.

Порівняння нескінченно малих функцій.

Нехай при $x \to x_0$ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими функціями. Тоді:

I. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = C$, $C \neq 0$, то α і β є **нескінченно малими одного порядку**; якщо $C = 0$, то α є **нескінченно малою вищого порядку ніж** β.

II. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta^k} = A \neq 0$, $A \in R$, то α називається **нескінченно малою** k**-го порядку відносно** β.

III. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то α і β називаються **еквівалентними нескінченно малими**. Еквівалентність записується так: $\alpha \sim \beta$.

Границя відношення нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to x_0$ рівна границі відношення еквівалентних їм нескінченно малих функцій $\alpha^*(x)$ і $\beta^*(x)$ при $x \to x_0$, тобто справедливі граничні рівності:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha^*}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta^*} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

Часто зустрічаються наступні еквівалентні нескінченно малі величини при $x \to 0$:

$$\begin{array}{ll}
\sin x \sim x; & e^x - 1 \sim x; \\
\operatorname{tg} x \sim x; & a^x - 1 \sim x \ln a; \\
\arcsin x \sim x; & \log_a(1+x) \sim x \log_a e; \\
\operatorname{arctg} x \sim x; & \ln(1+x) \sim x; \\
1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}; & (1+x)^k - 1 \sim kx,\ k > 0.
\end{array}$$

При обчисленні границь широко використовуються такі границі:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ – **перша важлива границя**. За її допомогою розкривають невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$, задану виразами, що містять тригонометричні функції.

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2,71828\ldots$ – **друга важлива границя**, її використовують при розкритті невизначеності виду 1^∞.

5.3.3. Неперервність функції. Точки розриву

Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0, якщо:

1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і деякому її околі;

2) існує скінчена границя функції $f(x)$ в точці x_0: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$;

3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 рівна значенню функції в цій точці x_0, тобто
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.2}$$

Точка x_0, в якій не виконується хоча б одна з умов неперервності функції $y = f(x)$, називається **точкою розриву функції**. Якщо в точці x_0 існують скінчені границі $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$, такі, що $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 називається **неусувною точкою розриву першого роду**. Зокрема, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то x_0 є **усувною точкою розриву першого роду**. Якщо ж хоча б одна з односторонніх границь $f(x_0 - 0)$ або $f(x_0 + 0)$ не існує або дорівнює нескінченності, точку x_0 називають **точкою розриву другого роду**.

Функція, неперервна у всіх точках деякої області, називається **неперервною в цій області**.

6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1. Похідна

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя
$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}, \tag{6.1}$$
де $\triangle x$ – приріст аргументу, а $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$ – приріст функції.

Якщо ця границя є скінченою, то функція $f(x)$ називається **диференційовною** в точці x; при цьому вона є обов'язково і неперервною в цій точці.

Похідну позначають y' або $f'(x)$, або $\dfrac{dy}{dx}$, або $\dfrac{df(x)}{dx}$.

6.1.1. Основні правила диференціювання

Якщо C – стала величина, а $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – деякі диференційовні функції від x, то справедливі наступні правила диференціювання:

1) $C' = 0$, $x' = 1$;

2) $(C_1 u \pm C_2 v)' = (C_1 u)' \pm (C_2 v)' = C_1 u' \pm C_2 v'$;

3) $(uv)' = u'v + uv'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2}$;

5) якщо $y = f(u)$, $u = u(x)$, тобто $y = f(u(x))$ – складена функція, то
$$y'_x = y'_u\, u'_x, \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx};$$

6) якщо для функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$, то $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$;

7) якщо функцію задано параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$;

8) якщо функцію задано в неявній формі $F(x, y) = 0$, то для знаходження похідної $dy/dx = y'$ потрібно продиференціювати за змінною x обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x: $dF(x, y)/dx = 0$. З цього рівняння знаходимо y';

9) нехай задано показниково-степеневу функцію виду $y = u^v$. Прологарифмуємо її за основою e: $\ln y = v \ln u$. Після диференціювання обох частин рівності дістанемо

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}.$$

Звідси

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

6.1.2. Таблиця похідних

1. $(u^a)' = au^{a-1}u'$.

2. $(\sqrt[n]{u^m})' = \dfrac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{m-n}}}$.

3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.

4. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

5. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

6.$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

8. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.

9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

11. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

12. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

14. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.

15. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.

16. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$.

17. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$.

6.1.3. Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається **похідною першого порядку** і являє собою деяку нову функцію, яка теж може мати похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається **похідною другого порядку від функції** $y = f(x)$ і позначається $y'' = (y')'$, $f''(x) = (f'(x))'$ або $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Аналогічно визначається **похідна третього порядку**: $y''' = (y'')'$, $f'''(x) = (f''(x))'$ або $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$.

Першу похідну від похідної $(n-1)$-го порядку $(y^{(n-1)})'$ називають **похідною n-го порядку**: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ або $\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$.

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають похідні до n-го порядку включно, то справедлива формула Лейбніца

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}. \qquad (6.2)$$

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівністю $F(x, y) = 0$. Диференціюючи цю рівність за змінною x і розв'язуючи одержане рівняння відносно y', знаходимо першу похідну. Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати по x першу похідну і в одержане співвідношення підставити її значення. Продовжуючи диференціювання, можна знайти одна за одною послідовно похідні будь-якого порядку.

Для функцій заданих параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ похідні можна знайти за формулами

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}; \quad \ldots \quad \frac{d^ny}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t \frac{1}{x'_t}.$$

6.2. Диференціал

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається головна частина її приросту, лінійна відносно приросту аргументу Δx

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (6.3)$$

Диференціал dy називають також **диференціалом першого порядку**.

Оскільки $dx = \Delta x$, то формулу (6.3) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (6.4)$$

При досить малих значеннях Δx справджується наближена рівність $\Delta y \approx dy$. Звідси дістаємо формулу для наближеного обчислення значення функції

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (6.5)$$

6.2.1. Основні властивості диференціала

1) $dC = 0$, $C = \text{const}$;
2) $d(C_1u \pm C_2v) = d(C_1u) \pm d(C_2v) = C_1du \pm C_2dv$;
3) $d(uv) = udv + vdu$;
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $d\left(\dfrac{C}{v}\right) = -\dfrac{C}{v^2}dv$;
5) якщо $y = f(u)$, $u = u(x)$, тобто $y = f(u(x))$ – складена функція, причому функції $f(u)$, $u(x)$ диференційовні в точках u і x. Тоді існує похідна $y'_x = y'_u\, u'_x$, а отже, і диференціал

$$dy = y'_x dx = y'_u\, u'_x dx = y'_u\, du \tag{6.6}$$

6.2.2. Диференціали вищих порядків

Диференціалом другого порядку, називається диференціал від першого диференціала:

$$d^2y = d(dy).$$

Оскільки dx не залежить від x, то при диференціюванні першого диференціала dx можна винести за знак похідної, тому

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'_x dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2. \tag{6.7}$$

Тут dx розглядається як один символ, тому $(dx)^n = dx^n$.

Диференціалом третього порядку d^3y, називається диференціал від другого диференціала:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3. \tag{6.8}$$

Диференціалом n-го порядку d^ny, називається диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{6.9}$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – Київ: Знання, 2007. – 454 с.

2. Бабич М.Д., Куприков С І. Вища математика: Ч. 1. – Київ: Київський славістичний університет, 2003, - 64 с.

3. Призва Г.Н., Плахотник В.В., Гординський Л.Д. та ін. Вища математика: Підручник: у 2 ч. Ч. 1: Основні розділи – Київ: Либідь, 2003 – 400 с.

4. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. посібник. – Київ: КНЕУ, 2001. – 546 с.

5. Барковський В.В., Барковська Н.В. Матиматика для економістів. Вища математика. – Київ: Національна академія управління, 1999. – 399 с.

6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – Київ: Вища школа, 1993. – 648 с.

7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач. – Київ: Видавництво А.С.К., 2003. – 480 с.

8. Гаврильченко Х.І., Полушкін С.П., Кропив'янський П.С. та ін. Вища математика: Збірник задач: У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. – Київ: Техніка, 2004. – 279 с.