УДК 519.21

Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

РОЗПОДІЛИ ЕКСТРЕМУМІВ ПРОЦЕСІВ ЛЕВІ І ЇХ ЗВ'ЯЗОК ЗІ СХОДИНКОВИМИ ТОЧКАМИ

It is considered Levy process with a bounded variation and the compound Poisson process with jumps, the negative part of which is exponentially distributed. For a such processes the distributions of maximum is defined in ferms the moment generating functions of the initial ladder points and heigts.

Розглядається процес Леві з обмеженою варіацією та складний пуассонівський процес із стрибками, від'ємна частина яких показниково розподілена. Для таких процесів розподіл максимуму визначається в термінах генератриси початкових сходинкових точок та висот.

Для однорідних процесів з незалежними приростами в загальному випадку компоненти безмежно подільної факторизації визначають розподіли екстремумів процесу. При цьому подвійне інтегральне перетворення розподілу максимуму досить складно виражається через непрості перетворення розподілу невід'ємних значень процесу, а подвійне інтегральне перетворення розподілу мінімуму аналогічно виражається через такі ж перетворення розподілу від'ємних значень цього процесу за допомогою аналогів тотожності Спітцера (див. [1], теореми 3.1, 3.2, с. 61, 64). Для процесів, що мають стрибки одного знаку (їх будемо називати напівнеперервними процесами Леві) вдається уточнити цю залежність від розподілу додатних або від'ємних значень процесу і спростити зображення для характеристичних функцій максимуму й мінімуму (див. [1], лема 3.2, с. 149). Для розподілу мінімуму неперервного зверху процесу в [2] (с. 136) встановлено співвідношення в термінах резольвенти цього процесу. З результатів [3] випливає, що розподіли екстремумів можна виразити ще через спектральну міру додатних або від'ємних стрибків процесу. Для процесів Леві з обмеженою варіацією встановлюється зв'язок розподілу максимума процесу з розподілом сходинкових функціоналів.

Спочатку ми розглянемо майже напівнеперервні знизу процеси Леві. Останнє означає, що

$$\xi(t) = \sum_{k\le\nu(t)} \xi_k,\ P_k(t) = P\{\nu(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k \ge 0,\ \lambda > 0,$$

а стрибки ξ_k мають х.ф.

$$\varphi(\alpha) = \frac{qc}{c+i\alpha} + p\varphi^+(\alpha),\ \varphi^+(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} dF^+(x),\ p+q=1. \tag{1}$$

Х.ф. й кумулянта майже напівнеперервного процесу $\xi(t)$ мають вигляд

$$\varphi_t(\alpha) = Ee^{i\alpha\xi(t)} = e^{t\psi(\alpha)},\ \psi(\alpha) = \lambda\left[p\varphi^+(\alpha) - \frac{cp+i\alpha}{c+i\alpha}\right]. \tag{2}$$

З умови (1) випливає, що функція розподілу (ф.р.) стрибків має зображення:

$$F(x) = \begin{cases} qe^{cx}, & x<0, c>0,\\ q+pF_+(x), & x>0,\ p+q=1. \end{cases} \tag{3}$$

$$m_1 = E\xi(1) = \lambda(p\mu_+ - qc^{-1}),\ \mu_+ = \int_0^\infty \overline{F}_+(x)dx,$$
$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = p\overline{F}_+(x),\ x \geq 0.$$

Замість (1) для х.ф. стрибків майже неперервного знизу процесу $\xi(t)$ можна користуватись співвідношенням

$$\varphi(\alpha) = \frac{c}{c+i\alpha}\varphi_*(\alpha),\ \varphi_*(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}dF_*(x). \tag{4}$$

Тоді розподіл стрибків визначається хвостами розподілу

$$\begin{cases} F(x) = qe^{-cx},\ q = \int_0^\infty e^{-cx}dF_*(x),\ x<0, \\ \overline{F}(x) = \int_x^\infty (1-e^{c(x-y)})dF_*(x),\ \overline{F}(0) = p = 1-q,\ x>0. \end{cases} \tag{5}$$

Для процесів з кумулянтою (2) та для неперервних знизу у звичайному сенсі процесів Леві з кумулянтою

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \int_0^\infty (e^{i\alpha x}-1)\Pi(dx),\ \int_0^1 x\Pi(dx) < \infty,\ a<0, \tag{6}$$

можна ввести сходинкові функціонали і виразити через них супровідний функціонал для максимуму цих процесів. Вперше сходинкові функціонали було введено для випадкових блукань і встановлено, що сходинкові моменти й висоти утворюють процес відновлення (див., наприклад, [4], т.2, гл. XII). В [5] доведено, що для довільного процесу з кумулянтою $\psi(\alpha)$ можна побудувати кумулянту $\psi_*(\alpha)$ для додатного процесу $\xi_*(t)$, перестрибки якого мають такий же розподіл як перестрибки $\xi(t)$.

Введемо позначення екстремумів процесу, моменту та величини першого перестрибку $\xi(t)$:

$$\xi^\pm(t) = \sup_{0\leq u\leq t}(\inf)\,\xi(u),\ \xi^\pm = \sup_{0\leq t<\infty}(\inf)\,\xi(t),$$
$$\tau^+(x) = \inf\{t>0 : \xi(t) > x\},\ \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x,\ x\geq 0,$$

та деяких х.ф. і розподілів

$$\varphi(s,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ \varphi_\pm(s,\alpha) = Ee^{i\alpha\xi^\pm(\theta_s)},$$

де θ_s має показниковий розподіл $P\{\theta_s > t\} = e^{-st}, s>0, t>0$,

$$P(s,x) = P\{\xi(\theta_s) < x\},\ \overline{P}(s,x) = 1 - P(s,x),$$

$$P_+(s,x) = P\{\xi^+(\theta_s) < x\}, x\geq 0;\ P_-(s,x) = P\{\xi^-(\theta_s) < x\}, x\leq 0.$$

Щоб сформулювати лему, що в деякому сенсі узагальнює згадану лему 3.2 в [1], введемо операцію проектування

$$\left[c + \int_{-\infty}^\infty e^{i\alpha x}\Phi(x)dx\right]_+^0 = c + \int_0^\infty e^{i\alpha x}\Phi(x)dx, \Phi(x)\in L_1(-\infty,\infty)$$

і позначимо інтегральні перетворення хвостів ф.р. $\xi(\theta_s)$

$$\widetilde{P}_<(s,\alpha) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x}P(s,x)dx,\quad \widetilde{P}_>(s,\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x}\overline{P}(s,x)dx.$$

Легко показати, що

$$\begin{cases} \varphi(s,\alpha) =: Ee^{i\alpha\xi(\theta_s)} = 1 - i\alpha\widetilde{P}_<(s,\alpha) + i\alpha\widetilde{P}_>(s,\alpha), \\ \varphi_+(s,\alpha) = 1 + i\alpha\int_0^\infty e^{i\alpha x}\overline{P}_+(s,x)dx = 1 + i\alpha\widetilde{\Phi}_+(s,\alpha). \end{cases} \tag{7}$$

Лема 1. a. *Нехай $\xi(t)$ – неперервний знизу процес Леві з кумулянтою*

$$\psi(\alpha) = i\alpha a - \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x I(|x| \le 1))\Pi(dx), \tag{8}$$

$$\int_0^1 x^2\Pi(dx) < \infty; \quad \textit{при } \sigma^2 = 0, a < 0.$$

Тоді і для $\sigma = 0$ х.ф. $P(s,x)$ має щільність при $x \neq 0$

$$P'(s,x) = \frac{\partial}{\partial x}P(s,x); \;\; P'(s,+0) - P'(s,-0) = sa^{-1}.$$

Кумулянтне рівняння $\psi(\alpha)|_{i\alpha=r} = s$ має від'ємний корінь $r_s = -\rho(s)$ $(s > 0)$, що визначає розподіл $\xi^-(\theta_s)$

$$\varphi_-(s,\alpha) = \frac{\rho(s)}{\rho(s) + i\alpha}, \;\; \rho(s) = \frac{P'(s,-0)}{P(s,0)}. \tag{9}$$

Інтегральне перетворення $\widetilde{\Phi}_+(s,\alpha)$ (див. останній рядок в (7)) визначається співвідношенням

$$\widetilde{\Phi}_+(s,\alpha) = \frac{1}{\rho(s)}\int_0^\infty e^{i\alpha x}dP(s,x) + \widetilde{P}_>(s,\alpha). \tag{10}$$

Розподіли $\xi^\pm(\theta_s)$ визначаються оберненням (9) та (10)

$$\begin{cases} P_-(s,x) = P\{\xi^-(\theta_s) < x\} = e^{\rho(s)x}, \;\; x < 0, \\ \overline{P}_+(s,x) = P\{\xi^+(\theta_s) > x\} = \frac{1}{\rho(s)}P'(s,x) + \overline{P}(s,x), \;\; x > 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$p_+(s) = P\{\xi^+(\theta_s) = 0\} = \frac{s}{|a|\rho(s)}, \;\; \overline{P}_+(s,x) \underset{x\to 0}{\to} q_+(s) = 1 - p_+(s).$$

При $\sigma > 0$ $\;P'(s,\pm 0) = P'(s,0)$ і розподіли $\xi^\pm(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями (9)–(11) з тією різницею, що $\overline{P}_+(s,x) \underset{x\to 0}{\to} 1$.

При $m_1 < 0$ $s\rho^{-1}(s) \underset{s\to 0}{\to} (\rho'(0))^{-1} = |m_1|$, а ξ^+ має розподіл

$$P\{\xi^+ > x\} = |m_1|\frac{d}{dx}\left(\int_0^\infty P\{\xi(t) > x\}dt\right), \;\; x > 0.$$

b. *Якщо $\xi(t)$ майже неперервний знизу процес Леві з кумулянтою (2), тоді корінь кумулянтного рівняння*

$$r_s = -\rho(s) = -cp_-(s), \;\; p_-(s) = P\{\xi^-(\theta_s) = 0\} > 0$$

визначає генератриси розподілів $\xi^\pm(\theta_s)$

$$\begin{cases} \varphi_-(s,\alpha) = \frac{p_-(s)(c+i\alpha)}{\rho(s)+i\alpha}, \;\; p_-(s)p_+(s) = \frac{s}{s+\lambda}, \\ \widetilde{\Phi}_+(s,\alpha) = \frac{1}{p_-(s)}\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \frac{q_-(s)}{p_-(s)}\left[\frac{c}{c+i\alpha}\widetilde{P}_>(s,\alpha)\right]_+^0. \end{cases} \tag{12}$$

Екстремуми $\xi^{\pm}(\theta_s)$ *мають розподіл*

$$\begin{cases} P_-(s,x) = q_-(s)e^{cp_-(s)x}, \ x<0, \ p_\pm(s)>0, \\ \overline{P}_+(s,x) = \frac{(s+\lambda)p_+(s)}{s}\left[\overline{P}(s,x) - cq_-(s)\int_x^\infty \overline{P}(s,y)e^{c(x-y)}dy\right], \ x>0. \end{cases} \tag{13}$$

При $m_1<0$ $sp_-^{-1}(s) \underset{s\to 0}{\to} \lambda p_+$ *і* ξ^+ *має невироджений розподіл*

$$P\{\xi^+ > x\} = c\lambda p_+ \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-cy} P\{0 \le \xi(t) - x < y\} dydt, \ x>0,$$

$$p_+ = [1 + \lambda c \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-cy} P\{0 \le \xi(t) < y\} dydt]^{-1}.$$

Доведення. Скористуємось основною факторизаційною тотожністю для довільного однорідного процесу з незалежними приростами (див. [1], теорема 3.1, с. 61)

$$\varphi(s,\alpha) = \varphi_+(s,\alpha)\varphi_-(s,\alpha), \ \operatorname{Im}\alpha = 0. \tag{14}$$

На підставі (7) та (9) для напівнеперервного випадку тотожність (14) можна переписати так

$$\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha) = \widetilde{\Phi}_+(s,\alpha) - \frac{\varphi_+(s,\alpha)}{\rho(s)+i\alpha},$$

$$(\rho(s)+i\alpha)(\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha)) = \rho(s)\widetilde{\Phi}_+(s,\alpha) - 1.$$

Після операції проектування звідси випливає, що

$$\rho(s)\widetilde{\Phi}_+(s,\alpha) = [\rho(s)(\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha) + \varphi(s,\alpha)]_+^0 =$$
$$= \rho(s)\widetilde{P}_>(s,\alpha) + \int_0^\infty e^{i\alpha x} P'(s,x)dx.$$

Отже (10) доведено. Обернувши (9), (10) відносно α, одержимо (11).

При $\sigma>0$ аналогічно доводиться справедливість співвідношень (9)–(11) з урахуванням того, що $P'(s,0) = P'(s,\pm 0)$ і $p_+(s) \equiv 0$.

У випадку b) з урахуванням (7) та зображенням $\varphi_-(s,\alpha)$ в (12) тотожність (14) перепишеться так

$$\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha) = \widetilde{\Phi}_+(s,\alpha)\frac{p_-(s)i\alpha + \rho(s)}{\rho(s)+i\alpha} - \frac{q_-(s)}{\rho(s)+i\alpha}.$$

Звідси після нескладних перетворень знаходимо, що

$$\widetilde{\Phi}_+(s,\alpha) = \left[\frac{1}{p_-(s)}\left(1 - \frac{cq_-(s)}{c+i\alpha}\right)(\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \widetilde{P}_<(s,\alpha)) + \frac{q_-(s)}{c+i\alpha}\right]_+^0 =$$

$$= \frac{1}{p_-(s)}\widetilde{P}_>(s,\alpha) - \frac{q_-(s)}{p_-(s)}\left[\frac{c}{c+i\alpha}\widetilde{P}_>(s,\alpha)\right]_+^0.$$

Отже друге співвідношення в (12) доведено. З (12) після обернення обох співвідношень відносно α знаходимо розподіли екстремумів (13). Співвідношення для розподілу ξ^+ при $m_1<0$ випливають відповідно із співвідношень (11) та (13) при $s\to 0$.

Щоб сформулювати наступну лему з [3] для процесу з х.ф. (2) введемо позначення

$$h(r) = \int_0^\infty e^{rx}\overline{F}(x)dx = ph_+(r).$$

Тоді кумулянтне рівняння при $s = 0$ запишеться так

$$qc + p(c + r)rh_+(r) = 0. \tag{15}$$

При умові $m_1 = E\xi(1) = \lambda[p\mu_+ - qc^{-1}] < 0, \mu_+ = h_+(0)$

$$p_+(s) \underset{s\to 0}{\to} p_+ = P\{\xi^+ = 0\} > 0, q_+ = 1 - p_+ > 0.$$

Позначимо

$$\begin{cases} \Pi_0(dz) = p_+^{-1}(c\overline{F}(z)dz + dF(z)),\ z > 0, m_1 < 0, \\ \Pi(z) = \lambda\overline{F}(z) = \lambda p\overline{F}_+(z), z > 0, m_1\text{– довільного знаку.} \end{cases} \tag{16}$$

Для неперервного знизу процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (8) позначимо

$$\Pi(z) = \int_z^\infty \Pi(dy), \quad K(s,x) = \int_{-\infty}^0 \Pi(x - y)dP_-(s,y),\ z, x > 0.$$

Цю згортку $\Pi(z)$ з розподілом мінімуму $P_-(s,x)$ будемо розглядати при $x > 0$ і для $\xi(t)$ з х.ф. (2)

$$\begin{cases} K(s,x) = p_-(s)\Pi(x) + q_-(s)\rho(s)\int_x^\infty e^{\rho(s)(x-y)}\Pi(y)dy, \\ \widetilde{k}(s,\nu) = \int_0^\infty e^{-\nu x}K(s,x)dx = \frac{p_-(s)}{\rho(s)-\nu}[(c-\nu)\widetilde{\Pi}(\nu) - cq_-(s)\widetilde{\Pi}(\rho(s))], \\ \rho(s) = cp_-(s),\ p_-(s) = P\{\xi^-(\theta_s) = 0\} > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Сформулюємо лему про розподіл $\xi^+(\theta_s)$ в термінах згорток $K(s,x)$.

Лема 2. а. *Нехай $\xi(t)$ – неперервний знизу у звичайному сенсі процес з кумулянтою (8). Тоді*

$$\begin{cases} K(s,x) = \rho(s)\int_x^\infty e^{\rho(s)(x-y)}\Pi(y)dy,\ x > 0, \\ \widetilde{k}(s,\nu) = \frac{\rho(s)}{\rho(s)-\nu}(\widetilde{\Pi}(\nu) - \widetilde{\Pi}(\rho(s))),\ \widetilde{\Pi}(\nu) = \int_0^\infty e^{-\nu x}\Pi(x)dx. \end{cases} \tag{18}$$

Генератриса $\xi^+(\theta_s)$ через $\widetilde{k}(s,y)$ з (18) визначається так

$$Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)} = \frac{s}{s + \nu\left(-\frac{\sigma^2}{2}\rho(s) + \widetilde{k}(s,\nu)\right)},\ s > 0. \tag{19}$$

При $m_1 < 0$ $\rho(s) \underset{s\to 0}{\to} 0,\ \rho'(0) = |m_1|^{-1}$,

$$-\widetilde{k}_0(\nu) = \lim_{s\to 0}\nu s^{-1}\widetilde{k}(s,\nu) = |m_1|^{-1}(\widetilde{\Pi}(0) - \widetilde{\Pi}(\nu)).$$

Тому при $m_1 < 0$ існує невироджений розподіл ξ^+ з генератрисою

$$\begin{cases} Ee^{-\nu\xi^+} = \lim_{s\to 0} Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)} = (1 - k_*(\nu))^{-1}, \\ k_*(\nu) = |m_1|^{-1}\left[\frac{\sigma^2}{2}\nu + \int_0^\infty (e^{-\nu x} - 1)\Pi(x)dx\right]. \end{cases} \tag{20}$$

b. *Якщо $\xi(t)$ майже неперервний знизу процес з кумулянтою (2), тоді генератриса $\xi^+(\theta_s)$ визначається через $\widetilde{k}(s,\nu)$ з (17) так*

$$Ee^{-\nu\xi^+(\theta_s)} = s(s+\nu\widetilde{k}(s,\nu))^{-1}. \tag{21}$$

При $m_1 < 0$ $\rho(s) \underset{s\to 0}{\to} 0$, $\rho'(0) = c(\lambda p_+)^{-1} > 0$, $p_+ = P\{\xi^+ = 0\} = \frac{c|m_1|}{\lambda}$;

$$\widetilde{k}_0(\nu) = -\lim_{s\to 0} s^{-1}\nu\widetilde{k}(s,\nu) = \int_0^\infty (e^{-\nu x} - 1)\Pi_0(dx),$$

і розподіл абсолютного максимуму ξ^+ визначається генератрисою

$$Ee^{-\nu\xi^+} = (1-\widetilde{k}_0(\nu))^{-1} = p_+(1-q_+g_0(\nu))^{-1}, \tag{22}$$

$$g_0(\nu) = \lambda_0^{-1}\int_0^\infty e^{-\nu x}\Pi_0(dx),\ \lambda_0 = p(1+c\mu_+)p_+^{-1} = q_+p_+^{-1} < \infty,$$

($\Pi_0(dx)$ див. в (16), $p_+ = P\{\xi^+ = 0\} > 0, q_+ = 1 - p_+$).

Доведення обох частин леми випливає з наслідків 1 та 8 в [3]. Зокрема (20) та (22) випливає з того, що при $m_1 < 0$ існує похідна по s в 0

$$\frac{\partial}{\partial s}K(s,x) \underset{s\to 0}{\to} \rho'(0)\int_x^\infty \Pi(y)dy \Rightarrow \widetilde{k}_0(\nu) = -\lim_{s\to 0}\nu\widetilde{k}'_s(s,\nu).$$

Зауважимо, що при $\sigma^2 = 0$ генератрису (20) можна переписати у вигляді формули Полячека-Хінчина, як і останню частину формули (22). В середній частині (22) $\widetilde{k}_0(\nu)$ є кумулянтою монотонно неспадного процесу $\xi_0(t)$, а $k_*(\nu)$в (20) при $\sigma > 0$ є кумулянтою строго зростаючого процесу $\xi_*(t)$ із коефіцієнтом знесення $a_* = \frac{\sigma^2}{2|m_1|} > 0$. Тому генератрису ξ^+ відповідно можна записати так

$$Ee^{-\nu\xi^+} = \begin{cases} Ee^{-\nu\xi_*(\theta_1)} = \int_0^\infty e^{-t}Ee^{-\nu\xi_*(t)}dt, \\ Ee^{-\nu\xi_0(\theta_1)} = \int_0^\infty e^{-t}Ee^{-\nu\xi_0(t)}dt. \end{cases}$$

Отже компоненти першої факторизаційної тотожності (14) для неперервного знизу процесу Леві з кумулянтою (8) виражаються на підставі леми 1 співвідношеннями (9)–(10), а для майже неперервного знизу процесу з кумулянтою (2) — співвідношеннями (12). На підставі леми 2 компоненти тотожності (14) виражаються через $\widetilde{k}(s,\nu)$ — інтегральні перетворення згорток $\Pi * P_-(s,x)$ за допомогою співвідношень (19) та (20).

Доведена в [6] друга факторизаційна тотожність для випадкових блукань має місце і для однорідних процесів з незалежними приростами і записується у видозміненій формі так (див. [1], теорема 3.1, с.130)

$$B_+(s,u,\mu) =: E[e^{-s\tau^+(\theta'_\mu)-u\gamma^+(\theta'_\mu)}, \tau^+(\theta'_\mu) < \infty] = \frac{\mu}{\mu-u}\left[1 - \frac{\varphi_+(s,i\mu)}{\varphi_+(s,iu)}\right]. \tag{23}$$

В термінах $\Phi_\pm(s,\alpha)$ (див.(10) та (11)) тотожність (23) запишеться так:

$$B_+(s,u,\mu) = \frac{u\Phi_+(s,iu) - \mu\Phi_+(s,i\mu)}{1-\mu\Phi_+(s,i\mu)}.$$

Тоді з лем 1, 2 випливає, що спільний розподіл $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$ на підставі (23) також можна виразити в термінах розподілу додатних значень процесу (див. (9) – (10) і (2)) та в термінах згорток $\Pi * P_-(s,x)$ (див. (9) та (20)).

Нам потрібна ще лема про залежність між $\gamma^+(0)$ та $\xi^+(\theta_s)$, яка базується на результатах наслідків 6 та 8 з [3].

Лема 3. a. *Нехай $\xi(t)$ неперервний знизу процес Леві з обмеженою варіацією* $(\sigma^2 = 0, a < 0)$

$$\psi(\alpha) = i\alpha a + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\Pi(dx), \ \int_0^\infty \Pi(x)dx < \infty. \tag{24}$$

Тоді має місце співвідношення

$$P\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma^+(0) > z\} = \frac{1}{|a|}\int_z^\infty e^{(z-y)\rho(s)}\Pi(y)dy, z > 0. \tag{25}$$

При умові $m_1 = a + \widetilde{\Pi}(0) < 0 \ \ \rho(s) \underset{s\to 0}{\to} 0$, ξ^+ *має невироджений розподіл і*

$$P\{\xi^+ > 0, \gamma^+(0) > z\} = \frac{1}{|a|}\int_z^\infty \Pi(y)dy \underset{z\to 0}{\to} \frac{\widetilde{\Pi}(0)}{|a|} = q_+ < 1. \tag{26}$$

При $m_1 = 0 \ \ \rho(s) \underset{s\to 0}{\to} 0$, $q_+ = 1$

$$P\{\gamma^+(0) > z\} = \frac{1}{|a|}\int_z^\infty \Pi(y)dy \underset{z\to 0}{\to} 1. \tag{27}$$

При $m_1 > 0$, $\rho(s) \to \rho = \frac{1}{|a|p'_+(0)} > 0$, $r_0 = -\rho$ *– корінь рівняння* $\widetilde{\Pi}(\rho) = |a|$. *Розподіли* ξ^- *та* $\gamma^+(0)$ *визначаються співвідношеннями*

$$\begin{cases} P\{\xi^- < x\} = e^{\rho x}, \ x \le 0, \\ P\{\gamma^+(0) > z\} = \frac{1}{|a|}\int_z^\infty e^{(z-y)\rho}\Pi(y)dy \underset{z\to 0}{\to} 1. \end{cases} \tag{28}$$

Відповідно генератриси $\gamma^+(0)$ *та* $\tau^+(0)$ *визначаються співвідношеннями*

$$g(\nu) = E\left[e^{-\nu\gamma^+(0)}/\tau^+(0) < \infty\right] = \begin{cases} \widetilde{\Pi}(\nu)(|a|q_+)^{-1}, \ q_+ < 1, m_1 < 0, \\ \widetilde{\Pi}(\nu)|a|^{-1}, m_1 = 0, \\ \frac{\rho}{\rho-\nu} - \frac{\nu}{|a|(\rho-\nu)}\widetilde{\Pi}(\nu), \ m_1 > 0, \end{cases} \tag{29}$$

$$q_+(s) = f_+(s) = \begin{cases} E[e^{-s\tau^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] = |a|^{-1}\widetilde{\Pi}(\rho(s)) \underset{s\to 0}{\to} q_+ < 1, m_1 < 0 \\ Ee^{-s\tau^+(0)} = |a|^{-1}\widetilde{\Pi}(\rho(s)) \underset{s\to 0}{\to} 1, m_1 \ge 0. \end{cases} \tag{30}$$

b. *Спільний розподіл* $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ *для майже неперервного знизу процесу* $\xi(t)$ *з кумулянтою* (2) *визначається співвідношенням*

$$\begin{aligned} &E[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma^+(0) > z, \tau^+(0) < \infty] = P\{\xi^+(\theta_s) > 0, \gamma^+(0) > z\} = \\ &= \frac{1}{s+\lambda}\left[\Pi(z) + cq_-(s)\int_z^\infty e^{(z-y)\rho(s)}\Pi(y)dy\right], z > 0. \end{aligned} \tag{31}$$

де $\Pi(z) = \lambda p\overline{F}_+(z)$; *а при* $z = 0$

$$E[e^{-s\tau^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] = q_+(s) = \frac{1}{s+\lambda}\left[\Pi(0) + cq_-(s)\widetilde{\Pi}\rho(s)\right]. \tag{32}$$

При умові $m_1 = \lambda(p\mu_+ - qc^{-1}) < 0$, $\rho(s) = cp_-(s) \underset{s\to 0}{\to} 0$, $q_-(s) \underset{s\to 0}{\to} 1$,

$$P\{\xi^+ > 0, \gamma^+(0) > z\} = p[\overline{F}_+(z) + c\int_z^\infty \overline{F}_+(y)dy], z \geq 0, \tag{33}$$

$$\lim_{s\to 0} q_+(s) = q_+ = p + cp\mu_+ < p + q < 1.$$

При умові $m_1 = 0$ $p_+(s) \underset{s\to 0}{\to} 0$, $q_+ = 1$ *і має місце співвідношення*

$$P\{\gamma^+(0) > z\} = p[\overline{F}_+(z) + c\int_z^\infty \overline{F}_+(y)dy],\ z \geq 0. \tag{34}$$

При умові $m_1 > 0$ $\rho(s) = cp_-(s) \underset{s\to 0}{\to} cp_- > 0$, $q_+ = 1$, *а розподіл* $\gamma^+(0)$ *визначається співвідношенням для* $z > 0$

$$P\{\gamma^+(0) > z\} = p[\overline{F}_+(z) + c\int_z^\infty e^{cp_-(z-y)}\overline{F}_+(y)dy]. \tag{35}$$

Генератриса для $\gamma^+(0)$ $g(\nu) = E[\exp\{-\nu\gamma^+(0)\}/\xi^+ > 0]$ *виражається так*

$$g(\nu) = \begin{cases} \frac{p}{q_+}\left[\int_0^\infty e^{-\nu x}dF_+(x) + c\int_0^\infty e^{-\nu x}\overline{F}_+(x)dx\right], m_1 < 0, \\ p\left[\int_0^\infty e^{-\nu x}dF_+(x) + ch_+(-\nu)\right], m_1 = 0, \\ 1 + \nu p\left[h_+(-\nu) + \frac{cq_-}{cp_- - \nu}(h_+(r_0) + h_+(-\nu))\right], m_1 > 0. \end{cases} \tag{35}$$

Генератриса для $\tau^+(0)$ *виражається співвідношенням (32), при цьому*

$$\begin{cases} f_+(s) = E[e^{-s\tau^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] \underset{s\to 0}{\to} q_+,\ \text{якщо } m_1 < 0, \\ f_+(s) = Ee^{-s\tau^+(0)} \underset{s\to 0}{\to} 1,\ \text{якщо } m_1 \geq 0. \end{cases} \tag{36}$$

При $m_1 > 0$ *розподіл* ξ^- *визначається генератрисою*

$$Ee^{\nu\xi^-} = \frac{p_-(c+\nu)}{cp_- + \nu},\ p_- = P\{\xi^- = 0\} > 0. \tag{37}$$

Розглянемо сходинкові функціонали спочатку для східчастого процеса $\xi(t)$ з кумулянтою (2). Позначимо моменти послідовного досягнення максимальних значень процесом $\xi(t)$

$$\tau^+(0) = \tau_1^+ < \tau_2^+ < \ldots < \tau_n^+ < \ldots,\ \eta_k^+ = \tau_k^+ - \tau_{k-1}^+,\ k \geq 1.$$

$$\xi^+(t) = \xi^+(\tau_{k-1}^+),\ \text{якщо } t \in [\tau_{k-1}^+, \tau_k^+)$$

а сходинкові висоти позначимо

$$\gamma^+(0) = \gamma_1^+,\ \gamma_k^+ = \xi(\tau_k^+) - \xi(\tau_{k-1}^+),\ k \geq 1.$$

В силу однорідності й марковості процесу $\xi(t)$ $\{\eta_k^+, \gamma_k^+\}_{k\geq 1}$ є послідовністю незалежних однаково розподілених пар випадкових величин.

При умові $m_1 < 0$ розподіл $\tau_1^+ = \tau^+(0)$ розглядається на події A_+

$$A_+ = \{\omega : \tau^+(0) < \infty\}, \quad f_+(s) = E[e^{-s\tau^+(0)}, A_+] \to q_+ < 1. \tag{38}$$

Пару $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\} = \{\tau_1^+, \gamma_1^+\}$ назвемо початковими сходинковими функціоналами, їх розподіли визначають відповідно розподіли $\{\eta_k^+, \gamma_k^+\}$, $k > 1$.

Аналогічно визначаються сходинкові функціонали для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (24), якщо $\Pi(x) = \lambda \overline{F}(x)$ $(x > 0)$. Послідовність $\{\tau_n^+\}_{n\geq 1}$ $\tau_n^+ = \sum_{k=1}^m \eta_k^+$ є схемою відновлення. Відповідно процес відновлення та його розподіл позначимо

$$N(t) = \max\{n : \tau_n^+ \leq t\},\ t \geq 0,\ \ p_k(t) = P\{N(t) = k\},\ k \geq 0.$$

Поскільки

$$p_k(t) = P\{\tau_k^+ \leq t\} - P\{\tau_{k+1}^+ \leq t\} = F_k(t) - F_{k+1}(t),$$

то перетворення Лапласа-Карсона для $p_k(t)$ після інтегрування частинами набуває вигляду

$$\widetilde{p}_k(s) =: s\int_0^\infty e^{-st} p_k(t)dt = -\int_0^\infty p_k(t)d(e^{-st}) = f_+^k(s)[1 - f_+(s)]. \tag{39}$$

При $m_1 < 0$ існує границя

$$\pi_k = \lim_{s\to\infty} \widetilde{p}_k(s) = \lim_{t\to\infty} p_k(t) = q_+^k p_+,\ k \geq 0, \tag{40}$$

яка визначає ергодичний розподіл процесу відновлення $N(t)$.

Користуючись сходинковими точками $\{\eta_k^+, \gamma_k^+\}_{k\geq 1}$ та процесом відновлення $N(t)$ введемо супровідний функціонал для максимуму процесу $\xi^+(t)$

$$\widetilde{\xi}^+(t) = S_{N(t)}^+,\ S_n^+ = \sum_{k=0}^n \gamma_k^+,\ \gamma_0^+ = 0. \tag{41}$$

Будемо вважати, що при $k \geq 1$ γ_k^+, η_k^+ незалежні, а їх генератриси такі: $Ee^{-u\gamma_k^+} = g(z)$, $E[e^{-s\eta_k^+}, A_+] = f_+(s) = q_+(s)$ $(g(z), f_+(s)$ див. (32), (35) та (36)).

Теорема 1. *Розподіл $\widetilde{\xi}^+(t)$ для процесу з кумулянтою (2) визначається генератрисою*

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_t^+(z) =: Ee^{-z\widetilde{\xi}^+(t)} = \sum_{k=0}^\infty p_k(t) g^k(z), \\ \widetilde{\varphi}_+(s,z) =: Ee^{-z\widetilde{\xi}^+(\theta_s)} = \frac{1-f_+(s)}{1-f_+(s)g(z)}, \end{cases} \tag{42}$$

При умові $m_1 < 0$ існує граничний розподіл $\widetilde{\xi}^+$ з генератрисою

$$\widetilde{\varphi}_+(z) = \lim_{s\to 0} \widetilde{\varphi}_+(s,z) = Ee^{-z\widetilde{\xi}^+}, \tag{43}$$

при цьому

$$\widetilde{\varphi}_+(z) = Ee^{-z\xi^+} = \frac{p_+}{1 - q_+ g(z)},\ \textit{див. (22)},\ g_0(z) \equiv g(z). \tag{44}$$

Доведення. Після усереднення по розподілу $N(t)$ з (41) випливає перше співвідношення в (42). Після інтегрального перетворення звідси з урахуванням (39) одержимо

$$\widetilde{\varphi}_+(s,z) = s\int_0^\infty e^{-st}\varphi_t^+(z)dt = \sum_{k=0}^\infty \widetilde{p}_k(s)g^k(s) =$$

$$= (1-f_+(s))\sum_{k=0}^\infty f_+^k(s)g^k(s) = \frac{1-f_+(s)}{1-f_+(s)g(z)}$$

і (42) повністю доведено. Генератриса (43) при умові $m_1 < 0$ визначається з (42) шляхом граничного переходу $(s \to 0)$.

Теорема 2. *Нехай $\xi(t)$ – неперервний знизу у звичайному сенсі процес з кумулянтою* (24), $\Pi(x) = \lambda\overline{F}(x), x > 0, \lambda < \infty$. *Тоді функціонал $\widetilde{\xi}^+(t)$ має генератрису*

$$\widetilde{\varphi}_+(s,z) = \frac{1-f_+(s)}{1-f_+(s)g(z)}, \tag{45}$$

де $g(z)$ та $f_+(s)$ визначаються за допомогою (29) та (30) залежно від знаку m_1. При умові $m_1 < 0$ існує невироджений розподіл $\widetilde{\xi}^+$, що визначається генератрисою

$$Ee^{-\nu\widetilde{\xi}^+} = Ee^{-\nu\xi^+} = [1-\lambda\rho'(0)(h(-\nu)-h(0))]^{-1},\ \rho'(0) = \frac{1}{|m_1|}. \tag{46}$$

Доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1. При цьому обмеження, що $\Pi(x) = \lambda\overline{F}(x), x > 0, \lambda < \infty$, можна зняти і довести співвідношення (45) та (46) для довільного процесу з обмеженою варіацією. Для цього слід ввести урізаний процес $\xi_n(t)$ з кумулянтою

$$\psi_n(\alpha) = i\alpha a + \int_{\frac{1}{n}}^\infty (e^{i\alpha x}-1)\Pi(dx),\ \lambda_n = \int_{\frac{1}{n}}^\infty \Pi(dx), n \to \infty.$$

Розподіл супровідного функціоналу $\widetilde{\xi}_n^+(\theta_s)$ визначиться відповідним допграничним співвідношенням подібним до (46)

$$Ee^{-z\widetilde{\xi}_n^+(\theta_s)} = \frac{1-f_+^{(n)}(s)}{1-f_+^{(n)}(s)g_n(z)}. \tag{47}$$

Згідно з теоремою Скорохода про неперервність функціоналів (див. [1], гл. 1, §3)

$$f_+^{(n)}(s) = E[e^{-s\tau_n^+(0)}, \tau_n^+(0) < \infty] \underset{n\to\infty}{\to} E[e^{-s\tau^+(0)}, \tau^+(0) < \infty],$$

$$g_n(z) = Ee^{-z\gamma_n^+(0)} \underset{n\to\infty}{\to} Ee^{-z\gamma^+(0)},$$

де $\tau_n^+(0) = \inf\{t : \xi_n(t) > 0\}$, $\gamma_n^+(0) = \xi_n(\tau_n^+(0))$, випливає, що права частина в (47) має границю, яка визначає генератрису граничного супровідного функціоналу $\widetilde{\xi}^+(t)$ для $\xi(t)$ з кумулянтою (24)

$$\xi(t) \xrightarrow{P} \lim_{n\to\infty} \xi_n(t),\ \widetilde{\xi}^+(t) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\xi}_n^+(t).$$

Вона задовольняє співвідношення (45). Аналогічно граничним переходом ($n \to \infty$) встановлюється справедливість співвідношення (44) для довільного процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (24). В деяких частинних випадках незалежно від знаку m_1

$$E[e^{-s\tau^+(0)-u\gamma^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] = E[e^{-s\tau^+(0)}, \tau^+(0) < \infty]Ee^{-u\gamma^+(0)}. \tag{48}$$

(Див.приклад вкінці). В таких випадках супровідний функціонал $\widetilde{\xi}^+(\theta_s)$ та $\xi^+(\theta_s)$ збігаються.

Якщо процес $\xi(t)$ з обмеженою варіацією має стрибки будь-якого знаку з довільним розподілом і $a \le 0$, тоді для генератриси перестрибу $g(u)$ немає зображень типу (29) та (35). Однак з другої факторизаційної тотожності (23) можна знайти співвідношення зв'язку між розподілом $\xi^+(\theta_s)$ та спільним розподілом $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ і виразити $g(u)$ в інших термінах. Нагадаємо, що для довільного складного пуассонівського процесу $\xi(t)$ з $|m_1| < \infty$ можливі три випадки поведінки $\varphi_+(s, \alpha)$ при $s \to 0$:

a) $m_1 = E\xi(1) < 0$; тоді $\lim_{s\to 0} \varphi_+(s, iu) = Ee^{-u\xi^+}$.

b) $m_1 > 0$; тоді $\lim_{s\to 0} s^{-1}\varphi_+(s, iu) = \int_0^\infty Ee^{-u\xi^+(t)}dt = \int_0^\infty e^{-ux}dE\tau^+(x)$; зокрема $s^{-1}p_+(s) \underset{s\to 0}{\to} E\tau^+(0) = \int_0^\infty P\{\tau^+(0) > t\}dt$.

c) $m_1 = 0,\ \sigma_1^2 = D\xi(1) < \infty$, тоді

$$\lim_{s\to 0} s^{-\frac{1}{2}}\varphi_+(s, iu) = \widetilde{\Phi}_+(u) = \int_{-0}^{\infty} e^{-ux}d\Phi_+(x), \tag{49}$$

де $\widetilde{\Phi}_+(u)$ виражається через граничне значення компоненти канонічної факторизації "підкоректованої"х.ф. $\varphi(s, \alpha)$. Для її визначення згідно з [1] (див. гл.2, §2, с.51–52; гл.4, §1, с.219) вводиться функція

$$sg^{-1}(s, \alpha) = (v_\pm + i\alpha)\varphi(s, \alpha),\ \pm v_\pm > 0.$$

У випадках, що охоплюють розглядувані тут процеси $\xi(t)$:

$$A_2^\pm : c_1 = \int_{|x|\le 1} |x|\Pi(dx) < \infty,\ d = a - \int_{|x|<1} x\Pi(dx),\ \pm d > 0.$$

За теоремою 2.1 (див. [1], с.51) має місце канонічна факторизація

$$g(s, \alpha) = g_+(s, \alpha)g_-(s, \alpha),\ \operatorname{Im} \alpha = 0.$$

За теоремою 1.4 (див. [1], с.219) $\widetilde{\Phi}_+(u)$ виражається через

$$g_+(iu) = \lim_{s\to 0} g_+(s, iu),$$

зокрема, у випадку A_2^+

$$\widetilde{\Phi}_+(u) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_1}\frac{g_+(0)}{ug_+(u)}. \tag{50}$$

Функція $\Phi_+(x)$ ($x > 0$) – монотонно неспадна, $\Phi_+(+0) = c_+ > 0$, $\Phi_+(x) \equiv 0$, $x < 0$. Справедливе твердження про зв'язок між розподілами $\xi^+(\theta_s)$ та $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$. Позначимо

$$f_+(s, u) = E[e^{-s\tau^+(0)-u\gamma^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] = E[e^{-u\gamma^+(0)}, \xi^+(\theta_s) > 0].$$

Теорема 3. *Нехай $\xi(t)$ – процес Леві з обмеженою варіацією та кумулянтою*

$$\psi(\alpha) =: \ln Ee^{i\alpha\xi(1)} = i\alpha a + \int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\alpha x}-1)\Pi(dx),\ a \le 0,\ \int_{|x|<1}|x|\Pi(dx) < \infty. \tag{51}$$

Тоді зв'язок між розподілами $\xi^+(\theta_s)$ та $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ виражається співвідношенням

$$\varphi_+(s, iu) = (1-q_+(s))[1-f_+(s,u)]^{-1}. \tag{52}$$

При $m_1 < 0$ генератриса $f_+(0,u)$ визначається через розподіл ξ^+

$$f_+(0,u) = E[e^{-u\gamma^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] = 1 - p_+(Ee^{-u\xi^+})^{-1}. \tag{53}$$

Якщо $m_1 > 0$, тоді $g(u)$ виражається через $T_+(x) = E\tau^+(x)$ $(x \ge 0)$

$$g(u) = f_+(0,u) = 1 - T_+(0)[\int_{-0}^{\infty} e^{-ux} dT_+(x)]^{-1}. \tag{54}$$

Якщо $m_1 = 0, \sigma_1^2 = D\xi(1) < \infty$, тоді

$$g(u) = f_+(0,u) = 1 - \frac{c_+}{\widetilde{\Phi}_+(u)}\quad (\widetilde{\Phi}_+(u) = c_+ + \int_{+0}^{\infty} e^{-ux} d\Phi_+(x) \underset{u\to 0}{\to} \longrightarrow \infty). \tag{55}$$

Якщо $0 \le m_1 < \infty$, тоді $\gamma^+(\infty)$ – перестрибок через рівень $x \to \infty$ має щільність розподілу

$$\frac{d}{dz}P\{\gamma^+(\infty) < z\} = (E\gamma^+(0))^{-1}P\{\gamma^+(0) > z\}, z > 0. \tag{56}$$

Доведення. Генератрису для $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ можна одержати з (23) при $\mu \to \infty$.

$$\lim_{\mu\to\infty} B(s,u,\mu) = E[e^{-s\tau^+(0)-u\gamma^+(0)}, \tau^+(0) < \infty] = 1 - \frac{p_+(s)}{\varphi_+(s,iu)}.$$

Звідси випливає співвідношення

$$\frac{p_+(s)}{\varphi_+(s,iu)} = 1 - E[e^{-s\tau^+(0)-u\gamma^+(0)}, \tau^+(0) < \infty],$$

з якого визначається $\varphi_+(s,iu)$ за формулою (52).

При $m_1 < 0$ з (52) при $s \to 0$ з урахуванням а) випливає (53).

При $m_1 > 0$ $P\{\tau^+(\theta_\mu) < \infty\} = 1$, тому з (23) при $s \to 0$ знаходимо генератрису $\gamma^+(\theta_\mu)$

$$Ee^{-u\gamma^+(\theta_\mu)} = \frac{\mu}{\mu - u}(1 - \int_0^\infty Ee^{-\mu\xi^+(t)}dt[\int_0^\infty Ee^{-u\xi^+(t)}dt]^{-1}).$$

Зауважимо, що при $x \ge 0$ з урахуванням в)

$$\int_0^\infty P\{\xi^+(t) \le x\}dt = \int_0^\infty P\{\tau^+(x) > t\}dt = E\tau^+(x).$$

Тому з останнього співвідношення при $\mu \to \infty$ визначається

$$g(u) = \lim_{\mu\to\infty} Ee^{-u\gamma^+(\theta_\mu)} = 1 - E\tau^+(0)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ux}d_xP\{\tau^+(x) > t\}dt.$$

Звідси після зміни порядку інтегрування випливає (54).

Аналогічно при $m_1 = 0$ з урахуванням (49) з (23) при $s \to 0$ та $\mu \to \infty$ виводиться (55). Зокрема, у випадку A_2^+ згідно з (50) співвідношення (55) перепишеться так

$$g(u) =: Ee^{-\gamma^+(0)u} = 1 - \sigma_1 c_+ \frac{ug_+(iu)}{\sqrt{2}g_+(0)}. \tag{57}$$

Згідно наслідку 3.1 (див. [1], с.131) має місце співвідношення

$$Ee^{-u\gamma^+(\infty)} = (uE\gamma^+(0))^{-1}[1 - Ee^{-u\gamma^+(0)}]. \tag{58}$$

Воно також випливає з (23). Після обернення відносно u встановлюється (56). З (57) та (58) випливає, що

$$1 - g(u) = uE\gamma^+(0)Ee^{-u\gamma^+(\infty)} = c_+\sigma_1 \frac{ug_+(iu)}{\sqrt{2}g_+(0)}.$$

Це означає, що граничне значення компоненти канонічної факторизації $g_+(iu)$ у випадку A_2^+ пропорціональне генератрисі $\gamma^+(\infty)$

$$g_+(iu) = kEe^{-u\gamma^+(0)}, k = g_+(0),\ 2E\gamma^+(0) = \sigma_1 c_+.$$

Такий висновок про зв'язок між $g_+(u)$ та $E\exp\{-u\gamma^+(\infty)\}$ заслуговує на увагу при аналізі задач в теорії масового обслуговування та в теорії ризику при $m_1 \to 0$ (у критичному випадку).

Теорема 3 узагальнює попередні теореми, в яких встановлені співвідношення для розподілу супровідного функціоналу $\widetilde{\xi}^+(\theta_s)$ для максимуму через розподіл початкових сходникових функціоналів $\{\tau^+(0), \gamma^+(0)\}$ і узагальнює також деякі результати лем; зокрема для генератриси перестрибку $\gamma^+(0)$ одержано співвідношення більш загального плану в термінах розподілу абсолютного максимуму ($m_1 < 0$) та при $m_1 \geq 0$ в термінах інтегральних перетворень Лапласа-Стілт'єса монотонних необмежено зростаючих функцій.

Приклад. Нехай стрибки процесу $\xi(t)$ мають інтенсивність $\lambda = 1$ і х.ф.

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+i\alpha} + \frac{1}{1-i\alpha}\right) = \frac{2c + i\alpha(1-c)}{2(c+i\alpha)(1-i\alpha)};$$

$$\psi(\alpha) = \varphi(\alpha) - 1 = \frac{(c-1)i\alpha + 2(i\alpha)^2}{2(c+i\alpha)(1-i\alpha)}.$$

При $i\alpha = r$ кумулянтне рівняння $\psi(\alpha) = s$ набуває вигляду

$$2(1+s)r^2 - (1-c)(1+2s)r - 2sc = 0. \tag{58}$$

При умові $m_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c}\right) = 0, c = 1,\ D\xi(1) = 2$ (58) спроститься

$$(1+s)r^2 = s, \quad r_{1,2}(s) = \pm\sqrt{\frac{s}{s+1}}.$$

Через знайдені корені виражаються розподіли обох екстремумів

$$Ee^{i\alpha\xi^\pm(\theta_s)} = \frac{p_\pm(s)(1 \mp i\alpha)}{p_\pm(s) \mp i\alpha},\ P_+(s,x) = 1 - q_+(s)\exp\{-xp_+(s)\}, x \geq 0,$$

$$p_{\pm}(s)=P\{\xi^{\pm}(\theta_s)=0\}=\sqrt{\frac{s}{s+1}}, s\geq 0,\quad s^{-\frac{1}{2}}P_{+}(s,x)\underset{s\to 0}{\to}1+x.$$

Отже
$$\int_0^{\infty}e^{-st}P\{\xi^{\pm}(t)=0\}dt=\frac{1}{\sqrt{s(s+1)}}.$$
Після обернення відносно s одержимо

$$P\{\xi^{\pm}(t)=0\}=e^{-\frac{t}{2}}I_0\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{2}{\pi}e^{-\frac{t}{2}}\int_0^1\frac{\cos\frac{xt}{2}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Відповідно генератриса і розподіл $\tau^{+}(0)$ виражаються так

$$Ee^{-s\tau^{+}(0)}=q_{+}(s)=1-\sqrt{\frac{s}{s+1}},\ P\{\tau^{+}(0)>t\}=e^{-\frac{t}{2}}I_0\left(\frac{t}{2}\right).$$

При $m_1<0$ $(c<1)$ додатний корінь рівняння (58) визначає

$$p_{+}(s)=P\{\xi^{+}(\theta_s)=0\}\underset{s\to 0}{\to}p_{+}>0.$$

Корінь $r_{+}(0)=p_{+}$ при $c<1$ визначається з рівняння (див. (58), $s=0$)

$$2r^2-(1-c)r=0,\ r_{+}(0)=\frac{1-c}{2}=p_{+}>0, c<1.$$

Додатний корінь рівняння (58) $r_{+}(s)$ при $s>0$ незалежно від знаку m_1 визначає розподіл $\xi^{+}(\theta_s)$
$$P\{\xi^{+}(\theta_s)>x\}=q_{+}(s)e^{-r_{+}(s)x},\ x>0.$$
Так само від'ємний корінь рівняння (58) визначає розподіл $\xi^{-}(\theta_s)$

$$P\{\xi^{-}(\theta_s)<x\}=q_{-}(s)e^{\rho_{-}(s)x},\ x<0,$$

$$\rho_{-}(s)=-r_{-}(s)=cp_{-}(s),\ q_{-}(s)=1-p_{-}(s).$$
При умові $m_1<0$ $\rho_{-}(s)\underset{s\to 0}{\to}0$, тому $P\{\xi^{-}=-\infty\}=1$, а розподіл ξ^{+} визначається граничним співвідношенням

$$\lim_{s\to 0}P\{\xi^{+}(\theta_s)>x\}=P\{\xi^{+}>x\}=q_{+}e^{-p_{+}x}, x\geq 0,\ p_{+}=\frac{1-c}{2},\ q_{+}=\frac{1+c}{2}.$$

Згідно з (23) незалежно від знаку m_1

$$E[e^{-s\tau^{+}(\theta'\mu)-u\gamma^{+}(\theta'_{\mu})},\tau^{+}(\theta'_{\mu})<\infty]=\frac{\mu q_{+}(s)}{(p_{+}(s)+\mu)(1-u)}.\tag{59}$$

Після обернення відносно u знаходимо

$$E[e^{-s\tau^{+}(\theta'_{\mu})},\gamma^{+}(\theta'_{\mu})>z]=\frac{\mu q_{+}(s)}{p_{+}(s)+\mu}e^{-z},\tag{60}$$

отже після граничного переходу $(\mu\to\infty)$ знаходимо при $m_1\geq 0$

$$P\{\xi^{+}(\theta_s)>0;\gamma^{+}(0)>z\}=q_{+}(s)e^{-z},\ z>0.$$

З (60) після обернення відносно μ легко одержати (при $z > 0$)

$$P\{\xi^+(\theta_s) > x, \gamma^+(x) > z\} = P\{\xi^+(\theta_s) > x\}P\{\gamma^+(x) > z\} = q_+(s)e^{-xp_+(s)-z}. \tag{61}$$

При $m_1 \neq 0$ корені $r_{1,2}(s)$ рівняння (58) складніше виражаються через s. Відповідно розподіл $\xi^+(\theta_s)$ складніше залежить від s, але розподіл $\gamma^+(x)$ не залежить від $\xi^+(\theta_s)$ і від x. Розподіл $\xi^+(\theta_s)$ – показниковий з атомом в 0,

$$P\{\xi^+(\theta_s) > x\} = q_+(s)e^{-xp_+(s)},\ p_+(s) = r_1(s) > 0.$$

Отже при $m_1 \neq 0$ спільний розподіл $\{\xi_+(\theta_s), \gamma^+(x)\}$ також виражається співвідношеннями (59) – (61) (але з $p_+(s) \neq \sqrt{\frac{s}{s+1}}$). При $m_1 > 0$ і $s \to 0$ $P_+(s,x) = p_+(s)(1+x)+o(s)$, $p'_+(0) = p_-^{-1} = E\tau^+(0)$,

$$s^{-1}P_+(s,x) \underset{s\to 0}{\to} p'_+(0)(1+x),\ x > 0. \tag{62}$$

Отже $E\tau^+(x) = \int_0^\infty P\{\xi^+(t) < x\}dt = \int_0^\infty P\{\tau^+(x) > t\}dt = E\tau^+(0)(1+x)$.

1. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – К.: Наукова думка, 1990. – 264 с.
2. *Королюк В.С., Братийчук Н. С., Пирджанов Б.* Граничные задачи для случайных блужданий. – Ашхабат: Ылым, 1985. – 250 с.
3. *Гусак Д. В.* Розподіл перестрибкових функціоналів однорідного процесу з незалежними приростами // Укр. мат. журн. – 2002. – **53**, №3. – С. 303–322.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. – М.: Мир, 1967. – 752 с.
5. *Могульский А. А.* О величине первого перескока для процесса с независимыми приращениями // Теория вероят. и ее примен. – **21**, №3. – С. 486-496.
6. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 368 с.

Одержано 25.07.2003