УДК 519.8

А. Ю. Брила (Ужгородский нац. ун-т)

ДО ПИТАННЯ ПРО МАКСИМІЗАЦІЮ ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ НА МНОЖИНІ ПАРЕТО ЗА ДОПОМОГОЮ СИМПЛЕКСНОГО АЛГОРИТМУ

The task of maximization linear function on the Pareto set for multicriterian task of linear programming is considered in this paper.

В даній роботі розглядається задача максимізації лінійної функції на множині Парето для багатокритеріальної задачі лінійного програмування.

Паретівська задача багатокритеріальної оптимізації є однією з найперших, тому найбільше вивчених, задач багатокритеріального вибору. Її грунтовному дослідженню присвячена, наприклад, монографія [1]. Виражаючись мовою важливості [2], критерії в ній вважаються попарно рівноважливими, тому, в порівнянні з іншими задачами багатокритеріального вибору, ця задача, образно виражаючись, має найбільшу множину оптимальних (непокращуваних) розв'язків. Якщо проблема вибору зводиться до паретівської задачі, то остаточний вибір однієї альтернативи приводить до задачі вибору на множині оптимальних розв'язків, яку називають, звично, множиною Парето. Задачею остаточного вибору може бути задача скалярної однокритеріальної оптимізації [3].

В розглядуваній задачі векторна критеріальна функція має вигляд

$$c(x) = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j x_j = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{n} c_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} c_{qj} x_j \right), \tag{1}$$

де $c_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{kj} x_j$, $k = 1, 2, \dots, q$, $\overline{c}_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{qj})$, $j = 1, 2, \dots, n$; альтернатива $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ краща альтернативи $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ за k-тим критерієм, якщо і тільки якщо

$$c_k(x) > c_k(y); \tag{2}$$

альтернативи x і y рівноцінні за цим критерієм, якщо і тільки якщо

$$c_k(x) = c_k(y); \tag{3}$$

допустима множина $X \subset \mathbb{R}^n$ задається системою обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{4}$$

$$x_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{5}$$

Нехай X обмежена множина; $\hat{X}$ — множина Парето ($\hat{X} \subset X$), тобто множина оптимальних розв'язків паретівської задачі (1)–(5). Відомо, $\hat{x} \in \hat{X}$, якщо і тільки якщо існують додатні числа $\hat{\alpha}_k$, $k = 1, 2, \dots, q$, такі, що $\hat{x}$ є оптимальним розв'язком задачі максимізації (задачі лінійного програмування)

$$\max z = \sum_{k=1}^{q} \hat{\alpha}_k c_k(x), \quad x \in X. \tag{6}$$

Якщо $X \neq \varnothing$, то задача (6) має оптимальний розв'язок, так як за припущенням X є обмеженою множиною. Запишемо її оптимальну канонічну форму:

$$z = \hat{z}_0 + \sum_{j \in \hat{N}} \hat{z}_j(-x_j), \tag{7}$$

$$x_i = \hat{t}_{i0} + \sum_{j \in \hat{N}} \hat{t}_{ij}(-x_j), \quad i \in \hat{B}, \tag{8}$$

де $\hat{z}_j \geq 0$, $j \in \hat{N}$. За попереднім твердженням (необхідною і достатньою умовою існування $\hat{x}$), оптимальний розв'язок задачі (6), що визначається канонічною формою (7)–(8), тобто точка $\hat{x}$ з координатами

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \hat{t}_{i0}, \quad i \in \hat{B}, \\ \hat{x}_j &= 0, \quad j \in \hat{N}, \end{aligned} \tag{9}$$

є оптимальним розв'язком паретівської задачі (1)–(5); $\hat{z}_0$ — значення критеріальної функції z в цій точці, максимальне її значення на X. Нехай

$$\overline{c} = \hat{\overline{c}}_0 + \sum_{j \in \hat{N}} \hat{\overline{c}}_j(-x_j) \tag{10}$$

— вираження векторної критеріальної функції (1) через небазисні змінні x_j, $j \in \hat{N}$, яке одержується в результаті підстановки в (1) виразів (8) базисних змінних x_i, $i \in \hat{B}$. Тоді $\hat{\overline{c}}$ є значення векторної функції $\overline{c}$ в точці $\hat{x}$ з координатами (9): $\hat{\overline{c}} = \overline{c}(\hat{x})$.

Нехай

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j x_j \tag{11}$$

— задана скалярна лінійна функція. Основною задачею, розглядуваною в даній роботі, є знаходження точки максимуму функції (11) на $\hat{X}$:

$$\max f = f(x), \quad x \in \hat{X}. \tag{12}$$

Виразимо функцію (10) через небазисні змінні x_j, $j \in \hat{N}$:

$$f = \hat{f}_0 + \sum_{j \in \hat{N}} \hat{f}_j(-x_j). \tag{13}$$

$\hat{f}_0$ — значення функції f в точці $\hat{x}$ з координатами (9). Згідно з симплексним алгоритмом якщо $\hat{f}_j \geq 0$, $j \in \hat{N}$, то ця точка є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (12). Справді, система рівнянь (13), (8) є оптимальною канонічною формою задачі лінійного програмування

$$\max \quad f = f(x), \quad x \in X. \tag{14}$$

Але, так як $\hat{x} \in \hat{X}$ і $\hat{X} \subset X$, то оптимальний розв'язок задачі (14) є оптимальним розв'язком задачі (12). З іншого боку, якщо $f_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то будь-який оптимальний розв'язок задачі (14) є оптимальним розв'язком паретівської задачі, отже, й оптимальним розв'язком задачі (12). Тому в подальшому цей тривіальний випадок не розглядається, а припускається, що не всі коефіцієнти f_j, $j = 1, 2, \dots, n$, функції f (11) є додатними числами.

Зазначимо, згідно з симплексним алгоритмом коефіцієнти $\hat{z}_j, j \in \{0\} \cup \hat{N}$, в рівнянні (7) виражаються через додатні числа $\hat{\alpha}_k$, $k = 1, 2, \dots, q$, і компоненти векторних коефіцієнтів $\hat{\overline{c}}_j$, $j \in \{0\} \cup \hat{N}$ рівняння (10) наступним чином:

$$\hat{z}_j = \sum_{k=1}^{q} \hat{\alpha}_k \hat{c}_{kj}, \quad j \in \{0\} \cup \hat{N} \tag{15}$$

(тут $\hat{\overline{c}}_j = (\hat{c}_{1j}, \hat{c}_{2j}, \dots, \hat{c}_{qj},))$.

Припустимо, що серед коефіцієнтів $\hat{f}_j$, $j \in \hat{N}$, в рівнянні (13) є принаймні один від'ємний; нехай $\hat{f}_s < 0$, $s \in \hat{N}$. В системі рівнянь (8) виберемо напрямний елемент $\hat{t}_{rs} > 0$ за правилом, що зберігає невід'ємність змінних:

$$\frac{\hat{t}_{r0}}{\hat{t}_{rs}} = \min \left\{ \frac{\hat{t}_{i0}}{\hat{t}_{is}} | i \in \hat{B}; \hat{t}_{is} > 0 \right\}. \tag{16}$$

Існування його обумовлене обмеженістю допустимої множини X. Виконавши над канонічною формою (7), (8) відповідну операцію повного виключення, одержимо канонічну форму

$$z = \hat{z}'_0 + \sum_{j \in \hat{N}'} \hat{z}'_j(-x_j), \tag{17}$$

$$x_i = \hat{t}'_{i0} + \sum_{j \in \hat{N}'} \hat{t}'_{ij}(-x_j), \quad i \in \hat{B}'. \tag{18}$$

Нехай

$$\overline{c} = \hat{\overline{c}}' + \sum_{j \in \hat{N}'} \hat{\overline{c}}'_j(-x_j), \tag{19}$$

$$f = \hat{f}'_0 + \sum_{j \in \hat{N}'} \hat{f}'_j(-x_j) \tag{20}$$

— вираження векторної критеріальної фукнції $\hat{c}$ і скалярної фукнції f відповідно через небазисні змінні x_j, $j \in \hat{N}'$; $\hat{x}' = (x_i = \hat{t}'_{i0}, i \in \hat{B}'; x_j = 0, j \in \hat{N}')$ — базисний допустимий розв'язок системи рівнянь (4), який визначається канонічною формою (18) ($\hat{x}' \in X$). Тоді $f(\hat{x}') = \hat{f}'_0$, $\overline{c}(\hat{x}') = \hat{\overline{c}}'_0$, де

$$\hat{f}'_0 = \hat{f}_0 - \hat{f}_s \cdot \frac{\hat{t}_{r0}}{\hat{t}_{rs}} = f(\hat{x}) - \hat{f}_s \cdot \frac{\hat{t}_{r0}}{\hat{t}_{rs}}, \tag{21}$$

$$\hat{\overline{c}}'_0 = \hat{\overline{c}}_0 - \hat{\overline{c}}_s \cdot \frac{\hat{t}_{r0}}{\hat{t}_{rs}} = \overline{c}(\hat{x}) - \hat{\overline{c}}_s \cdot \frac{\hat{t}_{r0}}{\hat{t}_{rs}}. \tag{22}$$

За умови $\hat{f}_s < 0$ і за правилом (16) з рівності (21) випливає нерівність

$$f(\hat{x}') \geq f(\hat{x}), \tag{23}$$

яка в невиродженому випадку виконується як строга нерівність. Отже, в результаті одержується допустима альтернатива $\hat{x}'$, значення функції f в якій не менше ніж її значення в оптимальній альтернативі $\hat{x}$. При цьому постає питання, при якій умові $\hat{x}'$ може бути також оптимальною альтернативою паретівської задачі (1)–(5). Зрозуміло, що для цього можна намагатися так підібрати значення додатних чисел $\hat{\alpha}_k$, $k = 1, 2, \ldots, q$, що канонічна форма (17), (18) була оптимальною, тобто виконувалися достатні умови оптимальності:

$$\hat{z}'_j \geq 0, \quad j \in \hat{N}', \tag{24}$$

де $\hat{z}'_r = -\frac{1}{\hat{t}_{rs}}\hat{z}_s$, $\hat{z}'_j = \hat{z}_j - \frac{\hat{t}_{rj}}{\hat{t}_{rs}}\hat{z}_s$, $j \in \hat{N}'\backslash\{r\}$. Система нерівностей (24), за умов (15), є системою лінійних нерівностей стосовно невідомих $\hat{\alpha}_k$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Отже, з викладеного випливає наступна теорема.

Теорема. *Якщо існують додатні числа $\hat{\alpha}'_k$, $k = 1, 2, \ldots, q$, які складають розв'язок системи нерівностей (24), то $\hat{x}'$ є оптимальним розв'язком паретівської задачі (1)–(5).*

Доведення. Якщо додатні числа $\hat{\alpha}'_k$, $k = 1, 2, \ldots, q$ складають розв'язок системи нерівностей (24), то канонічна форма (17), (18) є оптимальною канонічною формою задачі лінійного програмування

$$\max z' = \sum_{k=1}^{q} \hat{\alpha}'_k c_k(x), \quad x \in X. \tag{25}$$

Отже, $\hat{x}'$ є оптимальним розв'язком паретівської задачі (1)–(5). Теорема доведена.

Якщо система нерівностей (24) немає розв'язку в додатних значеннях невідомих, то $\hat{x}' \notin \hat{X}$. Якщо $\hat{x}' \in \hat{X}$ і $\overline{c}(\hat{x}') \neq c(\hat{x})$, то вектори $\hat{\overline{c}}$ і $\hat{\overline{c}}'$ (див. (10), (19), (22)) паретівськи непорівнянні.

1. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
2. *Червак Ю. Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 312 с.
3. *Червак О. Ю., Сергієнко І. В.* Оптимізацію на множині Парето // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 1996. – Вип. №2. – С. 171-174.

Одержано 16.09.2003