УДК 512.647.2:512.562

Д. С. Чеботарев (Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев)

О НЕОГРАНИЧЕННЫХ Ч. У. МНОЖЕСТВАХ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ, ИМЕЮЩИХ СИЛЬНО ПОЛОЖИТЕЛЬНУЮ ФОРМУ ТИТСА

In this paper we study unbounded posets with nontrivial involution having strongly positive Tits form.

У статті вивчаються необмежені частково впорядковані множини з нетривіальною інволюцією, що мають сильно позитивно означену форму Тітса.

Квадратичную форму Титса ввел П. Габриель [1] для представлений колчанов (ориентированных графов). В этой же работе доказано, что колчан имеет конечный тип (т. е. конечное, с точностью до эквивалентности, число неразложимых представлений) тогда и только тогда, когда он имеет положительно определенную форму Титса. После этого результата появилось много работ, в которых рассматривается связь между свойствами различных представлений и свойствами квадратичных форм; см., например, [2–4]. Отметим, что форма Титса определена для частично упорядоченных (сокращенно ч. у.) множеств в [5] и для широкого класса задач — в [6] и [7].

Представления ч. у. множеств введены в [8]; ч. у. множества конечного типа описаны в явном виде М. М. Клейнером [9], а Ю. А. Дрозд [5] показал, что ч. у. множество имеет конечный тип тогда и только тогда, когда его форма Титса слабо положительна. Положительно определенные формы при этом явно не возникают, но при дальнейшем изучении категорий представлений ч. у. множеств они играют уже значительную роль [10]; при этом существенно используется описание положительно определенных форм Титса для неограниченных (т. е. без минимальных и максимальных элементов) ч. у. множеств, полученное в [11]. Рассмотрение бесконечных множеств вызвано тем, что многие общие свойства проявляются для конечных ч. у. множеств, начиная с некоторого порядка N; и если изучать такие свойства, то в первую очередь естественно рассматривать случай бесконечных множеств. В настоящей статье изучаются неограниченные ч. у. множества с нетривиальной инволюцией, которые имеют положительно определенную форму Титса (ч. у. множества с тривиальной инволюцией — это по сути ч. у. множества без инволюции).

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук В. М. Бондаренку за постановку задачи и полезные обсуждения.

1. Формулировка основного результата. Пусть $S = (A, *)$ — ч. у. множество A с инволюцией $*$ (которое может быть как конечным, так и бесконечным); отношение порядка обозначаем символом $\prec$. Для удобства, вместо $i \in A$ пишем $i \in S$. Рассмотрим следующую целочисленную квадратичную форму

$$q'_S = x_0^2 + \sum_{i\in S} \varepsilon_i x_i^2 + \sum_{i<j, i,j\in S} x_i x_j - x_0 \sum_{i\in S} x_i,$$

где $\varepsilon_i = 1$, если $i^* = i$, и $\varepsilon_i = \frac{1}{2}$, если $i^* \neq i$, которая определена на множестве всех (целочисленных) векторов $x = (x_0, x_i \mid i \in S)$ с конечным числом ненулевых координат. *Формой Титса ч. у. множества с инволюцией* S называется квадратичная форма $q = q_S$, которая получается из формы q'_S отождествлением x_{i^*} и x_i для всех

$i \in S$, таких, что $i^* \neq i$. Предлагаемая здесь интерпретация формы Титса для ч. у. множеств с инволюцией (которая является частным случаем форм Титса для боксов [6, 7]) принадлежит В. М. Бондаренку.

Форма q_S называется *положительно определенной*, или просто *положительной*, если $q_S(x) > 0$ для любого ненулевого x; этом случае пишем $q_S > 0$.

Подмножество $T \subset S$ называется *замкнутым*, если $i^* \in T$ для любого $i \in T$ (в этом случае инволюция на T индуцируется инволюцией на S). На незамкнутом подмножестве $T \subset S$ также имеется индуцированная инволюция $\circ$: для $i \in T$, $i^\circ = j$, если $j \in T$ и $i^* = j$; в противном случае $i^\circ = i$. Форма Титса незамкнутого подмножества рассматривается всегда относительно этой инволюции. Если $q_S > 0$, то $q_T > 0$ для любого замкнутого $T \subset S$, но q_T не обязательно положительна, если T незамкнуто. Назовем форму Титса *сильно положительной*, если и $q_T > 0$ для любого незамкнутого подмножества T.

Положим $I(S) = \{i \in S \mid i^* \neq i\}$.

Теорема. *Пусть S — неограниченное ч. у. множество с нетривиальной инволюцией. Тогда форма Титса q_S сильно положительна в том и только в том случае, когда $|I(S)| = 2$ и S является прямой суммой двух цепей, одна из которых полностью содержит $I(S)$.*

2. Вспомогательные леммы. В этом пункте мы докажем некоторые леммы, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Для цепей вида $T = \{1 \prec 2 \prec 3 \prec 4\}$, где $i^* \neq i$ для любого i, $q_T(0,-1,1) = 0$ и следовательно форма Титса q_T не является положительной.*

Лемма 2. *Для множества $T = \{1 \prec 2, 3 \prec 4 \mid 1^* = 2, 3^* = 4\}$, $q_T(2,1,1) = 0$ и следовательно q_T не является положительной.*

Лемма 3. *Для множества $T = \{1 \prec 2 \prec 4 \prec 5 \prec \ldots \prec 9, 1 \prec 3 \prec 4 \mid 1^* = 3\}$, $q_T(1,3,2,-1,-1,-1,-1,-1,-1) = 0$ следовательно q_T не является положительной.*

Лемма 4. *Для следующих множеств форма Титса не является положительной:*

$A_1 = \{1 \prec 2 \prec 4 \prec 5 \prec \ldots \prec 10, 3 \prec 4 \mid 1^* = 2,\ 3^* = 4\}$,
$B_1 = \{1 \prec 2 \prec 4 \prec 5 \prec \ldots \prec 10, 1 \prec 3 \prec 4 \mid 1^* = 2,\ 3^* = 4\}$,
$C_1 = \{1 \prec 2,\ 3 \prec 4 \prec 5 \prec \ldots \prec 10, 1 \prec 4 \mid 1^* = 2,\ 3^* = 4\}$,
$C_2 = \{1 \prec 2 \prec 5,\ 3 \prec 4 \prec 5,\ 1 \prec 4 \mid 1^* = 2,\ 3^* = 4\}$,
$D_1 = \{1 \prec 2 \prec 5 \prec 6,\ 3 \prec 4 \prec 7 \prec 8,\ 1 \prec 4,\ 3 \prec 2 \mid 1^* = 2,\ 3^* = 4\}$,
$D_2 = \{1 \prec 2 \prec 5 \prec 6,\ 3 \prec 4 \prec 5,\ 1 \prec 4,\ 3 \prec 2 \mid 1^* = 2,\ 3^* = 4\}$,
$E_1 = \{1 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec \ldots \prec 10,\ 2 \prec 3, \mid 1^* = 4,\ 2^* = 3\}$.

Доказательство следует из равенств:
$q_{A_1}(1,2,2,-1,-1,-1,-1,-1,-1) = -4$,
$q_{B_1}(1,2,2,-1,-1,-1,-1,-1,-1) = 0$,
$q_{C_1}(3,4,-2,-1,-1,-1,-1,-1,-1) = 0$, $q_{C_2}(3,2,2,-2) = -1$,
$q_{D_1}(0,-1,-1,1,1,1,1) = q_{D_2}(1,1,1,-1,-1) = 0$,
$q_{E_1}(1,2,2,-1,-1,-1,-1,-1,-1) = 0$.

Лемма 5. *Для следующих множеств форма Титса не положительно определена:*

$S_1 = \{1, 2 \mid 1^* = 2\}$,

$S_2 = \{1 \prec 2 \prec 4,\ 3 \prec 4 \mid 1^* = 2\ \}$,
$S_3 = \{1 \prec 3 \prec 4 \prec \ldots \prec 9,\ 2 \prec 3 \mid 1^* = 3\}$,
$S_4 = \{1 \prec 2, 3, 4 \mid 1^* = 2\}$,
$S_5 = \{1 \prec 2 \prec 3, 2 \prec 4 \mid 1^* = 2\}$,
$S_6 = \{1 \prec 2 \prec 4, 1 \prec 3 \prec 4 \mid 1^* = 4\}$.

Доказательство следует из равенств:
$q_{S_1}(1,1) = q_{S_2}(1,1,1,-1) = 0$;
$q_{S_3}(1,3,2,-1,-1,-1,-1,-1,-1) = q_{S_4}(2,1,1,1) = 0$;
$q_{S_5}(0,-1,1,1) = q_{S_6}(0,-1,1,1) = 0$.

3. Доказательство теоремы: необходимость. На протяжении этого пункта S — то же, что в условии теоремы.

Предложение 1. *Если $|I(S)| > 2$, то форма Титса для S не является сильно положительной.*

Доказательство. Достаточно показать, что S содержит подмножество, изоморфное одному из множеств, перечисленных в леммах 1–4.

Если $i \in I(S)$, то i и i^* сравнимы, иначе $\{i, i^*\}$ изоморфно множеству S_1 из леммы 5, и тогда q_S не определена положительно.

Поскольку в $I(S)$ есть две различные пары i, i^* и j, j^*, то в силу леммы 1 и леммы 2 с точностью до двойственного порядка и перестановок $i \leftrightarrow j$, $i \leftrightarrow i^*$, $j \leftrightarrow j^*$, возможны лишь такие порядки на $\{i, i^*, j, j^*\}$: a) $i \prec i^* \prec j$, $j^* \prec j$; b) $i \prec i^* \prec j$, $i \prec j^* \prec j$; c) $i \prec i^*$, $i \prec j$, $j^* \prec j$; d) $i \prec i^*$, $i \prec j$, $j^* \prec j$, $j^* \prec i^*$; e) $i \prec j \prec i^*$, $j^* \prec j$.

Случай a). Выберем в S элементы $d_1, d_2, \ldots, d_6$, такие, что $j \prec d_1 \prec d_2 \prec \ldots \prec d_6$. Если среди них есть два $d_k, d_l, 1 \leq k < l \leq 6$, связанные инволюцией, то множество $\{i, i^*, d_k, d_l\}$ изоморфно множеству T_1 из леммы 1. Если таких нет, то тогда $\{i, i^*, j^*, j, d_1, \ldots, d_6\}$ (с индуцированной инволюцией) изоморфно A_1 из леммы 4.

Случай b) аналогичен (единственное отличие — изоморфность мнгожества $\{i,\ i^*,\ j^*, j,\ d_1, \ldots,\ d_6\}$ множеству B_1 из леммы 4).

Случай c). Если существует $d \in S : d \succ i^*, d \succ j$, то тогда множество $\{i, i^*, j^*, j, d\}$ изоморфно множеству C_2 из леммы 4. В противном случае существуют элементы $d_1, d_2,\ \ldots, d_6$, такие, что $j \prec d_1 \prec d_2 \prec \ldots \prec d_6$, причем они будут несравнимы с i^*. Аналогично a), если среди них есть два d_k и d_l, связанные инволюцией, то множество $\{j^*, j, d_k, d_l\}$ изоморфно множеству T_1 из леммы 1; если же нет, то $\{i, i^*, j^*, j, d_1, \ldots, d_6\}$ с индуцированной инволюцией изоморфно множеству C_1 из леммы 4.

Случай d). Если существует $d \in S : d \succ i^*, d \succ j$, то выберем $d_1 \in S$, $d \prec d_1$; тогда если $d_1 \neq d^*$ подмножество $\{i, i^*, j^*, j, d, d_1\}$ изоморфно множеству D_2 из леммы 4, в противном случае множество $\{j^*, j, d_k, d_l\}$ изоморфно множеству T_1 из леммы 1.

Если же такого $d \in S$ нет, то существуют элементы d_1, d_2, d_3, d_4 из S, такие, что $i^* \prec d_1 \prec d_2$, $j \prec d_3 \prec d_4$ и подмножество $\{i, i^*, d_1, d_2,\ j^*, j,\ d_3,\ d_4\}$ изоморфно множеству D_1 из леммы 4.

Случай e). Выберем в S элементы $d_1, d_2, \ldots, d_6$, такие, что $i^* \prec d_1 \prec d_2 \prec \ldots \prec d_6$. Если среди них есть два d_k, d_l, связанные инволюцией, то множество $\{i, i^*, d_k, d_l\}$ изоморфно множеству T_1 из леммы 1. Если же нет, то тогда подмножество $\{i,\ i^*, j^*,\ j,\ d_1,\ d_2,\ \ldots, d_6\}$ изоморфно множеству E_1 из леммы 4.

Предложение 1 доказано.

Положим $[a,b] = \{y \in S \mid a \preceq y \preceq b\}$, $\{x\}^> = \{y \in S | y > x\}$, $\{x\}^< = \{y \in S | y < x\}$.

Предложение 2. *Если* $|I(S)| = 2$ *и форма Титса* q_S *положительно определена, то* S *является прямой суммой двух цепных множеств, одно из которых содержит* $I(S)$.

Доказательство. Пусть $I(S) = \{a, b\}, (a^* \neq b)$. Доказательство разобьем на несколько шагов.

1) Из леммы 5, случай 1, следует, что $a \prec b$ или $a \succ b$. Не ограничивая общности можно считать, что $a \prec b$.

2) Покажем, что если $d \succ a$, то $d \succ b$ или $d \prec b$.

Предположим, d не сравним с b. Поскольку в S нет минимальных и максимальных элементов, существуют $d_1, d_2, \dots, d_6$ из S, такие, что $a \succ d_1 \succ d_2 \succ \dots \succ d_6$. Среди них нет связанных инволюцией (поскольку $I(S) = \{a, b\}$), поэтому $\{a, b, d, d_1, d_2, \dots, d_6\}$ — замкнутое подмножество в S, изоморфное двойственному к множеству S_3 из леммы 5, что противоречит положительной определенности формы Титса для S. Таким образом, d сравним с b. Перейдя к двойственным множествам, получаем, что если $d \prec b$, то $d \succ a$ или $d \prec a$.

3) Из леммы 5 следует, что $A = [a, b] \cup \{a\}^< \cup \{b\}^>$ — цепь. Действительно, если A не цепь, то существует $c, d \in A$ — несравнимые; тогда $\{a, b, c, d\}$ изоморфно одному из множеств S_5, S_6, или двойственному к S_5.

Итак, если в S нет элемента c, несравнимого с a и b , то из 1) — 3) следует, что $S = A$ и, таким образом, предложение доказано.

Предположим теперь, что существует $c \in S$, несравнимый с a и b. Тогда положим $B = \{c\} \cup \{c\}^< \cup \{c\}^>$.

4) Пусть c_1 не сравним с a и b. Покажем, что если $d \succ c_1$ или $d \prec c_1$, то d не сравним с a и b. Пусть, например, $d \succ c_1$. Предположим, что d сравним с a или с b. Тогда d сравним и с a, и с b (в силу 2), причем $d \succ b$, поскольку в случае $d \prec b$ имеем $c_1 \prec b$, что противоречит несравнимости c_1 с b. Тогда $\{a, b, c_1, d\}$ — замкнутое подмножество S, изоморфное множеству S_2 из леммы 5, что противоречит положительной определенности q_S. Аналогично в случае $d \prec c_1$.

Отметим, что отсюда сразу следует, что $A \cap B = \varnothing$.

5) Покажем, что B — цепь. Если это не так, то существуют такие несравнимые элемента $e, f \in B$, что $c \prec e, c \prec f$ или $c \succ e, c \succ f$, причем $e, f \notin A$, поскольку $A \cap B = \varnothing$. Тогда $\{a, b, e, f\}$ — замкнутое подмножество S изоморфное множеству S_4 из леммы 5, что противоречит положительной определенности q_S.

6) Покажем, что $S = A \cup B$. Предположим, что существует $p \in S \setminus (A \cup B)$. Тогда p не сравним с a, b и c, следовательно $\{a, b, c, p\}$ изоморфно множеству S_4 из леммы 5 —противоречие с положительной определенностью q_S.

7) Осталось показать, что S является прямой суммой A и B, что для любого $d \in A$ и любого $c_1 \in B$ c_1 не сравним с d. А это следует из 4) — если $d \prec c_1$ или $d \succ c_1$, то d не сравним с a, b согласно 4).

Итак, S представляется в виде прямой суммы двух цепей $A = [a, b] \cup \{a\}^< \cup \{b\}^>$ и $B = \{c\} \cup \{c\}^< \cup \{c\}^>$ (B может быть пустым), причем A содержит $I(S)$. Предложение 2 доказано.

Из предложений 1 и 2 следует необходимость теоремы 1.

4. Доказательство теоремы: достаточность. Пусть S является прямой суммой двух цепей A и B, причем $I(S) \subset A$ и $|I(S)| = 2$.

Докажем сначала, что q_S положительно определена. Достаточно доказать положительную определенность формы Титса множеств $T_{m,m}$, $m > 2$, где $T_{m,n} = \{1, \dots, m+n \mid 1 \prec \dots \prec m, m+1 \prec \dots \prec m+n, 1^* = 2\}$. Легко видеть, что

$$q_{T_{m,n}}(x) = x_0^2+2x_1^2+\sum_{i=3}^{2m} x_i^2+2x_1\sum_{i=3}^{m} x_i+\sum_{3\le i<j\le m} x_ix_j+\sum_{m+1\le i<j\le 2m} x_ix_j- -x_0(2x_1+\sum_{i=3}^{2m} x_i) =$$

$= q_{T_{2m,0}}(x')$, где $x_0' = x_0 - \sum\limits_{i=m+1}^{2m} x_i$, $x_i' = x_i$ для $i = \overline{3,m}$, $x_i' = -x_i$ для $i = \overline{m+1,2m}$.

Осталось доказать, что форма $q_{T_{2m,0}}(x)$ положительно определена. А это видно из следующего равенства:

$$2q_{T_{2m,0}}(x) = 2(x_0 - x_1 - \tfrac{1}{2}\sum_{i=3}^{2m} x_i)^2+ 2(x_1 + \tfrac{1}{2}\sum_{i=3}^{2m} x_i)^2+ \sum_{i=3}^{2m} x_i^2.$$

Теперь сильная положительность формы Титса для S следует из того, что незамкнутые подмножества S являются прямыми суммами двух цепей, а для таких множеств положительная определенность формы Титса доказана в [11]. Доказательство завершено.

1. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – **6.** – P. 71–103,309.
2. Матричные задачи. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1977. – 145 с.
3. Представления и квадратичные формы. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1979. – 153 с.
4. *Simson D.* Linear Representations of Partially Ordered Sets and Vector Space Category. – Gordon and Breach Science Publishers, 1992. – 499 p.
5. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прилож. – 1974. – Вып. 8. – С. 34–42.
6. *Ройтер А. В.* Матричные задачи и представления боксов// Матричные задачи. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 3–38.
7. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 104–114.
8. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множества // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.
9. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.
10. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О подкатегориях конечного ранга категории представлений неограниченного частично упорядоченного множества // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2003. – Вип. 8. – С. 15–22.
11. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О квадратичной форме Титса для бесконечных частично упорядоченных множеств // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 28–31.

Получено 23.09.2003