УДК 519.7

Ю. Ю. Червак (Ужгородський нац. ун-т)

РЕДУКЦІЯ ДИСКРЕТНИХ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

In the given article the simplification of a discretic problem of non-linear programming is esteemed by substitution of object function and function of limitations by interpolation polynomials, the set of clusters of interpolation which one is a given discretic set.

В даній статті розглядається спрощення дискретної задачі нелінійного програмування шляхом заміни цільової функції та функцій обмежень інтерполяційними многочленами, множина вузлів інтерполяції яких є задана дискретна множина.

Методи розв'язання задач нелінійного програмування чутливі до видів критеріальних функцій та функцій обмежень. Трудоємність розв'язування цих задач значно більша за трудоємність розв'язування задач лінійного програмування. Змінюється ця трудоємність при переході від нелінійності одного виду до нелінійності іншого виду. Принциповим при цьому є те, що при такому переході змінюється структура задачі. Якщо опуклі функції, при яких задача є одноекстремальною, замінити неопуклими функціями, то, вірогідно, структура отриманої задачі буде невідомою. Буває й навпаки, якщо в задачі, структура якої невідома, критеріальну функцію та функції обмежень замінити функціями з добре відомими властивостями, то структуру отриманої задачі можна визначити.

Чутливість методів до різних структур задач, визначених функціями різних видів, обумовлена апріорі: як правило, той чи інший метод орієнтований на розв'язання задач певного класу, задач визначеної структури.

Сказане стосується й дискретних задач, методи розв'язання яких використовують методи лінійного і нелінійного програмування. В даній роботі дискретна задача нелінійного програмування зводиться до еквівалентної задачі, функції обмежень і критеріальна функція якої (або критеріальні функції, якщо задача багатокритеріальна) є многочленами, зокрема, лінійними функціями. Для розв'язування задач нелінійного програмування, у яких критеріальні функції і функції обмежень є многочленами, розроблені спеціальні методи [1,2].

1. Редукована задача. Дискретна задача нелінійного програмування розглядається в наступній формі:

$$\max f_0(x), \tag{1}$$

$$f_i(x) \le b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

$$x_j \in D_j,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Дійсні функції

$$f_i(x),\ i = 0, 1, 2, ..., m, \tag{4}$$

вважаються заданими аналітичним способом, тобто формулами. $f_0(x)$ — критеріальна функція, $f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m$, — функції обмежень-нерівностей (2), в яких b_i, $i = 1, 2, ..., m$, — задані числа. Якщо розглядається багатокритеріальна дискретна задача нелінійного програмування, то критеріальна функція є векторною функцією

$f_0(x) = (f_{01}(x), f_{02}(x), ..., f_{0q}(x)),\ q > 1$. При цьому багатокритеріальна задача може визначатися будь-якою згорткою критеріїв [3]. В кожній з умов дискретності (3) дискретна множина D_j є скінченною множиною чисел; $\nu_j + 1$ — число її елементів, $\nu_j \geq 1$. Кожна з нелінійних функцій (4) приймає на скінченній множині $D = \underset{j=1}{\overset{n}{\times}} D_j$ ($\times$ — знак декартового добутку) скінченні значення.

Методам розв'язування задачі (1)–(3) присвячена велика кількість наукових праць, що відображено в бібліографіях багатьох книг і монографій, наприклад, в монографіях [4,5].

Множину допустимих розв'язків, або, просто, допустиму множину, задачі (1)–(3), яка задається обмеженнями (2) і умовами дискретності (3), позначаємо X, а множину її оптимальних розв'язків — через $\widehat{X}$. Якщо $X \neq \emptyset$, то $\widehat{X} \neq \emptyset$, так як X скінченна множина.

Редукція задачі (1)–(3) (тобто зведення її до еквівалентної задачі простішого виду) здійснюється редукцією функцій (4). Нехай $f(x)$ — будь-яка з цих функцій; $r(x)$ — функція n аргументів $x_1, x_2, ..., x_n$, яка на множині D приймає скінченні значення.

Означення 1. Функцію $r(x)$ називаємо редукованою функцією, якщо і тільки якщо вона є функцією простішого виду за функцію $f(x)$ і значення її на множині D співпадають зі значеннями функції $f(x)$:

$$r(x) = f(x) \text{ для всіх } x \in D. \tag{5}$$

Термін "простіший" не є загальновизначеним. Він визначається в кожному конкретному випадку, залежно від мети, яка переслідується редукцією. Позаяк функції визначаються формулами, за якими обчислюються їх значення, то функцію ототожнюємо з формулою. Отже, для обчислення значення функції необхідно виконати над значеннями аргументів певні операції (арифметичні операції, операції обчислення значень стандартних функцій тощо), в певному порядку і в певній кількості. Звичайно, операції можна порівнювати між собою, наприклад, операція додавання простіша за операцію ділення, операція множення простіша за операцію обчислення значення функції синуса і т.п. Отже, функції $f(x)$ і $r(x)$ можна порівнювати за складністю операцій і за числом операцій, необхідних для обчислення їх значень. Серед нелінійних функцій простими вважаємо многочлени, найпростішими — лінійні функції [6].

Якщо відносно кожної з функцій (4) в результаті їх редукції побудовані відповідні редуковані функції

$$r_i(x),\ i = 0, 1, 2, ..., m, \tag{6}$$

то дискретна задача

$$\max r_0(x), \tag{7}$$

$$r_i(x) \leq b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{8}$$

$$x_j \in D_j,\ j = 1, 2, ..., n, \tag{9}$$

є редукованою задачею відносно задачі (1)–(3). За умовою (5), задача (7)–(9) еквівалентна задачі (1)–(3), так як $X = X_r$, $\widehat{X} = \widehat{X}_r$, де X_r — допустима множина редукованої задачі (7)–(9), задана обмеженнями (8) і умовами (9) або (3), $\widehat{X}_r$ — множина її оптимальних розв'язків. (Дві задачі математичного програмування називаємо еквівалентними задачами, якщо і тільки якщо їх непорожні множини допустимих розв'язків і множини оптимальних розв'язків співпадають відповідно.)

2. Редукція функції багатьох аргументів через розбиття її на складові одного або декількох аргументів. Нехай $f(x)$ — будь-яка з функцій (4). Її формулу $f(x)$ можна представляти розчленованою (розбитою) на частини, об'єднаними в $f(x)$ за допомогою операцій. Розбиття на частини, кожна з яких є функцією одного або кількох аргументів, може здійснюватися по-різному. Тому різні складові, при різних розбиттях, можуть об'єднуватися в формулу $f(x)$ за допомогою різних операцій, зокрема, сама по собі формула $f(x)$ є об'єднанням її елементарних складових (аргументів і констант) за допомогою операцій, які необхідно виконати для обчислення її значень. Відносно розбиття, одні операції функції $f(x)$ є внутрішньо складовими (за допомогою яких утворюються складові даного розбиття), а інші — зовнішньо складовими, за допомогою яких об'єднуються складові в $f(x)$. Розглянемо, наприклад, функцію трьох аргументів:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x_1^2}(x_1 + x_2)}{x_1^2 + 1} - \cos x_3. \tag{10}$$

З можливих способів наведемо, для ілюстрації, наступні чотири її розбиття. За першим способом,

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{\varphi_1(x_1)}\varphi_2(x_1, x_2)}{\varphi_1(x_1) + 1} - \varphi_3(x_3), \tag{11}$$

де $\varphi_1(x_1) = x_1^2$, $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $\varphi_3(x_3) = \cos x_3$; зовнішньо складовими операціями є операція обчислення значення функції кореня кубічного, множення, ділення, додавання і віднімання. За другим способом,

$$f(x) = \frac{\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1, x_2)}{\varphi_3(x_1)} - \varphi_4(x_3), \tag{12}$$

де $\varphi_1(x_1) = \sqrt[3]{x_1^2}$, $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $\varphi_3(x_1) = x_1^2 + 1$, $\varphi_4(x_3) = \cos x_3$; зовнішньо складовими операціями є множення, ділення і віднімання. За третім способом,

$$f(x) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)\varphi_3(x_1, x_2) - \varphi_4(x_3), \tag{13}$$

де $\varphi_1(x_1) = \sqrt[3]{x_1^2}$, $\varphi_2(x_1) = (x_1^2 + 1)^{-1}$, $\varphi_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $\varphi_4(x_3) = \cos x_3$; зовнішньо складовими операціями є дві операції, множення і віднімання. За четвертим способом,

$$f(x) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1, x_2) + \varphi_3(x_3), \tag{14}$$

де $\varphi_1(x_1) = \dfrac{\sqrt[3]{x_1^2}}{x_1^2 + 1}$, $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $\varphi_3(x_3) = -\cos x_3$; зовнішньо складовими операціями є множення і додавання.

Таким чином, розчленувавши функцію $f(x)$ як функцію n аргументів на частини, її редукція може бути здійснена, в загальному, редукцією частин як функцій меншого числа аргументів, ніж n, зокрема, редукцією функцій одного аргументу, якщо таке розбиття можливе. Як вже було сказано, серед нелінійних функцій простими вважаються многочлени. Нехай φ, як функція одного або декількох аргументів, є будь-якою з нелінійних частин функції $f(x)$. Тоді редукованою функцією відносно функції φ може бути інтерполяційний многочлен ρ, з вузлами інтерполяції в дискретно визначених точках, заданих умовами дискретності (3), так як значення многочлена ρ і функції φ в цих точках співпадають [6,7]. Якщо φ є многочленом, степінь якого небільший за можливий степінь інтерполяційного многочлена, тоді потреба в побудові цього інтерполяційного многочлена ρ відпадає, так як φ і ρ як функції тотожно рівні. Отже, побудувавши інтерполяційні многочлени частин заданого розбиття функції $f(x)$ і підставивши їх, відповідно, замість цих частин, одержимо функцію $r(x)$.

В результаті підстановки замість частин розбиття функції $f(x)$ відповідних їм інтерполяційних многочленів отримана функція може не бути многочленом. Але, якщо зовнішньо складовими операціями в цьому розбитті є операції множення (в тому числі піднесення до цілого додатного степеня як багатократного множення), додавання, віднімання, то, як результат цих операцій над многочленами, функція $r(x)$ є також многочленом, отже, редукованою функцією. Таким чином, в редукції $f(x)$ йдеться не про будь-яке розбиття цієї функції, а тільки про таке, зовнішньо складовими операціями в якому можуть бути вищеперераховані операції. Цій умові не задовольняють, наприклад, розбиття функції (10) за першим і другим способами (див. (11) і (12)), але задовольняють їй розбиття цієї функції за третім і четвертим способами (див. (13) і (14)). Якщо не існує розбиття функції $f(x)$, зовнішньо складовими операціями в якому могли б бути тільки множення, додавання і віднімання, то редукованою функцією $r(x)$ є інтерполяційний многочлен функції $f(x)$ з вузлами інтерполяції в точках множини $D \subset \mathbb{R}^n$. Для прикладу, розглянемо функцію (10), в якій складові функції визначені за четвертим способом (див. (14)). Нехай $D_1 = \{0, 1\}$, $D_3 = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$. Складова функція $\varphi_2(x_1, x_2)$ є лінійною функцією, тому замінювати її інтерполяційним многочленом, при будь-якій дискретній множині D_2, яка містить не менше двох чисел, немає потреби, так як вона тотожно рівна цьому многочлену. (Так як в цьому розбитті складова функція одного аргументу x_2 відсутня, на змінну x_2 можна не накладати умову дискретності (3). Це означає, що редукція може бути застосована і до частково дискретної задачі нелінійного програмування, в якій умови дискретності (3) накладаються лише на частину змінних.) Тоді, $\rho_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1$, $\rho_3(x_3) = \frac{2}{\pi}x_3 - 1$ — інтерполяційні функції для $\varphi_1(x_1)$ і $\varphi_3(x_3)$ відповідно, отже, в результаті їх підстановки в функцію (10), маємо редуковану функцію

$$r(x) = -1 + \frac{2}{\pi}x_3 + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2. \tag{15}$$

Значення функцій φ_1, φ_3, ρ_1, ρ_3, f і r для всіх можливих наборів аргументів x_1 і x_3, при будь-яких значеннях аргументу x_2, зведені в таблиці 1.

x_1	x_3	$\varphi_1(x_1)$	$\varphi_3(x_3)$	$\rho_1(x_1)$	$\rho_3(x_3)$	$f(x)$	$r(x)$
0	0	0	-1	0	-1	-1	-1
0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	0	0	0
0	π	0	1	0	1	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}(x_2 - 1)$	$\frac{1}{2}(x_2 - 1)$
1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}(x_2 + 1)$	$\frac{1}{2}(x_2 + 1)$
1	π	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}(x_2 + 3)$	$\frac{1}{2}(x_2 + 3)$

Таблиця 1.

В редукованій функції (15) третій доданок $\frac{1}{2}x_1^2$ можна розглядати як її складову функцію аргументу x_1, яка є одночленом 2-го степеня. Оскільки D_1 містить два елементи, 0 і 1 ($\nu_1 = 1$), то її інтерполяційною функцією є лінійна функція $\frac{1}{2}x_1$. Отже, застосувавши редукцію, повторно, до функції (15), отримаємо простішу редуковану функцію, що задається формулою

$$r(x) = -1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{\pi}x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2. \tag{16}$$

Зауваження 1. Якщо $D_j = \{0, 1\}$, то в функціях $f(x)$ і $r(x)$ степенева функція x_j^ν ($\nu > 0$) як їх складова функція замінюється на x_j.

В розбитті функції $f(x)$ можуть утворитися принаймні дві складові функції одних і тих аргументів $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_p}$ ($p \geq 1$) $\varphi'(\tilde{x})$ і $\varphi''(\tilde{x})$, зв'язаних зовнішньо складовою операцією множення (тут $\tilde{x} = (x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_p})$). Якщо відповідні інтерполяційні многочлени $\rho'(\tilde{x})$ і $\rho''(\tilde{x})$ мають степені γ' і γ'', то добуток цих многочленів матиме степінь $\gamma' + \gamma''$, який може бути значно більший за γ' і γ'', що може призвести до значного зростання степеня редукованого многочлена $r(x)$. В подібному випадку існують дві можливості запобігти цьому зростанню. По-перше, складові $\varphi'(\tilde{x})$ і $\varphi''(\tilde{x})$ можна об'єднати за допомогою множення в одну складову, $\varphi(\tilde{x}) = \varphi'(\tilde{x})\varphi''(\tilde{x})$. По-друге, в многочлені $r(x)$ добуток $\rho(\tilde{x}) = \rho'(\tilde{x})\rho''(\tilde{x})$ можна замінити, повторно, відповідним йому інтерполяційним многочленом. З цих і подібних їм міркувань можна зробити наступне зауваження.

Зауваження 2. Якщо в розбитті функції $f(x)$ утворюються дві або більше складові функції одного й того, або одних і тих аргументів, зв'язаних за допомогою зовнішньо складових операцій множення, то доцільно їх об'єднати за допомогою цих операцій в одну складову функцію. З метою зменшення степеня редукованого многочлена $r(x)$, доцільно також застосовувати повторні редукції.

Трудоємність редукції функції $f(x)$ залежить від можливостей розбиття її на ті чи інші складові. Вірогідно, що вона зменшується, якщо число аргументів складових функцій зменшується, так як зі зменшенням числа аргументів функції зменшується трудоємність побудови інтерполяційного многочлена. Тому, варто уваги таке розбиття, при якому всі складові є функціями одного аргументу, об'єднані зовнішньо складовими операціями множення, додавання і віднімання.

Означення 2. Функцію $f(x)$ називаємо сепарабельною, якщо і тільки якщо існує таке її розбиття на складові функції одного аргументу, зовнішньо складовими операціями в якому можуть бути множення (в тому числі піднесення до цілого додатного степеня як багаторазового множення), додавання, віднімання.

Складові функції одного аргументу в розбитті сепарабельної функції $f(x)$ позначаємо $\varphi_{jk_j}(x_j)$, де перший індекс j вказує номер аргументу x_j, а другий індекс k_j — номер функції в множині всіх складових функцій цього аргументу в даному розбитті. Функція (10), наприклад, є сепарабельною функцією:

$$f(x) = \varphi_{11}(x_1)(\varphi_{12}(x_1) + \varphi_{21}(x_2)) + \varphi_{31}(x_3), \tag{17}$$

де $\varphi_{11}(x_1) = \dfrac{\sqrt[3]{x_1^2}}{x_1^2 + 1}$, $\varphi_{12}(x_1) = x_1$, $\varphi_{21}(x_2) = x_2$, $\varphi_{31}(x_3) = -\cos x_3$. При цьому, якщо покладемо $\varphi'_{12}(x_1) = \varphi_{11}(x_1)\varphi_{12}(x_1)$ (згідно зауваження 2), то з розбиття (17) отримаємо інше розбиття функції (10):

$$f(x) = \varphi'_{12}(x_1) + \varphi_{11}(x_1)\varphi_{21}(x_2) + \varphi_{31}(x_3), \tag{18}$$

де $\varphi'_{12}(x_1) = \dfrac{x_1\sqrt[3]{x_1^2}}{x_1^2+1}$. Підставивши в (18) замість складових функцій $\varphi'_{12}(x_1)$, $\varphi_{11}(x_1)$, $\varphi_{31}(x_3)$ відповідні інтерполяційні функції $\rho'_{12}(x_1) = \frac{1}{2}x_1$, $\rho_{11}(x_1) = \frac{1}{2}x_1$, $\rho_{31}(x_3) = = \frac{2}{\pi}x_3 - 1$ (функція $\varphi_{21}(x_2) = x_2$, як лінійна функція, залишається без зміни), отримаємо редуковану функцію (16).

Нехай

$$\varphi_{jk_j}(x_j), j \in J, k_j = 1, 2, ..., s_j, \tag{19}$$

— складові функції одного аргументу розбиття сепарабельної функції n аргументів $f(x)$, зовнішньо складовими операціями в якому можуть бути множення, додавання, віднімання. $J \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ — непорожня множина номерів аргументів, кожен з яких є аргументом принаймні однієї з цих функції; s_j — число функцій в розбитті, залежних від аргументу x_j. Якщо $f(x)$ як функція багатьох аргументів не залежить від x_j, то $j \notin J$, $J \neq \{1, 2, ..., n\}$, $J \subset \{1, 2, ..., n\}$. Тоді редукція функції $f(x)$ здійснюється за допомогою одновимірної інтерполяції. Кожна з функцій (19) замінюється інтерполяційним многочленом, відповідно,

$$\rho_{jk_j}(x_j), j \in J, k_j = 1, 2, ..., s_j, \tag{20}$$

в результаті чого отримується редукована функція $r(x)$, яка є многочленом. Зазначимо, будь-який многочлен є сепарабельною функцією.

Вид редукованої функції $r(x)$ залежить також від кількостей елементів в дискретних множинах, які є вузлами інтерполяції. В загальному, чим більше число ν_j ($\nu_j + 1$ — число елементів в множині D_j), тим вищими є степені інтерполяційних многочленів $\rho_{jk_j}(x_j), k_j = 1, 2, ..., s_j$, з вузлами інтерполяції в точках цієї множини. Якщо функція $f(x)$ є сепарабельною функцією, то степінь редукованого многочлена $r(x)$ може бути високий, якщо навіть кожна з інтерполяційних функцій (20) є лінійною функцією. Але, якщо сепарабельна функція $f(x)$ розбивається на складові функції одного аргументу (19) так, що зовнішньо складовими операціями є додавання або віднімання, то редукований многочлен має степінь не вищий за найбільший з степенів многочленів (20), зокрема, $r(x)$ є лінійною функцією, якщо функції (20) є лінійними функціями.

Якщо сепарабельна функція $f(x)$ розбивається на складові функції одного аргументу (19) так, що зовнішньо складовими операціями є додавання і віднімання, то функція $f(x)$ може бути представлена у вигляді суми n функцій, кожна з яких є функцією одного аргументу:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j). \tag{21}$$

Якщо $f(x)$ не залежить від x_j, то в (19) це означає, що $j \notin J$, а в формулі (21) — $f_j(x_j) \equiv 0$. Зауважимо, деякими авторами (наприклад, в [8]) частинний випадок сепарабельності (21) приймається як означення сепарабельної функції.

3. Побудова інтерполяційних многочленів. Нагадаємо, множина D_j, $1 \leq j \leq n$, є множиною $\nu_j + 1$ чисел ($\nu_j \geq 1$); нехай $D_j = \{d_{0j}, d_{1j}, ..., d_{\nu_j,j}\}$. Позначимо $D^\mu = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{\mu} D_j$ ($1 \leq \mu \leq n$), отже, $D^1 = D_1$, $D^n = D$. Зауважимо, множина D^μ є декартовою множиною [3]; число дискретно визначених точок, з яких вона складається, дорівнює $(\nu_1 + 1) \cdot (\nu_2 + 1) \cdot ... \cdot (\nu_\mu + 1) = \prod_{j=1}^{\mu}(\nu_j + 1)$. (Множину точок в $\mathbb{R}^\mu$

називаємо декартовою множиною, якщо і тільки якщо вона співпадає з декартовим добутком своїх ортогональних проекцій на осі координат $x_1, x_2, ..., x_\mu$.)

У викладі стосовно редукції йшлося про заміну складових функцій одного і багатьох аргументів в будь-якому розбитті функції $f(x)$ інтерполяційними многочленами, з вузлами інтерполяції в дискретно визначених точках, визначених умовами дискретності (3). Розглянемо спочатку побудову інтерполяційного многочлена функції одного аргументу x_j, $1 \le j \le n$, з вузлами інтерполяції в точках відповідної дискретної множини D_j (одновимірна інтерполяція). В багатовимірній інтерполяції розглянемо побудову інтерполяційного многочлена для функції μ аргументів ($\mu \ge 2$). Не втрачаючи загальності, аргументами вважатимемо змінні $x_1, x_2, ..., x_\mu$, в супротивному, змінні можна перенумерувати. Вузлами інтерполяції в цьому випадку є точки множини D^μ .

Одновимірна інтерполяція. Нехай $\varphi(x_j)$ — дійсна функція дійсного аргументу x_j, яка на множині D_j приймає скінченні значення $\varphi_{\alpha_j} = \varphi(d_{\alpha_j,j})$, $\alpha_j = 0, 1, ..., \nu_j$: $\rho(x_j)$ — інтерполяційний многочлен цієї функції, з вузлами інтерполяції, в точках множини D_j. Зазначимо, тут інтерполяція використовується не в прямому призначенні, для обчислення значень функції в точках, що знаходяться між вузлами, а як засіб спрощення виду функції, не змінюючи її значень в цих вузлах. Для побудови інтерполяційного многочлена функції $\varphi(x_j)$ скористаємося формулою Лагранжа:

$$\rho(x_j) = \sum_{\alpha_j=0}^{\nu_j} \varphi_{\alpha_j} \omega_{\alpha_j}(x_j) = \sum_{d_{\alpha_j,j} \in D_j} \varphi(d_{\alpha_j,j}) \omega_{\alpha_j}(x_j), \tag{22}$$

де $\omega_{\alpha_j}(x_j)$ — функція, яка в точці $x_j = d_{\alpha_j,j}$ приймає значення рівне 1, а в усіх інших точках множини D_j приймає значення рівне 0. Отже, значення функції $\rho(x_j)$ і $\varphi(x_j)$ на дискретній множині D_j співпадають:

$$\rho(d_{\alpha_j,j}) = \varphi(d_{\alpha_j,j}),\ \alpha_j = 0, 1, ..., \nu_j, \tag{23}$$

або, інакше, $\rho(d_{\alpha_j,j}) = \varphi(d_{\alpha_j,j})$ для всіх $d_{\alpha_j,j} \in D_j$. Функції $\omega_{\alpha_j}(x_j)$, $\alpha_j = 0, 1, ..., \nu_j$, яким належить визначальна роль в збереженні рівностей (23), називаємо конституентами відповідних значень функції $\varphi(x_j)$. Конструктивне визначення цих конституент дається наступними теоремами 1 і 2.

Теорема 1. *Якщо $\nu_j = 1$, то*

$$\begin{aligned} \omega_0(x_j) &= (d_{1j} - d_{0j})^{-1} \cdot (d_{1j} - x_j), \\ \omega_1(x_j) &= (d_{1j} - d_{0j})^{-1} \cdot (x_j - d_{0j}). \end{aligned} \tag{24}$$

Доведення. В результаті підстановок $x_j = d_{0j}$ і $x_j = d_{1j}$ в формули (24), маємо $\omega_0(d_{0j}) = 1$, $\omega_0(d_{1j}) = 0$, $\omega_1(d_{0j}) = 0$, $\omega_1(d_{1j}) = 1$. Отже, функції $\omega_0(x_j)$ і $\omega_1(x_j)$ визначені, відповідно, формулами (24), є конституентами значень $\varphi(d_{0j})$ і $\varphi(d_{1j})$ функції $\varphi(x_j)$. Теорема доведена.

Теорема 2. *Якщо* $\nu_j \geq 2$, *то*

$$\omega_0(x_j) = \left(\prod_{k=1}^{\nu_j}(d_{kj} - d_{0j})\right)^{-1} \cdot \prod_{k=1}^{\nu_j}(d_{kj} - x_j),$$
$$\omega_{\alpha_j}(x_j) = \left((d_{\alpha_j,j} - d_{0j}) \cdot \prod_{k=1,\ k\neq\alpha_j}^{\nu_j}(d_{kj} - d_{\alpha_j,j})\right)^{-1} \times \tag{25}$$
$$\times(x_j - d_{0j}) \cdot \prod_{k=1,\ k\neq\alpha_j}^{\nu_j}(d_{kj} - x_j),\ \alpha_j = 1, 2, ..., \nu_j.$$

Доведення. Розглянемо функцію $\omega_0(x_j)$, визначену за формулою (25). Якщо $x_j = d_{0j}$, то $\omega_0(d_{0j}) = \left(\prod_{k=1}^{\nu_j}(d_{kj} - d_{0j})\right)^{-1} \cdot \prod_{k=1}^{\nu_j}(d_{kj} - d_{0j}) = 1$. Якщо $x_j \neq d_{0j}$ $(x_j \in D_j)$, то $\omega_0(x_j) = 0$, так як $d_{kj} - x_j = 0$, якщо $x_j = d_{kj}$ $(k = 1, 2, ..., \nu_j)$. Отже, $\omega_0(x_j)$ є конституентою значення $\varphi(d_{0j})$ функції $\varphi(x_j)$.

Розглянемо функцію $\omega_{\alpha_j}(x_j)$, $1 \leq \alpha_j \leq \nu_j$. Якщо $x_j = d_{\alpha_j,j}$, то $\omega_{\alpha_j}(d_{\alpha_j,j}) = \left((d_{\alpha_j,j} - d_{0j}) \cdot \prod_{k=1,\ k\neq\alpha_j}^{\nu_j}(d_{kj} - d_{\alpha_j,j})\right)^{-1} \cdot (d_{\alpha_j,j} - d_{0j}) \cdot \prod_{k=1,\ k\neq\alpha_j}^{\nu_j}(d_{kj} - d_{\alpha_j,j}) = 1$. Нехай $x_j \neq d_{\alpha_j,j}$ $(x_j \in D_j)$. Якщо $x_j = d_{0j}$, то в формулі (25) $x_j - d_{0j} = 0$, тобто $\omega_{\alpha_j}(d_{0j}) = 0$. Якщо $x_j \neq d_{0j}$, то в цій формулі $d_{kj} - x_j = 0$, якщо $x_j = d_{kj}$, тобто $\omega_{\alpha_j}(d_{kj}) = 0$. Отже, функція $\omega_{\alpha_j}(x_j)$ є конституентою значення $\varphi(d_{\alpha_j,j})$, $1 \leq \alpha_j \leq \nu_j$, функції $\varphi(x_j)$. Теорема доведена.

Кожна з функцій $\omega_{\alpha_j}(x_j)$, $\alpha_j = 0, 1, ..., \nu_j$, визначених за формулами (25), є многочленом степеня ν_j, отже, інтерполяційна функція $\rho(x_j)$, визначена за формулою (22) як лінійна комбінація цих многочленів, є многочленом, степінь якого не більший за ν_j.

Багатовимірна інтерполяція. Позначимо $A^\mu = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{\mu} A_j$, де $A_j = \{0, 1, ..., \nu_j\}$ — множина номерів (перших індексів) елементів множини D_j $(j = 1, 2, ..., \mu)$; α_j — будь-який елемент множини A_j $(\alpha_j \in A_j)$. Між множиною цілочислових векторів A^μ і множиною дискретно визначених точок D^μ є взаємно однозначна відповідність: вектору $\alpha^\mu = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\mu) \in A^\mu$ відповідає один вектор $d^\mu = (d_{\alpha_1}, d_{\alpha_2}, ..., d_{\alpha_\mu}) \in D^\mu$, і, навпаки, вектору $d^\mu \in D^\mu$ відповідає один вектор $\alpha^\mu \in A^\mu$.

Нехай $\varphi(x^\mu)$ — дійсна функція μ аргументів $x_1, x_2, ..., x_\mu$ $(x^\mu = (x_1, x_2, ..., x_\mu))$, яка на множині D^μ приймає скінченні значення $\varphi_{\alpha^\mu} = \varphi(d^\mu)$, $\alpha^\mu \in A^\mu$ $(d^\mu \in D^\mu)$. Як вже зазначалося, число таких значень функції $\varphi(x^\mu)$ на D^μ дорівнює $\prod_{j=1}^{\mu}(\nu_j + 1)$.

Розглянемо функцію

$$\rho(x^\mu) = \sum_{\alpha^\mu\in A^\mu} \varphi_{\alpha^\mu} \cdot \omega_{\alpha^\mu}(x^\mu) = \sum_{d^\mu\in D^\mu} \varphi(d^\mu) \cdot \omega_{\alpha^\mu}(x^\mu), \tag{26}$$

де $\omega_{\alpha^\mu}(x^\mu)$ — конституента значення $\varphi_{\alpha^\mu} = \varphi(d^\mu)$ функції $\varphi(x^\mu)$ в точці $d^\mu \in D^\mu$; якщо $x^\mu = d^\mu$, то $\omega_{\alpha^\mu}(x^\mu) = 1$, і $\omega_{\alpha^\mu}(x^\mu) = 0$ для всіх $x^\mu \in D^\mu$, $x^\mu \neq d^\mu$. Отже, значення функцій $\rho(x^\mu)$ і $\varphi(x^\mu)$ на множині D^μ співпадають:

$$\rho(d^\mu) = \varphi(d^\mu) \text{ для всіх } d^\mu \in D^\mu. \tag{27}$$

Конструктивне визначення конституент $\omega_{\alpha^\mu}(x^\mu)$, $\alpha^\mu \in A^\mu$, дається наступною теоремою.

Теорема 3.

$$\omega_{\alpha^\mu}(x^\mu) = \prod_{j=1}^{\mu} \omega_{\alpha_j}(x_j),\ \ \alpha^\mu \in A^\mu, \tag{28}$$

де конституенти одного аргументу

$$\omega_{\alpha_j}(x_j), \alpha_j \in A_j, j = 1, 2, ..., \mu, \tag{29}$$

визначені за формулами (24)*, якщо* $\nu_j = 1$*, або за формулами* (25)*, якщо* $\nu_j \geq 2$.

Доведення. Розглянемо будь-яку з функцій, визначених формулами (28). Якщо $x^\mu = d^\mu$, тоді, за визначенням функцій (29), $\omega_{\alpha_j}(d_{\alpha_j,j}) = 1$, $j = 1, 2, ..., \mu$, отже, за формулою (28), $\omega_{\alpha^\mu}(d^\mu) = 1$. Нехай $x^\mu \neq d^\mu$, $x^\mu \in D^\mu$, тобто існує номер j', $1 \leq j' \leq \mu$, такий, що $x_{j'} \neq d_{\alpha_{j'},j'}$. Тоді, за визначенням функцій (29), $\omega_{\alpha_{j'}}(x_{j'}) = 0$, отже, за формулою (28), $\omega_{\alpha^\mu}(x^\mu) = 0$. Таким чином, функції $\omega_{\alpha^\mu}(x^\mu)$, $\alpha^\mu \in A^\mu$, визначені формулами (28), є конституентами відповідних значень функції $\varphi(x^\mu)$ на D^μ. Теорема доведена.

Кожна з функцій (28), як конституента в інтерполяційному многочлені (26), є многочленом μ змінних $x_1, x_2, ..., x_\mu$, степінь якого дорівнює $\sum\limits_{j=1}^{\mu} \nu_j$. Тому, в загальному, інтерполяційний многочлен (26) має степінь, який не більший за степінь конституент (28).

Нехай $f(x)$ — будь-яка з функцій (4). Застосовуючи інтерполяційні формули (22) і (26), результатом редукції функції $f(x)$ є многочлен $r(x)$. При цьому вірна наступна теорема.

Теорема 4. *Стосовно будь-якої функції $f(x)$ існує редукований многочлен степеня, не більшого за* $\nu = \sum\limits_{j=1}^{n} \nu_j$.

Доведення. Нехай многочлен $r(x)$, який є результатом редукції функції $f(x)$, є сумою членів вигляду $\alpha \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} {x_j}^{\beta_j}$, де кожне β_j $(j = 1, 2, ..., n)$ є невід'ємним цілим числом. Найбільше значення суми $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j$, яка зустрічається в деякому члені, є степенем многочлена $r(x)$. Отже, якщо нерівності $\beta_j \leq \nu_j$, $j = 1, 2, ..., n$, виконуються для кожного члена многочлена, то його степінь не більший за ν. В супротивному, многочлен, який отримується заміною в $r(x)$ складових ${x_j}^{\beta_j}$, $\beta_j > \nu_j$ їх інтерполяційними многочленами (степені яких не більші за ν_j відповідно), має степінь не більший за ν. Теорема доведена.

Многочлен (26) може використовуватися і для обчислення наближених значень функції $\varphi(x^\mu)$ в міжвузлових точках, таких, які не належать D^μ, але які належать опуклій оболонці множини D^μ. (Поняття опуклої оболонки множини точок в $\mathbb{R}^\mu$, а також інші необхідні відомості опуклого аналізу, можна знайти, наприклад, в [9].)

Нехай M — будь-яка непорожня підмножина множини D^μ, декартова оболонка $\operatorname{desc} M$ якої [3] співпадає з декартовою множиною D^μ ($\operatorname{desc} M = D^\mu$). ($\operatorname{desc} M$ — множина точок в $\mathbb{R}^\mu$, яка є декартовим добутком ортогональних проекцій множини M на осі координат $x_1, x_2, ..., x_\mu$; $M \subset \operatorname{desc} M$.) Тоді, інтерполяційний многочлен $\rho_M(x^\mu)$, значення якого співпадають зі значеннями функції $\varphi(x^\mu)$ на множині M, є сумою тих доданків в формулі (26), які конституюють значення цієї функції на M. При цьому, значення многочлена $\rho_M(x^\mu)$ в кожній точці множини D^μ, яка не належить M, дорівнює 0.

Якщо $M \subset \mathbb{R}^\mu$ — будь-яка скінченна множина точок (недекартова), тоді $\rho_M(x^\mu)$ є сумою тих доданків в формулі $\rho_{\operatorname{desc} M}(x^\mu)$, які конституюють значення функції $\varphi(x^\mu)$ на M.

Нехай, наприклад, множина $M \subset \mathbb{R}^2$ складається з трьох точок $(0, -1), (1, 0), (0, 1)$ (на рисунку 1 вони зображені кружочками). Тоді $\operatorname{desc} M$ складається з шести точок, три з яких є точками множини M, а інші три — це точки $(1, -1), (0, 0), (1, 1)$ (на рисунку 1 вони зображені хрестиками).

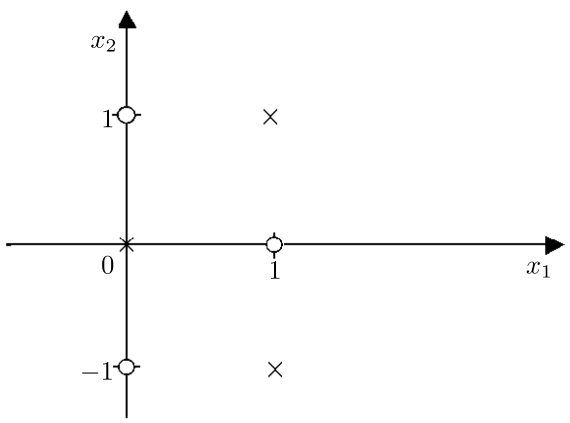

Рис. 1

Отже, $D_1 = \{0, 1\}$, $D_2 = \{-1, 0, 1\}$, відповідно, $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{0, 1, 2\}$, отже, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$. За формулами (24), $\omega_0(x_1) = 1 - x_1$, $\omega_1(x_1) = x_1$. За формулами (25), $\omega_0(x_2) = \frac{1}{2}({x_2}^2 - x_2)$, $\omega_1(x_2) = -{x_2}^2 + 1$, $\omega_2(x_2) = \frac{1}{2}({x_2}^2 + x_2)$. За формулами (28), $\omega_{(0,0)}(x_1, x_2) = \omega_0(x_1) \cdot \omega_0(x_2)$, $\omega_{(1,1)}(x_1, x_2) = \omega_1(x_1) \cdot \omega_1(x_2)$, $\omega_{(0,2)}(x_1, x_2) = \omega_0(x_1) \times$ $\times \omega_2(x_2)$. Отже, $\rho_M(x_1, x_2) = \varphi(0, -1) \cdot \omega_{(0,0)}(x_1, x_2) + \varphi(1, 0) \cdot \omega_{(1,1)}(x_1, x_2) + \varphi(0, 1) \times$ $\times \omega_{(0,2)}(x_1, x_2)$. Тоді, якщо $\varphi(0, -1) = 2$, $\varphi(1, 0) = 1$, $\varphi(0, 1) = 2$, то $\rho_M(x_1, x_2) =$ $= x_1 - x_2 - 3x_1 \cdot {x_2}^2 + {x_2}^2$.

Зауваження 3. Формули (22) і (26) вірні також, якщо функції φ одного і μ аргументів, відповідно, векторні функції.

4. Редукція псевдобулевих задач нелінійного програмування. Функцію, аргументи якої можуть приймати два значення, 0 і 1, а множиною значень є множина дійсних чисел, називаємо псевдобулевою функцією [10,12]. Задачу (1)–(3) називаємо псевдобулевою задачею нелінійного програмування, якщо $D_j = \{0, 1\}$, $j = 1, 2, ..., n$. Умови дискретності (3) в цій задачі називаємо умовами булевості змінних:

$$x_j \in D_j = \{0, 1\}, \ j = 1, 2, ..., n. \tag{30}$$

Умови (30) є найпростішими умовами дискретності за суттю і за формою. По-перше, $\nu_j = 1$, $j = 1, 2, ..., n$, і, по-друге, $A_j = D_j$, $j = 1, 2, ..., n$. Тому, редукція псевдобулевої задачі нелінійного програмування (1), (2), (30) спрощується за рахунок спрощення інтерполяційних формул.

При одновимірній інтерполяції конституенти інтерполяційного многочлену (22) визначаються, по-перше, за формулами (24), так як $\nu_j = 1$, і, по-друге, так як $A_j = D_j$ (тобто $d_{0j} = 0$, $d_{1j} = 1$), ці формули спрощуються:

$$\omega_0(x_j) = 1 - x_j,\ \omega_1(x_j) = x_j. \tag{31}$$

Тому, в багатовимірній інтерполяції, кожна конситуента (28), що відповідає булевому вектору $d^\mu \in D^\mu$, має вигляд добутку μ співмножників, у якому j-й ($j = 1, 2, ..., n$) співмножник є x_j, якщо $\alpha_j = 1$, або $1 - x_j$, якщо $\alpha_j = 0$. Поклавши $\bar{x}_j = 1 - x_j$, конституента приймає форму конституенти досконалої диз'юнктивної нормальної форми функції двозначної логіки (булевої функції) [10,11]. Отже, так як конституенти (28) є многочленами μ-го степеня, то інтерполяційний многочлен має степінь, не більший за μ. Таким чином, інтерполяційний многочлен (26) псевдобулевої функції $\varphi(x^\mu)$ є узагальненням досконалої диз'юнктивної нормальної форми булевої функції.

Якщо $D_j = \{0, 1, ..., \nu\}$, $j = 1, 2, ..., \mu$ ($\nu > 1$), то інтерполяційний многочлен (26) є узагальненням досконалої диз'юнктивної нормальної форми функції $(\nu + 1)$-значної логіки [11].

Нехай $f(x)$ — будь-яка з функцій (4) псевдобулевої задачі нелінійного програмування (1), (2), (30). Тоді, використовуючи інтерполяційні формули (22) і (26), а також, при необхідності, зауваження 1 або теорему 4, результатом редукції функції $f(x)$ є редукований многочлен, степінь якого не більший за n.

Нехай $f(x)$ — сепарабельна псевдобулева функція. Якщо зовнішньо складовими операціями в розбитті її на складові функції одного аргументу є додавання і віднімання, то вона представляється у вигляді (21). Тоді, очевидно, можна побудувати лінійну редуковану функцію $r(x)$. Процес побудови цієї функції розглянемо більш детально.

Розглянемо псевдобулеву функцію $f_j(x_j)$, $1 \leq j \leq n$, і лінійну інтерполяційну функцію $\rho_j(x_j) = f_j(0) + (f_j(1) - f_j(0)) \cdot x_j$, графік якої проходить через точки $(0, f_j(0))$ і $(1, f_j(1))$; значення функції $\rho_j(x_j)$ в точках 0 і 1 співпадають зі значеннями функції $f_j(x_j)$ (див. рисунок 2).

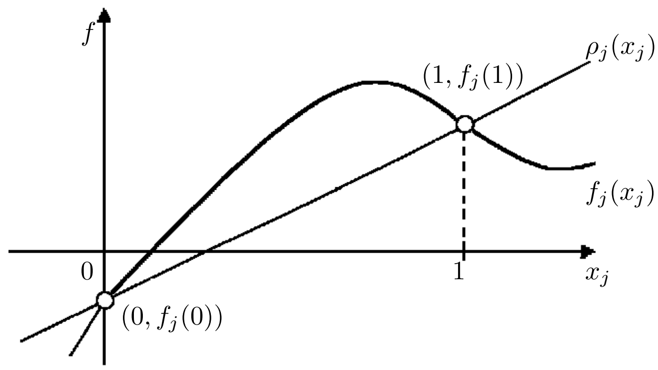

Рис. 2

Наприклад, якщо $f_j(x_j) = \sin x_j$, то $\rho_j(x_j) = (\sin 1) \cdot x_j$; якщо $f_j(x_j) = \dfrac{x_j^n}{x_j - 2}$

$(n > 0)$, то $\rho_j(x_j) = -x_j$. Отже, $r(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j(x_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(0) + \sum\limits_{j=1}^{n} (f_j(1) - f_j(0)) \cdot x_j$. Якщо $f_j(x_j) = \text{const}$, то $\rho_j(x_j) = \text{const}$.

Таким чином, якщо кожна з функцій (4) псевдобулевої задачі представляється у вигляді (21), то редукована псевдобулева задача є псевдобулевою задачею лінійного програмування:

$$\max \left(\sum_{j=1}^{n} f_{0j}(0) + \sum_{j=1}^{n} (f_{0j}(1) - f_{0j}(0)) \cdot x_j \right), \tag{32}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (f_{ij}(1) - f_{ij}(0)) \cdot x_j \le b_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(0), i = 1, 2, ..., m, \tag{33}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, ..., n. \tag{34}$$

Нехай редукованою функцією, стосовно функції $f(x)$, є псевдобулевий многочлен $r(x)$. Вважаємо, що кожна змінна входить в той чи інший член многочлена в першому степені. В загальному цей многочлен є сумою лінійної і нелінійної частин. В кожен доданок нелінійної частини входить добуток принаймні двох змінних, отже, псевдобулевий многочлен є лінійною комбінацією змінних та їх добутків (не рахуючи вільного члена), тобто лінійною комбінацією псевдобулевих функцій вигляду (з точністю до нумерації змінних)

$$p(x^k) = \prod_{j=1}^{k} x_j, (1 \le k \le n), \tag{35}$$

яка на множині $D^k = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{k} D_j$, де $D_j = \{0, 1\}$, $j = 1, 2, ..., k$, приймає значення рівне 0, крім однієї точки $e^k = (1, 1, ..., 1)$, в якій приймає значення рівне 1. Тут $x^k = (x_1, x_2, ..., x_k)$. Якщо $k > 1$, то функцію (35) не можна замінити на D^k лінійною редукованою функцією, бо в просторі $\mathbb{R}^{k+1}$ не існує гіперплощина, яка б проходила через 2^k точок $(x^k, p(x^k))$, $x^k \in D^k$: якщо $k > 1$, то $k + 1 < 2^k$. Але, так як функція (35) приймає на скінченній множині D^k скінченні значення, то існує лінійна функція $\gamma(x^k)$, така, що

$$\gamma(x^k) \ge p(x^k) \text{ для всіх } x^k \in D^k, \tag{36}$$

назвемо її мажорантою функції $p(x^k)$ на D^k, і існує лінійна функція $\delta(x^k)$, така, що

$$p(x^k) \ge \delta(x^k) \text{ для всіх } x^k \in D^k, \tag{37}$$

назвемо її мінорантою функції $p(x^k)$ на D^k. Ці функції визначаються неоднозначно.

Розглянемо псевдобулеву задачу (1), (2), (30). Нехай (7), (8), (30) — відповідна редукована псевдобулева задача, в якій функції (6) є псевдобулевими многочленами з невід'ємними коефіцієнтами. $r_i(x; \gamma)$ — лінійна функція, яка є результатом підстановки в кожному доданку (члені) нелінійної частини многочлена $r_i(x)$, $(i = 0, 1, ..., m)$ замість добутку змінних як функції вигляду (35) відповідної мажоранти γ; $r_i(x; \delta)$ — лінійна функція, яка є результатом підстановки в кожному доданку нелінійної частини многочлена $r_i(x)$, замість добутку змінних відповідної міноранти δ. Тоді, так як коефіцієнти многочленів (6) невід'ємні числа, з нерівностей (36) і (37) випливають нерівності

$$r_i(x; \delta) \le r_i(x) \le r_i(x; \gamma), \ i = 0, 1, ..., m, \text{ для всіх } x \in D. \tag{38}$$

Отже, $r_i(x;\gamma)$ і $r_i(x;\delta)$ — мажоранта і міноранта функції $r_i(x)$ на D $(i = 0, 1, ..., m)$.

Розглянемо наступні дві псевдобулеві задачі лінійного програмування:

$$\max r_0(x;\delta), \tag{39}$$

$$r_i(x;\gamma) \le b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{40}$$

$$x_j \in D_j,\ j = 1, 2, ..., n; \tag{41}$$

$$\max r_0(x;\gamma), \tag{42}$$

$$r_i(x;\delta) \le b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{43}$$

$$x_j \in D_j,\ j = 1, 2, ..., n. \tag{44}$$

$X_{\delta,\gamma}$ — допустима множина задачі (39)–(41), задана обмеженнями (40) і умовами булевості (41); $X_{\gamma,\delta}$ — допустима множина задачі (42)–(44), задана обмеженнями (43) і умовами булевості (44).

Теорема 5. *Виконуються умови включення*

$$X_{\delta,\gamma} \subset X_r \subset X_{\gamma,\delta}. \tag{45}$$

(X_r — *допустима множина задачі* (7), (8), (30), *задана обмеженнями* (8) *і умовами булевості* (30).)

Доведення. Розглянемо ліву умову з умов включення (45). Нехай $x \in X_{\delta,\gamma}$ — будь-який допустимий розв'язок, тобто виконуються нерівності (40). Так як виконуються праві нерівності з нерівностей (38), то виконуються нерівності (8), отже, $x \in X_r$. Ліва умова з умов включення (45) доведена.

Розглянемо праву умову з умов включення (45). Нехай $x \in X_r$ — будь-який допустимий розв'язок, тобто виконуються нерівності (8). Так як виконуються ліві нерівності з нерівностей (38), то виконуються нерівності (43), отже, $x \in X_{\gamma,\delta}$. Теорема доведена.

Нехай $\widehat{x}_r$ — оптимальний розв'язок задачі (7), (8), (30); $\widehat{x}_{\delta,\gamma}$ — оптимальний розв'язок задачі (39)–(41); $\widehat{x}_{\gamma,\delta}$ — оптимальний розв'язок задачі (42)–(44).

Теорема 6. *Виконуються нерівності*

$$r_0(\widehat{x}_{\delta,\gamma};\delta) \le r_0(\widehat{x}_r) \le r_0(\widehat{x}_{\gamma,\delta};\gamma). \tag{46}$$

Доведення. Ліва нерівність (46) випливає з лівої нерівності (38), при $i = 0$, і лівої умови включення (45). Права нерівність (46) випливає з правої нерівності (38), при $i = 0$, і правої умови включення (45). Теорема доведена.

Що стосується вибору мажоранти і міноранти функції $p(x^k)$ на D^k, то очевидним є те, що в якості міноранти може бути вибрана стала функція $\delta(x^k) \equiv 0$, а в якості мажоранти будь-яка з функцій, тотожно рівних будь-якій із змінних x_j, $j = 1, 2, ..., k$: $\gamma(x^k) = x_j$, $j = 1, 2, ..., k$.

Результати розв'язування задач (39)–(41) і (42)–(44), при різних мажорантах і мінорантах функцій-многочленів редукованої псевдобулевої задачі, можуть бути використані для оцінки її оптимальних розв'язків.

1. *Белоусов Е. Г., Андронов В. Г.* Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования. – М.: Изд. МГУ, 1993. – 270 с.
2. *Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К.* Геометрическое программирование / Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 311 с.
3. *Червак Ю. Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 312 с.
4. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
5. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.: Наукова думка, 1988. – 472 с.
6. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
7. *Березин И. С. и Жидков Н. Т.* Методы вычислений. – Т. 1. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962. – 464 с.
8. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование / Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 506 с.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ / Пер. с англ. - М.: Мир, 1973. – 470 с.
10. *Кофман А., Анри-Лабордер А.* Методы и модели исследования операций / Пер. с франц. – Т. 3. – М.: Мир, 1973. – 432 с.
11. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН СССР. – 1958. – **51**. – С. 5–142.
12. *Ivanescu P., Rosenberg I., Rudean S.* Asupra determinarii minimerol functiilor pseudobooleene // Studii si cecretari mat. Acad. RPR. – 1963. – № 3. – С. 359–364.

Одержано 3.09.2003