

УДК 539.12

PACS number(s): 03.65.Ge, 03.65.Pm

МЕТОД ВКБ І РЕЛЯТИВІСТИЧНІ ПОТЕНЦІАЛЬНІ МОДЕЛІ

В. Рубіш, В. Лазур, М. Меліка

*Ужгородський національний університет
вул. Волошина 32, 88000, Ужгород, Україна
e-mail: vrubish@univ.uzhgorod.ua
e-mail: lazur@univ.uzhgorod.ua*

На підставі діраківського підходу розвинуто релятивістську версію методу ВКБ для центрально-симетричного потенціалу зі змішаною лоренц-структурою. Знайдено релятивістичні хвильові функції, отримано нову умову квантування, яка містить спін-орбітальну взаємодію. Це дає змогу визначати як положення енергетичних рівнів водневоподібних кваркових систем, так і їхні ширини.

Ключові слова: потенціальні моделі, кварки, потенціал, квазіімпульс.

Релятивістський опис зв'язаних станів завжди був важливим завданням ядерної фізики та фізики елементарних частинок. Особливо актуальним це завдання стало у зв'язку з бурхливим розвитком кваркової фізики, у якій релятивістські властивості легких кварків відіграють важливу роль. Наш світ переважно складається з легких кварків u та d (протони - uud , та нейтрони - udd), а не з важких.

Засновану на принципах квантової теорії поля квантову хромодинаміку (КХД) справедливо вважають найпоспідовнішим підходом до вирішення цієї проблеми. Однак стандартна пертурбативна КХД дає досить надійні рецепти обчислення тих чи інших характеристик тільки для опису так званих жорстких процесів, які мають великі передані імпульси, і не дає змоги обчислювати характеристики, визначені м'якими процесами (спектр мас, конфайнмент кварків, ширини розпадів гадронів). Конфайнмент є наслідком того, що, на відміну від квантової електродинаміки, у якій переносники взаємодії фотони, є електро нейтральними, обмінні частинки в квантовій хромодинаміці - глюони - мають не нульовий кольоровий заряд і тому можуть взаємодіяти між собою. На жаль, конфайнмент - це явище, яке не вкладається в рамки теорії збурень. Унаслідок цього нині із принципів квантової хромодинаміки неможливо повністю визначити структуру міжкваркових сил.

Хоча б частково цю проблему можна вирішити в рамках потенціальних (релятивістських) моделей (ПМ), одною з головних переваг яких є їхня відносна простота. В ПМ глюонний обмін між кварками апроксимований потенціалом взаємодії. Нерелятивістська ПМ дає дуже добрий опис характеристик важких кварконіїв, незважаючи на відсутність чіткого теоретичного обґрунтування. Однак актуальним є вивчення релятивістських властивостей, зокрема, ефектів,

зумовлених спінами кварків, що дає змогу уточнити, як вид конфайментної частини потенціалу, так і його лоренц-структуру. Саме вивчення цих проблем і є нашою метою.

У праці [1] зроблено спробу дати релятивістським ПМ теоретичне обґрунтування (хоча і воно не є докінця послідовним). Тут, на основі функції Лагранжа КХД, яка включає збурені і незбурені ефекти, побудовано функцію Гріна для системи, що складається з важкого антикварка (кварка) Q (з масою m_2) і легкого кварка (антикварка) q набагато меншої маси m_1 , і з'ясовано, що вона задовольняє одночастинкове рівняння Дірака. Надалі розглядатимемо саме такі системи в рамках діраківського підходу. В КХД такі кваркові системи є аналогами атома водню і тому їхнє вивчення має фундаментальне значення. З теоретичного погляду водневоподібні кваркові системи цікаві з декількох причин:

по-перше, в границі нескінченно важкого кварка з'являється можливість вивчення динаміки легкого кварка в зовнішньому полі важкого кварка. Це подібно до картини атома водню;

по-друге, оскільки зовнішнє поле не залежить від часу, то можна сподіватися на отримання в рамках КХД статичного потенціалу взаємодії між кварками разом зі спин-залежними доданками;

по-третє, використовуючи рівняння Дірака, ми задіємо явну релятивістську динаміку й можемо вивчати релятивістські властивості спектра і також релятивістське спінове розчеплення енергетичних рівнів.

Однак аналітичне вирішення цього питання можливе тільки для вузького кола ідеалізованих задач. Тому актуальним сьогодні є також розробка і вдосконалення методів наближеного знаходження власних значень і власних функцій реальних систем.

Квазікласичне наближення, або метод ВКБ – один з найефективніших наближених методів квантової механіки і теоретичної фізики. На відміну від теорії збурень, це наближення не пов'язане з малістю взаємодії і тому має ширшу галузь застосування. Ми розвинули, і застосували релятивістську версію методу ВКБ до теоретичного опису низькоенергетичних властивостей гадронних систем, який є незавершеним сьогодні.

Метод ВКБ для центральних потенціалів. Як і багато авторів, ми вважаємо, що потенціал взаємодії між кварками має змішану лоренц-структуру, тобто він є сумішшю векторної (четверта компонента 4-вектора енергії-імпульсу) $V(r)$ і скалярної- $S(r)$ частини:

$$U(r) = V(r) + S(r). \quad (1)$$

У праці [1] доведено, що саме суперпозиція векторної та скалярної частин потенціалу дає розумний енергетичний спектр. Для короткодійної частини – вектора й утримувальної частини потенціалу – скаляра з'ясовано, що в рівняння Дірака лише дискретний спектр. У випадку, коли обидві частини мають векторний характер, всі розв'язки рівняння Дірака є квазістаціонарними, а у випадку, коли потенціал повністю скалярний, порушується точна кіральна симетрія і стани з протележними парностями невироджені.

З урахуванням сферичної симетрії потенціалу розв'язки одночастинкового рівняння Дірака шукаємо у вигляді

$$\Psi = r^{-1} \begin{pmatrix} G(r)\Omega_{j'lM} \\ iF(r)\Omega_{j'l'M} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де $l+l' = 2j$, Ω – сферичні спінори.

Радіальна частина цих хвильових функцій задовольняє рівняння

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG}{dr} + \frac{k}{r}G - \frac{1}{\hbar c} \left[(E - V(r)) + (mc^2 + S(r)) \right] F &= 0, \\ \frac{dF}{dr} - \frac{k}{r}G + \frac{1}{\hbar c} \left[(E - V(r)) - (mc^2 + S(r)) \right] G &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

де E та m – відповідно, повна енергія і маса легкого кварка (антикварка), і

$$k = \begin{cases} -(l+1), & l = l+1/2, \\ l, & l = l-1/2, \end{cases} \quad (4)$$

причому $|k| = j + 1/2 = 1, 2, \dots$

На жаль, рівняння (2) з потенціалами, які вважають більше або менше КХД-мотивованими, аналітичних розв'язків не має. Тому для їхнього знаходження доводиться використовувати наближенні методи. Для відшукування квазікласичних розв'язків системи (2) перепишемо її у матричному вигляді (як це зроблено в [2], ввівши позначення $\tilde{k} = \hbar k$

$$\Psi' = \frac{1}{\hbar c} D\Psi, \quad \Psi = \begin{Bmatrix} G \\ F \end{Bmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -\tilde{k}cr^{-1} & (E - V(r)) + (mc^2 + S(r)) \\ -(E - V(r)) - (mc^2 + S(r)) & \tilde{k}cr^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Розв'язок цієї системи будемо шукати у вигляді формальних рядів

$$\Psi = \exp \left[\int^r y dr \right] \varphi(r); \quad (6)$$

$$y(r) = \frac{1}{\hbar} y_{-1}(r) + y_0(r) + \hbar y_1(r) + \hbar^2 y_2(r) + \dots, \quad \varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \varphi_n(r), \quad (7)$$

де φ і φ_n – двокомпонентні величини (верхня компонента відповідає радіальній функції G , нижня – F),

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} \varphi_n^G \\ \varphi_n^F \end{pmatrix}.$$

Підставляючи ці вирази в (2) і прирівнюючи до нуля коефіцієнти з однаковими степенями \hbar , отримаємо рекурентну систему рівнянь для невідомих $y_n(r)$, $\varphi_n(r)$:

$$(D - y_{-1})\varphi_n = 0; \quad (8)$$

$$(D - y_{-1})\varphi_1 = \varphi'_0 + y_0\varphi_0;$$

.....

$$(D - y_{-1})\varphi_{n+1} = \varphi'_n + \sum_{k=0}^n y_{n-k}\varphi_k. \quad (9)$$

Розглянемо перше рівняння. Із (8) випливає, що y_{-1} – власне значення, а

$\varphi_0 \equiv \varphi_i$ – один із власних векторів матриці $D(r)$:

$$y_{-1} = \pm \sqrt{(mc^2 + S)^2 - (E - V)^2 + \frac{c^2 \tilde{k}^2}{r^2}} = \pm q = \lambda_i; \quad (10)$$

$$\varphi_i = A_1 \begin{pmatrix} (E - V) - (mc^2 + S) \\ c\tilde{k}r^{-1} + \lambda_i \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} \lambda_i - c\tilde{k}r^{-1} \\ (mc^2 + S) - (E - V) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

тут індекс $i = \pm$; A_1, A_2 – нормувальні множники, які ми зафіксуємо пізніше.

Через те, що матриця $D(r)$ є несиметричною, її ліві власні вектори $\tilde{\varphi}_i$ не збігаються з правими власними векторами φ_i . Аналогічно для лівих векторів можна отримати

$$\tilde{\varphi}_i (D - \lambda_i) = 0; \quad \tilde{\varphi}_i \neq \varphi_i^T; \quad (12)$$

$$\tilde{\varphi}_i = B_1 \left((mc^2 + S) - (E - V), c\tilde{k}r^{-1} + \lambda_i \right) = B_2 \left(\lambda_i - c\tilde{k}r^{-1}, (mc^2 + S) + (E - V) \right) \quad (13)$$

Як видно, ліві і праві власні вектори взаємно ортогональні:

$$(\tilde{\varphi}_i, \varphi_j) = \delta_{ij} \cdot const.$$

Для знаходження y_0 візьмемо перше з рівнянь (9) і приймемо в ньому $\varphi_0 = \varphi_i$ домножимо ліву й праву частину цього рівняння зліва на $\tilde{\varphi}_i$. Тоді за (12) ліва частина отриманої рівності дорівнює нулю, і ми отримуємо співвідношення для $y_0(r)$:

$$y_0(r) = - \frac{(\tilde{\varphi}_i, \varphi_i')}{(\tilde{\varphi}_i, \varphi_i)}, \quad (14)$$

тут штрих означає похідну за r .

Підбираємо коефіцієнти A_1, A_2, B_1, B_2 так, щоб виконувалась умова

$$(\tilde{\varphi}_i, \varphi_i') = (\tilde{\varphi}_i', \varphi_i). \quad (15)$$

Тоді

$$\int y_0 dr = \ln [(\tilde{\varphi}_i, \varphi_i)^{-1/2}],$$

і в результаті отримуємо вираз для релятивістської хвильової функції

$$\Psi = \varphi_i (\tilde{\varphi}_i, \varphi_i)^{-1/2} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int^r \lambda_i dr \right], \quad (16)$$

що аналогічний звичайному виразу для квазікласичної хвильової функції в нерелятивістській квантовій механіці

$$\Psi \propto p^{-1/2} \exp \left[\pm i \int^r p dr \right]. \quad (17)$$

Аналогічно можна визначити і такі члени: y_1, φ_1, \dots у розкладі (7), що дало б змогу побудувати асимптотичний ряд. Однак ми обмежимося знайденими членами, оскільки врахування поправок порядку \hbar, \hbar^2 і так далі, як звичайно не

поліпшує узгодження методу ВКБ з точним розв'язком. Причина цього, як відомо [3], [4], полягає в тому, що формальний ряд за степенями \hbar – не збіжний, а тільки асимптотичний.

Умову (15) завжди легко задовольнити. Підставляючи в (15) вирази (11) і (13), отримуємо рівняння

$$\frac{A_1 B_1' - A_1' B_1}{A_1 B_1} = - \frac{(mc^2 + S)Y' + (E - V)S'}{q(q \pm c\tilde{k}r^{-1})},$$

звідки

$$\Psi = \begin{Bmatrix} G \\ F \end{Bmatrix} = \left[2q \left(q \pm \frac{c\tilde{k}}{r} \right) \right]^{-1/2} \exp \left\{ \pm \frac{1}{\hbar} \int^r q dr + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int^r \frac{(mc^2 + S)Y' + (E - V)S'}{q(q \pm c\tilde{k}r^{-1})} dr \right\} \begin{Bmatrix} (E - V) + (mc^2 + S) \\ c\tilde{k}r^{-1} \pm q \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

Використання другої форми запису власних векторів ϕ_i і $\tilde{\phi}_i$ (з множниками A_2, B_2 в (11) і (13)) приводить після аналогічних обчислень до такого результату:

$$\Psi = \begin{Bmatrix} G \\ F \end{Bmatrix} = \left[2q \left(q \mp \frac{c\tilde{k}}{r} \right) \right]^{-1/2} \exp \left\{ \pm \frac{1}{\hbar} \int^r q dr - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int^r \frac{(mc^2 + S)Y' + (E - V)S'}{q(q \mp c\tilde{k}r^{-1})} dr \right\} \begin{Bmatrix} \pm q - c\tilde{k}r^{-1} \\ (mc^2 + S) - (E - V) \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Як видно з формул, q збігається (з точністю до i) з імпульсом класичної частинки $p = iq$. Знаки $+$ ($-$) в (18) і (19) відповідають розв'язку, що зростає (загасає) зі збільшенням r . Для загасального розв'язку (знак $-$) треба використовувати формулу (18) при $\tilde{k} < 0$ і формулу (19) при $\tilde{k} > 0$, для розв'язку, що зростає, навпаки. Вибір зручної форми запису розв'язків визначений тим, щоб величина $Q_{\pm} = q \pm \tilde{k}/r$ була додатною в підбар'єрній області. У цьому разі отримувані формули для G і F , вільні від сингулярностей і мають такий вигляд:

$$G = \left[\frac{mc^2 + S + E - V}{2q} \right]^{1/2} \exp \left\{ \pm \int^r \left(\frac{1}{\hbar} q - \frac{c\tilde{k}\omega}{qr} \right) dr \right\}, \quad (20)$$

$$F = \text{sgn } \tilde{k} \cdot \left[\frac{mc^2 + S - E + V}{2q} \right]^{1/2} \exp \left\{ \pm \int^r \left(\frac{1}{\hbar} q - \frac{c\tilde{k}\tilde{\omega}}{qr} \right) dr \right\}, \quad (21)$$

де введено такі позначення

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{V' - S'}{mc^2 + S + E - V} - \frac{1}{r} \right); \quad (22)$$

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{V' + S'}{mc^2 + S - E + V} + \frac{1}{r} \right).$$

Хвильові функції легкого кварка (антикварка) в класично дозволеній області. У разі розгляду кваркових систем нас цікавить (через утримання кварків) лише класично дозволена область ($r_3 < r < r_4$, $q^2 < 0$), тобто лише дискретний енергетичний спектр. Тут r_1, r_2, r_3, r_4 – точки поворотання ($q = 0$). В цій області хвильові функції (20) та (21) мають вигляд

$$G = C_1 \left[\frac{mc^2 + S + E - V}{2p} \right]^{1/2} \sin \Theta_1, \quad (23)$$

$$F = C_1 \operatorname{sgn} \tilde{k} \left[\frac{mc^2 + S - E + V}{2p} \right]^{1/2} \sin \Theta_2,$$

де

$$p(r) = \left[(E - V)^2 - (mc^2 + S)^2 - c^2 \tilde{k}^2 r^{-2} \right]^{1/2} \quad (24)$$

- квазікласичний імпульс частинки; C_1 – стала нормування;

$$\Theta_1 = \int_{r_0}^r \left(p + \frac{c\tilde{k}\omega}{pr} \right) dr + \frac{\pi}{4}; \quad (25)$$

$$\Theta_2 = \int_{r_0}^r \left(p + \frac{c\tilde{k}\tilde{\omega}}{pr} \right) dr + \frac{\pi}{4}.$$

Як застосування отриманих формул запишемо рівняння, яке визначає положення і ширину квазістаціонарних рівнів у нижньому континіумі. Дійсна частина енергії визначена з правила квантування:

$$\int_{r_0}^r \left(p + \frac{c\tilde{k}\omega}{pr} \right) dr = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (26)$$

де $n_r = 0, 1, 2, \dots$ – радіальне квантове число. Це правило квантування відрізняється від звичайного правила квантування Бора-Зоммерфельда релятивістським виразом для імпульсу $p(r)$ і тим, що містить поправки, які враховують спин-орбітальну взаємодію. Рівняння (26) визначає дійсну частину E_r енергії рівня: $E_{njlm} = E_r$.

Опис енергетичного спектра кваркових систем з корнелльським потенціалом. Сьогодні вважають достовірним той факт, що короткодіюча частина потенціалу (зумовлена одноглюонним обміном) міжкваркової взаємодії при перетвореннях Лоренца трансформується як чистий вектор. Що ж стосується

трансформаційних властивостей конфайментної частини потенціалу (як вважають, зумовленої багатоглюонним обміном), то тут поки що остаточної відповіді немає. Спочатку вважали, що конфайментна частина потенціалу є чисто векторною [1], однак подальші дослідження наводять багатьох авторів на думку, що вона є сумішшю вектора і скаляра [5]. Однак, для спрощення наших розрахунків ми будемо вважати конфайментну частину потенціалу чисто скалярною (у [6] доведено, що векторна домішка становить до 30 %).

Що ж стосується конкретного вигляду векторної та скалярної частин потенціалу, то більшість авторів вибирають їх у вигляді корнелльського потенціалу (проте це не єдина можливість). Ми схилиємося до вибору такого виду потенціалу ще й тому, що у попередніх працях [7] з ним отримано добрий опис спіну-усередненого спектра мас як легких, так і важких кваркових систем, до того ж він записаний у дуже простій формі, що значно полегшує подальші розрахунки. Отже, маємо

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = \frac{4}{3}\alpha_s; \quad (27)$$

$$S(r) = ar, \quad (28)$$

де $a = 0.18 \text{ Гев}^2$, α_s – стала сильної взаємодії, визначена з формули асимптотичної вільності

$$\alpha_s(r) = \frac{12\pi}{33-2N} \frac{1}{\ln\left(1/(\tilde{\Lambda}r)^2\right)}, \quad (29)$$

де $\tilde{\Lambda} = 0.14 \text{ Гев}$ – параметер КХД, N – кількість ароматів кварків. Тоді з урахуванням зазначеного вище квазіімпульс (24) набуває вигляду

$$p(r) = \left[\left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 - (mc^2 + ar)^2 - c^2 \tilde{k}^2 / r^2 \right]^{1/2}. \quad (30)$$

Для відшукування точок повороту прирівняємо квазіімпульс до нуля і при малих r знехтуємо конфайментною частиною потенціалу $S(r)$ в (30), за великих значень r короткодіючою частиною потенціалу $V(r)$. У результаті отримаємо чотири розв'язки для рівняння $p = 0$:

$$r_{1,2} = -\frac{mc^2 \pm E}{ac^2}, \quad (31)$$

$$r_{3,4} = \frac{E\alpha \mp \sqrt{E^2\alpha^2 - (m^2c^4 - E^2)(c^2\tilde{k}^2 - \alpha^2)}}{m^2c^4 - E^2}.$$

Звідси видно, що інтегрування в умові квантування треба виконувати проводити від точки r_3 до r_4 . Для зручності запишемо ліву частину умови квантування (26) у вигляді суми двох інтегралів I_1 та I_2 :

$$I_1 = \int_{r_3}^{r_4} p(r) dr; \quad (32)$$

$$I_2 = \int_{r_3}^{r_4} \frac{c\tilde{k}\omega}{pr} dr. \quad (33)$$

Проінтегрувавши в (32) та (33), отримуємо остаточні вирази:

$$I_1 \approx \frac{\pi}{8} ac \frac{(r_4 - r_3)^2 \sqrt{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} \sqrt{1-v}}{r_3} \times \\ \times \left[F_1\left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 3; \frac{u}{u-1}, \frac{v}{v-1}\right) + \frac{1}{4} \frac{r_4 - r_3}{r_3 - r_1} \cdot F_1\left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 4; \frac{u}{u-1}, \frac{v}{v-1}\right) - \right. \\ \left. - \frac{5}{128} \left(\frac{r_4 - r_3}{r_3 - r_1}\right)^2 \cdot F_1\left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 5; \frac{u}{u-1}, \frac{v}{v-1}\right) + \dots \right], \quad (34)$$

де $u = -\frac{r_4 - r_3}{r_3}$, $v = -\frac{r_4 - r_3}{r_3 - r_2}$, $F_1(\alpha, \beta, \gamma, \lambda; x, y)$ – гіпергеометрична функція подвійного аргумента,

$$I_2 = \frac{2\tilde{k}(r_4 - r_1)}{a(r'_1 - r'_2) \sqrt{(r_4 - r_2)(r_3 - r_1)}} \times \\ \times \left[\left(r'_1 + \frac{E + mc^2}{2a} \right) \frac{1}{(r'_1 - r_4)(r'_1 - r_1)} \left\{ \Pi(v_1, n) + \frac{r'_1 - r_4}{r_4 - r_1} \cdot F(n) \right\} - \right. \\ \left. - \left(r'_2 + \frac{E + mc^2}{2a} \right) \frac{1}{(r'_2 - r_4)(r'_2 - r_1)} \left\{ \Pi(v_2, n) + \frac{r'_2 - r_4}{r_4 - r_1} \cdot F(n) \right\} \right], \quad (35)$$

де $\Pi(v, n)$ – повний еліптичний інтеграл третього роду, $F(n)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду; $v_{1,2} = \frac{(r_3 - r_4)(r'_{1,2} - r_1)}{(r_3 - r_1)(r'_{1,2} - r_4)}$, $n = \sqrt{\frac{(r_4 - r_3)(r_1 - r_1)}{(r_3 - r_1)(r_1 - r_4)}}$, $r'_{1,2}$ – корені квадратного рівняння $ar^2 + (E + mc^2)r + \alpha = 0$. В результаті ми отримуємо трансцендентне рівняння відносно енергії рівня E_{nl} , яке можна розв'язати чисельно.

Додатки. 1. Щоб протестувати розроблену нами версію методу ВКБ, відтворимо відому формулу Бора-Зоммерфельда. Для цього прийемо $V(r) = -\frac{\alpha Z}{r}$, $S(r) = 0$. З урахуванням цього формули (22), (24) набудуть вигляду

$$p(r) = \left[\left(E + \frac{\alpha Z}{r} \right)^2 - mc^2 - (c\tilde{k}/r)^2 \right]^{1/2}$$

та

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha Z/r^2}{E + \frac{\alpha Z}{r} + mc^2} - \frac{1}{r} \right).$$

Проінтегрувавши умову квантування (26) від r_0 до r_- , отримаємо

$$\frac{E\alpha Z}{\sqrt{m^2 c^4 - E^2}} = n_r + \sqrt{\tilde{k}^2 - (\alpha Z)^2},$$

де

$$r_{0,-} = \frac{E\alpha Z \mp \sqrt{(E\alpha Z)^2 - (m^2 c^4 - E^2)(\tilde{k}^2 - (\alpha Z)^2)}}{m^2 c^4 - E^2}.$$

Звідки отримуємо вираз, аналогічний до формули Бора-Зоммерфельда

$$E = \pm mc^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha Z}{n_r + \sqrt{\tilde{k}^2 - (\alpha Z)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

2. Є ще один доволі цікавий випадок, у якому вдається отримати точний розв'язок рівняння Дірака з потенціалом вигляду $V(r) = -\frac{\alpha Z}{r}$, $S(r) = -\frac{\alpha' Z}{r}$, розглянутий у [8]. Якщо векторний кулонівський потенціал $V(r)$ можна розглядати як наближення однофотонного обміну між ядром і лептонами, що рухаються навколо нього, то скалярний потенціал $S(r)$, можна розглядати як обмін масивними скалярними мезонами. В літературі з цього приводу розглядають важкий σ^- мезон, обмін яким відображає потенціал взаємодії на дуже малих відстанях. У цьому випадку формули (22), (24) набудуть вигляду

$$p(r) = \left[\left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \left(mc^2 - \frac{\alpha'}{r} \right) - (c\tilde{k}/r)^2 \right]^{1/2}$$

та

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{(\alpha - \alpha')/r^2}{E + \frac{\alpha - \alpha'}{r} + mc^2} - \frac{1}{r} \right).$$

Умова квантування (26) дає такий результат:

$$\frac{E\alpha + mc^2 \alpha'}{\sqrt{m^2 c^4 - E^2}} = n_r + \gamma,$$

$$\gamma = \pm \sqrt{\tilde{k}^2 - \alpha^2 + \alpha'^2},$$

інтегрування тут вели від r_1 до r_2 :

$$r_{1,2} = \frac{E\alpha + mc^2 \alpha' \mp \sqrt{(E\alpha + mc^2 \alpha')^2 - (m^2 c^4 - E^2)\gamma}}{m^2 c^4 - E^2}.$$

Звідси ми отримуємо вираз, аналогічний до виразу, отриманого в [8]:

$$E = mc^2 \left\{ \frac{-\alpha\alpha'}{\alpha^2 + (n_r + \gamma)^2} \mp \left[\left(\frac{\alpha\alpha'}{\alpha^2 + (n_r + \gamma)^2} \right)^2 - \frac{\alpha'^2 - (n_r + \gamma)^2}{\alpha^2 + (n_r + \gamma)^2} \right]^{1/2} \right\}.$$

1. *Mur V. D., Popov V. S., Simonov Yu. A. and Yurov V. P.* Description of relativistic heavy- light quark-antiquark systems via Dirac equation // ЖЭТФ, 1994. Т. 105, №1. С. 3-27.
2. *Мур В. Д., Попов В. С.* Квазиклассическое приближение для уравнения Дирака в сильных полях // Ядерная физика, 1978. Т. 28, №3(9). С. 837-849.
3. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М., 1974.
4. *Мигдал А. Б.* Качественные методы в квантовой теории. М., 1975.
5. *Deoghuria S, Chakrabarty S.* // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 1990. Т. 16. С. 1825.
6. *Lengyel V., Rubish V., Chalupka S., Salak M.* Configuration interaction method for describing spin-orbital effects in the quark-antiquark systems // Вісн. Ужгород. ун-ту, Сер. фізика, 1999. №4. С. 55-60.
7. *Lengyel V., Rubish V., Chalupka S., Salak M.* The role of relativistic kinematics in describing two-quark systems // Condensed Matter Physics. 1998. Т. 1. №3(15). С. 575-585.
8. *Greiner W., Müller B., and Rafelski J.* Quantum Electrodynamics of Strong Fields. Berlin, 1985.

WKB METHOD AND RELATIVISTIC POTENTIAL MODELS

V. Rubish, V. Lazur, N. Melika

*Uzhhorod National University,
Volosin str.32,UA-88000 Uzhgorod, Ukraine
e-mail: vrubish@univ.uzhgorod.ua
e-mail: lazur@univ.uzhgorod.ua*

Based on the Diracs approach we develop the relativistic vision of WKB-method for central-symmetric potential, with mixed Lorentz structure. We obtained relativistic wave function and the new role of quantization, with contain the spin-orbit interaction. These gives us the possibility of finding the energy levels, for hydrogen-like quark-systems and for they width.

Key words: potentials models, quarks, potential, quasiimpulse.

Стаття надійшла до редколегії 23.05.2002
Прийнята до друку 06.02.2003