УДК 512.44.6

А. А. Кирилюк (Ужгородский нац. ун-т)

О НЕПРИВОДИМЫХ p-ПОДГРУППАХ ГРУППЫ $\mathrm{GL}(q, R_p)$

All irreducible p-subgroups of the group $\mathrm{GL}(q, R_p)$ (q is a prime) are described up to conjugation in the case R_p is a ring of integers of the finite extension F_p of the rational p-adic field $\mathbb{Q}_p$ and $(F_p : \mathbb{Q}_p) \leq 2$.

Описуються з точністю до спряженості незвідні p-підгрупи групи $\mathrm{GL}(q, R_p)$ (q — просте число) у випадку, коли R_p — кільце цілих величин скінченного розширення F_p поля раціональних p-адичних чисел $\mathbb{Q}_p$ і $(F_p : \mathbb{Q}_p) \leq 2$.

Д. А. Супруненко [1] описал все несопряженные силовские p-подгруппы полной линейной группы над алгебраически замкнутым полем F. Для произвольного поля F такое описание получено в [2-4]. Силовские p-подгруппы полной линейной группы над дискретно нормированными кольцами изучались в [5, 6]. В [5, 7] описаны несопряженные p-подгруппы группы $\mathrm{GL}(n, Z_p)$ (Z_p — кольцо целых рациональных p-адических чисел) при $n \leq 3(p-1)$. Вопросы сопряженности силовских p-подгрупп полной линейной группы над областью главных идеалов R характеристики нуль в случае, когда p — необратимый в R элемент, исследованы в [8, 9]. В [10] классифицированы с точностью до сопряженности неприводимые силовские p-подгруппы группы $\mathrm{GL}(3, R_p)$, где R_p — кольцо целых величин конечного расширения F_p поля рациональных чисел p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. В [11] описаны несопряженные p-подгруппы группы $\mathrm{GL}(n, R_p)$ при $n \leq p$ в случае, когда $(F_p : \mathbb{Q}_p) = 2$, а в [12] — несопряженные минимальные неприводимые нильпотентные подгруппы группы $\mathrm{GL}(q, R_p)$, где $(F_p : \mathbb{Q}_p) \leq 2$.

В данной заметке классифицируются все несопряженные неприводимые p-подгруппы группы $\mathrm{GL}(q, R_p)$, где q — простое число, в случае, когда $(F_p : \mathbb{Q}_p) \leq 2$.

Как известно (см. [5]), описание с точностью до сопряженности p'-подгрупп группы $\mathrm{GL}(n, R_p)$ сводится к аналогичной задаче для группы $\mathrm{GL}(n, F_p)$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать p-подгруппы группы $\mathrm{GL}(q, R_p)$.

1. Пусть $F_p = \mathbb{Q}_p$. Тогда $R_p = Z_p$ и в кольце Z_p все элементы конечного порядка образуют циклическую группу порядка $p-1$ при $p > 2$ и группу порядка 2 при $p = 2$. Поэтому при $p > 2$ в группе Z_p^* нет p-элементов и из [2] вытекает, что в группе $\mathrm{GL}(q, Z_p)$ неприводимые q-подгруппы существуют лишь при $q = p - 1$, откуда $q = 2$, $p = 3$ и

$$H_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \tilde{\varepsilon} \rangle \quad (\varepsilon^3 = 1)$$

— единственная с точностью до сопряженности неприводимая 3-подгруппа группы $\mathrm{GL}(2, Z_3)$. Если $p = 2$, то, как следует из [2], неприводимые 2-подгруппы группы $\mathrm{GL}(q, Z_2)$ существуют лишь при $q = 2$. Как вытекает из [15], неприводимые 2-подгруппы группы $\mathrm{GL}(2, Z_2)$ с точностью до сопряженности исчерпываются группами

$$H_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \tilde{i} \rangle \quad (i^4 = 1), \; H_3 = \left\langle \tilde{i}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $H_2 \cong C_4$ — циклическая группа порядка 4, а H_3 изоморфна группе диэдра D_4 порядка 8.

2. Пусть теперь $(F_p : \mathbb{Q}_p) = 2$. Строение квадратичных расширений поля $\mathbb{Q}_p$ вытекает из следующих утверждений (см. [13]).

Лемма 1. *Пусть* $(F_p : \mathbb{Q}_p) = 2$. *Тогда*:
I. *Если* $p \neq 2$, *то существует с точностью до изоморфизма три квадратичных поля над* $\mathbb{Q}_p$:

1) $F_p = \mathbb{Q}_p(\xi)$ (ξ — *первообразный корень степени* $p^2 - 1$ *из единицы*) — *единственное неразветвленное расширение поля* $\mathbb{Q}_p$;

2) $F_p = \mathbb{Q}_p(\sqrt{p})$;

3) $F_p = \mathbb{Q}_p(\sqrt{\omega p})$ (ω — *первообразный корень степени* $p-1$ *из* 1).

II. *Если* $p = 2$, *то существует с точностью до изоморфизма* 7 *квадратичных полей над* $\mathbb{Q}_2$: $F_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{d})$, $(d = -1; \pm 2; \pm 5; \pm 10)$, *причем* $\mathbb{Q}_2(\sqrt{5}) = \mathbb{Q}_2(\varepsilon)$ $(\varepsilon^3 = 1)$.

Лемма 2. 1) *Пусть* $p > 2$ *и*

$$F_p = \begin{cases} \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}), & p \equiv 1(\mathrm{mod} 4); \\ \mathbb{Q}_p(\sqrt{\omega p}), & p \equiv -1(\mathrm{mod} 4). \end{cases}$$

Тогда $F_2 \subset \mathbb{Q}_p(\varepsilon)(\varepsilon^p = 1)$.

2) *Пусть* $p > 2$ *и*

$$F_p = \begin{cases} \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}), & p \equiv -1(\mathrm{mod} 4); \\ \mathbb{Q}_p(\sqrt{\omega p}), & p \equiv 1(\mathrm{mod} 4). \end{cases}$$

Тогда $(F_p(\varepsilon) : F_p) = p - 1(\varepsilon^p = 1)$.

Рассмотрим следующие случаи:

1. $p > 2$. Пусть P_p — силовская p-подгруппа группы F_p^*. Как вытекает из лемм 1, 2, для поля F_p различаются два случая:

$$1)\ F_2 \subset \mathbb{Q}_p(\varepsilon) \quad (\varepsilon^p = 1); \tag{I}$$

$$2)\ F_2 \not\subset \mathbb{Q}_p(\varepsilon). \tag{II}$$

В соответствии с этим, будем называть квадратичное поле F_p полем типа (I) либо типа (II).

При $p > 2$ $|P_p| = 1$ за исключением случая, когда $p = 3$ и F_3 — поле типа (I). В этом последнем случае $|P_3| = 3$ и $P_p = \langle \varepsilon |\ \varepsilon^3 = 1 \rangle$.

Лемма 3. *Пусть* F_p — *квадратичное расширение поля* $\mathbb{Q}_p$ *и* $p > 2$. *Неприводимые силовские* p-*подгруппы группы* $\mathrm{GL}(q, F_p)$, *существующие тогда и только тогда, когда* $q = p = 3$ *или* $p = 2q + 1$, *являются циклическими группами порядка* p, *если* $F_3 \neq \mathbb{Q}_3(\varepsilon)$. *Если* $F_3 = \mathbb{Q}_3(\varepsilon)$, *то силовская* 3-*подгруппа группы* $\mathrm{GL}(q, F_3)$ *сопряжена с группой*

$$G_3 = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $|P_p| = 1$, $L_p = F_p(\varepsilon)$ $(\varepsilon^p = 1)$ и $(L_p : F_p) = m > 1$. Тогда, в силу [2], неприводимые нетривиальные силовские p-подгруппы группы $\mathrm{GL}(n, F_p)$

существуют тогда и только тогда, когда $n = mp^r$ и сопряжены в группе $\mathrm{GL}(mp^r, F_p)$ со сплетением $G_{mp^r} = \tilde{P}'_p \wr N_{p^r}$, где $\tilde{P}'_p$ — силовская p-подгруппа группы L_p^*, рассматриваемая как подгруппа группы $\mathrm{GL}(m, F_p)$, а N_{p^r} — силовская p-подгруппа симметрической группы S_{p^r}. Отсюда $q = mp^r$ и, в силу $m > 0$, $q = m$, $r = 0$. Поэтому неприводимая силовская p-подгруппа группы $\mathrm{GL}(q, F_p)$ сопряжена с группой $G_p = \tilde{P}'_p \wr N_{p^0} = \tilde{P}'_p$. Так как $\tilde{P}'_p$ — циклическая группа порядка p, то, в силу леммы 2, если F_p — поле типа (I), то $(F_p(\varepsilon) : F_p) = p - 1$, откуда $q = p - 1$ и поэтому $p = 3$, $q = 2$. Если F_p — поле типа (II), то $(F_p(\varepsilon) : F_p) = \frac{p-1}{2}$, откуда $p = 2q + 1$.

Пусть $|P_p| = p^l > 1$. Тогда, в силу [2], неприводимые силовские p-подгруппы группы $\mathrm{GL}(n, F_p)$ существуют тогда и только тогда, когда $n = p^r$ $(r > 0)$ и сопряжены с группой $G_{p^r} = P_p \wr N_{p^r}$. Так как $n = q$ — простое число, то $r = 1$ и $q = p$. Тогда $G_p = P_p \wr N_p$ — неприводимая силовская p-подгруппа группы $\mathrm{GL}(p, F_p)$. Так как F_p — квадратичное поле типа (I), то $F_p = \mathbb{Q}_p(\varepsilon)$ и $(\mathbb{Q}_p(\varepsilon) : \mathbb{Q}_p) = p - 1 = 2$, откуда $p = 3$, $F_3 = \mathbb{Q}_3(\varepsilon)$ и, как легко видеть, H_3 сопряжена в группе $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Q}_3(\varepsilon))$ с группой (1). Лемма доказана.

Теорема 1. 1) *Пусть F_p — неразветвлённое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}_p$ $(p > 2)$. Неприводимые силовские p-подгруппы группы* $\mathrm{GL}(q, R_p)$*, существующие тогда и только тогда, когда $q = 2$, $p = 3$, сопряжены в* $\mathrm{GL}(2, R_2)$ *с группой*

$$H_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \tilde{\varepsilon} \rangle \quad (\varepsilon^3 = 1).$$

2) *Пусть F_p — вполне разветвленное расширение поля $\mathbb{Q}_p$ $(p > 2)$ и $F_p \neq \mathbb{Q}_3(\varepsilon)$ $(\varepsilon^3 = 1)$. Неприводимые силовские p-подгруппы группы* $\mathrm{GL}(q, R_p)$*, существующие тогда и только тогда, когда $q = 2$, $p = 3$; $p = q = 3$ либо $q = \frac{p-1}{2}$ с точностью до сопряженности исчерпываются группами*:

а) $H_1 = \langle \tilde{\varepsilon} \rangle$, $H_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathrm{GL}(2, Z_3[\sqrt{3}])$;

б) $H_3 = \langle \tilde{\xi} \rangle \subset \mathrm{GL}(3, Z_3[\sqrt{-3}])$ ($\xi^9 = 1$; *ξ — корень неприводимого над $Z_3[\sqrt{-3}]$ делителя полинома деления круга $\Phi_9(x)$; $\tilde{\xi}$ — матрица оператора умножения на ξ в кольце $Z_3[\sqrt{-3}]$ в базисе* $1, \xi, \xi^2$);

в) $H_5 = \langle \tilde{\theta} \rangle \subset \mathrm{GL}(q, R_p)$ ($q = \frac{p-1}{2}$; *θ — первообразный корень степени p из* 1).

Доказательство. Пусть H — неприводимая силовская p-подгруппа группы $\mathrm{GL}(q, R_p)$ и $R_p \neq Z_3[\varepsilon]$. Тогда по лемме 1 H — неприводимая циклическая группа порядка p. Значит H — минимальная неприводимая абелева подгруппа группы $\mathrm{GL}(q, R_p)$ и утверждение теоремы вытекает из леммы 1 и предложения 3 работы [13].

Таким образом осталось рассмотреть случай $q = p = 3$ и $R_3 = Z_3[\varepsilon]$ $(\varepsilon^3 = 1)$. Тогда, как вытекает из леммы 1, неприводимая силовская 3-подгруппа группы $\mathrm{GL}(3, Z_3[\varepsilon])$ сопряжена в ней с группой G_3 вида (1). Легко видеть, что, G_3 изоморфна группе

$$G = \left\langle a_i, b | a_i^3 = b^3 = 1, a_i a_j = a_j a_i, b^{-1} a_1 b = a_2, b^{-1} a_2 b = a_3, b^{-1} a_3 b = a_1 \right\rangle \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

которая представима как группа с двумя образующими: $G = \langle a, b \rangle$. Отсюда и из теоремы работы [10] получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Неприводимые* 3*-подгруппы группы* $\mathrm{GL}(3, Z_3[\varepsilon])$ *с точностью до со-*

пряженности исчерпывается группами:

$$V_1 = \left\langle \varepsilon E, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$V_2 = \left\langle \varepsilon E, \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$V_3 = \left\langle \varepsilon E, \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & \varepsilon & t \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ -1 & -\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$U_1 = \left\langle V_1, \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, U_2 = \left\langle V_2, \begin{pmatrix} \varepsilon & -t & -\varepsilon t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, U_3 = \left\langle V_3, \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где V_i — минимальные неприводимые 3-подгруппы, U_i $(i = 1, 2, 3)$ — неприводимые силовские 3-подгруппы группы $\mathrm{GL}(3, Z_3[\varepsilon])$, $t = 1 - \varepsilon$ — простой элемент кольца $Z_3[\varepsilon]$.

Доказательство. Так как V_1 — единственная с точностью до сопряженности минимальная неприводимая 3-подгруппа группы $GL(3, \mathbb{Q}_3[\varepsilon])$, а $G_3 = \langle A_1, A_2, A_3, B\rangle$, то, как легко видеть, $A_1A_2A_3 = \varepsilon E$, $A = A_2A_3^2$. Поэтому в качестве образующих группы G_3 можно взять матрицы $\varepsilon E, A, A_3, B$ и $G_3 = \langle V_1, A_3\rangle$. Из [12] следует, что группами V_i $(i = 1, 2, 3)$ исчерпываются с точностью до сопряженности минимальные неприводимые 3-подгруппы группы $\mathrm{GL}(3, Z_3[\varepsilon])$. Отсюда и из вышесказанного, используя [10], легко получить, что группами U_i $(i = 1, 2, 3)$ исчерпываются несопряженные неприводимые силовские 3-подгруппы группы $\mathrm{GL}(3, Z_3[\varepsilon])$. Так как $(G_3 : : U_1) = 3$, то U_1 — максимальная подгруппа группы G_3. Поэтому группа $GL(3, Z_3[\varepsilon])$ не содержит неприводимых 3-подгрупп, отличных от U_i и V_i $(i = 1, 2, 3)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из теорем 1, 2 вытекает описание с точностью до сопряженности всех неприводимых p-подгрупп группы $\mathrm{GL}(q, R_p)$ в случае $(F_p : \mathbb{Q}_p) = 2$ и $p > 2$.

Замечание 2. $p = 2$. Из [12] следует, что при $q > 3$ и $(F_2 : \mathbb{Q}_2) \leq 2$ в группе $\mathrm{GL}(q, F_2)$ нет неприводимых нильпотентных групп. При $q = 3$, в силу [10], группа $\mathrm{GL}(3, F_2)$ также не содержит неприводимых 2-подгрупп. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $q = 2$. Описание неприводимых 2-подгрупп группы $\mathrm{GL}(2, Z_2)$ вытекает из [15].

Пусть поэтому $(F_2 : \mathbb{Q}_2) = 2$. Тогда по лемме 1 $F_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{d})$ $(d = -1; \pm 2; \pm 5; \pm 10)$ и $R_2 = Z_2[\sqrt{d}]$.

Описание неприводимых 2-подгрупп группы $GL(2, Z_2[i])$ $(i^2 = -1)$ вытекает из [14], а при $d \neq -1$ — из [11, 12].

Введем следующие обозначения. Пусть $F_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ — разветвленное расширение поля $\mathbb{Q}_2$. Тогда

$$2 = \Theta t^2 (\Theta \in R_2^*), \quad t = \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{при } d \in \{\pm 2, \pm 10\}; \\ \sqrt{d} - 1, & \text{при } d \in \{-1, -5\}. \end{cases} \tag{2}$$

где t — простой элемент кольца R_2 .

Рассмотрим группы:

$$D_{2^m} = \left\langle a, b | \, a^2 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle \ (m > 1);$$

$$K_{2^m} = \left\langle a, b \, \middle| \, a^{2^m} = 1, a^{2^{m-1}} = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle \ (m > 1);$$

$$V_{2^m} = \left\langle a, b \mid a^{2^m} = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{2^m - 1} \right\rangle \ (m > 2).$$

Обозначим

$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} (1, -\sqrt{2}) & \text{при } d = -2, \\ \left(\frac{1-2\sqrt{2}}{\sqrt{-15}}, \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{-15}}\right) & \text{при } d = 2, \\ (\sqrt{-5}, 2) & \text{при } d = -5, \\ \left(\frac{1-2\sqrt{10}}{\sqrt{-55}}, \frac{2+\sqrt{10}}{\sqrt{-55}}\right) & \text{при } d = 10, \\ (3, \sqrt{-10} & \text{при } d = -10. \end{cases} \tag{3}$$

В этих обозначениях справедливо утверждение.

Предложение 1. *Пусть* $R_2 = Z_2[\sqrt{d}]$ $(d \in \{\pm 2, -5; \pm 10)$. *С точностью до сопряженности неприводимые 2-подгруппы группы* $GL(2, R_2)$ *исчерпываются*:

1) *Абелевыми группами*

$$H_1 = \langle \tilde{i} \rangle, \quad H_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad H_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \right\rangle \quad (d = 2);$$

$$H_1 = \langle \tilde{i} \rangle, \quad H_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad H_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \right\rangle \quad (d = -2);$$

$$H_1 = \langle \tilde{i} \rangle, \quad H_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -5^{-1}t \\ t & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (d = 10);$$

$$H_1 = \langle \tilde{i} \rangle, \quad H_7 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 5^{-1}t \\ t & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (d = -10);$$

$$H_1 = \langle \tilde{i} \rangle, \quad H_8 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -\Theta t \\ t & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (d = -5).$$

2) *Неабелевыми группами*

$$D_4^{(1)} = \left\langle \tilde{i}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad D_4^{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\Theta t & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$D_4^{(3)} = \left\langle \begin{pmatrix} t+1 & 2 \\ -(1+t+\Theta^{-1}) & -(t+1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t+1 & 2 \\ -(t+\Theta^{-1}) & -(t+1) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$(D_4^{(i)} \cong D_4 (i = 1, 2, 3))$;

$$K_4^{(1)} = \left\langle \tilde{i}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \right\rangle, K_4^{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\Theta t & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta - \alpha & t\beta \\ \Theta t\beta & \alpha - \beta \end{pmatrix} \right\rangle$$

$(K_4^{(i)} \cong K_4)$ $(d \in \{\pm 2, -5; \pm 10)$;

$$D_8^{(1)} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$K_8^{(1)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\Theta t & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{-15}} \begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} \\ 4-\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle (D_8^{(i)} \cong D_8, K_8^{(i)} \cong K_8)\ (d=2);$$

$$U_8^{(1)} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$U_8^{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t+1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle (U_8^{(i)} \cong U_8; d=-2).$$

Доказательство. Описание минимальных неприводимых 2-подгрупп следует из [12]. Остальные группы описаны в [11].

Предложение 2. [14]. *Неприводимые 2-подгруппы группы* $\mathrm{GL}(2, Z_2[i])$ *с точностью до сопряженности исчерпываются группами*:

1) $H = \left\langle \tilde{\xi} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$;

2) $D_4^{(1)} = \left\langle \tilde{i}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $D_4^{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ -it & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$,
$D_4^{(3)} = \left\langle \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \right\rangle (t = i-1)$, *изоморфными группе диэдра* D_4 *порядка* 8;

3) $K_4^{(1)} = \left\langle \tilde{i}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\rangle$, $K_4^{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ -it & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\rangle$, *изоморфными группе кватернионов* K_4 *порядка* 8;

4) $N^{(1)} = \left\langle iE, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $N^{(2)} = \left\langle iE, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ it & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, *изоморфными группе* $N = \langle a, b, c | a^4 = b^2 = c^2 = 1,\ ab = ba,\ ac = ca,\ c^{-1}bc = = a^2 b \rangle$;

5) $M^{(1)} = \left\langle \tilde{\xi}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $M^{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & it \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, *изоморфными группе* $M = \langle a, b | a^8 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^5 \rangle$;

6) $L^{(1)} = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$,
$L^{(2)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, *изоморфными группе* $L = \langle a, b, c | a^4 = b^4 = c^2,\ ab = ba,\ c^{-1}ac = b,\ c^{-1}bc = a \rangle$.

Замечание. Из теоремы 2 и предложений 1, 2 вытекает описание всех несопряженных p-подгрупп группы $\mathrm{GL}(q, R_p)$ в случае $(F_p : \mathbb{Q}_p) = 2$.

1. *Супруненко Д. А.* Линейные p-группы //Докл. АН БССР. – 1960. – **4**, №6. – С. 233–235.
2. *Вольвачев Р. Т.* p-подгруппы Силова полной линейной группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, №5. – С. 1031–1054.
3. *Конюх В. С.* О линейных p-группах // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. – 1987. – С. 3–8.
4. *Leedham-Green C. R., Pleksen W.* Some remarks of Sylov subgroups linear groups // Math. Z. – 1980. – **191**. – P. 529–535.

5. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А.* Силовские p-подгруппы полной линейной группы над дискретно нормированными кольцами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – №5. – С. 326–329.
6. *Гудивок П. М.* О силовских p-подгруппах полной линейной группы над полными дискретно нормированными кольцами // Укр. мат. журнал. – 1991. – **43**, №7–8. – С. 918–924.
7. *Ващук Ф. Г., Гудивок П. М.* Про цілочислові p-адичні зображення скінчених абелевих p-груп // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – №1. – С. 3–6.
8. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* О силовских подгруппах полной линейной группы над областями целостности // Доп. НАН України. – 1995. – №8. – С. 5–7.
9. *Гудивок П. М., Рудько В. П., Юрченко Н. В.* О силовских p-подгруппах полной линейной группы над областями главных идеалов // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – Вип. 6. – С. 31–46.
10. *Кирилюк А. А.* Неприводимые силовские p-подгруппы группы $\mathrm{GL}(3, R_p)$ // Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 49–57.
11. *Сапужак Т. М.* p-подгруппы полной линейной группы над P-адическими квадратичными кольцами. – Ужгород, 1986. – 33 с. – Деп. в Укр. НИИНТИ, №1778.
12. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А.* О минимальных неприводимых подгруппах полной линейной группы над кольцом целых P-адических чисел // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 37–43.
13. *Hosse H.* Zahlentheorie. – Berlin, 1963.
14. *Кирилюк О. А.* Скінченні підгрупи групи $\mathrm{GL}(2, Z_2[i])$ // В сб.: Матеріали другої конференції молодих науковців Західного наукового центру АН УРСР. – Ужгород, 1976. – С. 106–113. – Деп. в ВИНИТИ 6.10.1981, №80575.
15. *Кирилюк А. А.* Конечные подгруппы группы $\mathrm{GL}(3, Z_2)$ // В сб.: Теорет. и приклад. вопр. диф. ур-ний и алгебры. – Киев, 1978. – С. 114–119.

Получено 16.09.2003