УДК 519.44

В. Ф. Баранник (Ужгородський нац. ун-т)

ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ НЕЗВІДНИХ ПРОЕКТИВНИХ ЦІЛОЧИСЛОВИХ P-АДИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЦИКЛІЧНОЇ p-ГРУПИ

In this paper the tensor products of the irreducible projective representations of the cyclic group of order p^n ($p \neq 2$) over the ring R of integers of the finite unramified extension F of the field Q_p of rational p-adic numbers are studied.

В даній роботі вивчаються тензорні добутки незвідних проективних зображень циклічної групи порядку p^n ($p \neq 2$) над кільцем R всіх цілих величин скінченного нерозгалуженого розширення F поля раціональних p-адичних чисел Q_p.

Нехай G — скінченна група, e — одиничний елемент G, K — комутативне кільце з одиницею, K^* — мультиплікативна група кільця K, $GL(n, K)$ — група всіх оборотних матриць порядку n над K і E — одинична матриця порядку n. Проективним зображенням групи G степеня n над K називається відображення Γ групи G в групу $GL(n, K)$, яке задовольняє умови: $\Gamma(e) = E, \Gamma(a)\Gamma(b) = \lambda_{a,b}\Gamma(ab)$ $(\lambda_{a,b} \in K^*; a, b \in G)$. Відображення $\lambda : G \times G \to K^*$, $\lambda : (a, b) \to \lambda_{a,b}$ називається системою K^*-факторів групи G, $(\lambda \times \mu)(a, b) = \lambda_{a,b} \cdot \mu_{a,b}$ — добутком систем факторів. Два проективні зображення Γ_1 і Γ_2 називаються еквівалентними, якщо існує така матриця $S \in GL(n, K)$ і такі елементи $\alpha_g \in K^*$, що $S^{-1}\Gamma_1(g)S = \alpha_g\Gamma_2(g)(g \in G)$.

Нехай F — скінченне розширення поля раціональних p-адичних чисел Q_p і R — кільце всіх цілих величин поля F, P — простий ідеал кільця R. Кожному класу еквівалентних над R нерозкладних проективних R-зображень групи G поставимо у відповідність символ $[\Gamma]$ (Γ — нерозкладне проективне R-зображення групи G). Позначимо через $A_1(G, R)$ Q-модуль з базисом $W' = \{[\Gamma_i]\}$, де $W = \{\Gamma_i\}$ — множина всіх попарно нееквівалентних нерозкладних проективних R-зображень групи G, Q — поле раціональних чисел. Введемо в $A_1(G, R)$ операцію множення. Нехай $\Gamma_i, \Gamma_j \in W$. Відображення $\Gamma : g \to \Gamma_i(g) \times \Gamma_j(g)$ $(g \in G)$ є проективним R-зображенням групи G. Якщо λ_i — система факторів Γ_i $(1 \leq i \leq 2)$, то $\lambda_1 \times \lambda_2$ — система факторів $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$. Зображення Γ R-еквівалентне зображенню

$$\Gamma' : g \to \mathrm{diag}[\Gamma_{r_1}(g), \ldots, \Gamma_{r_m}(g)] \ (g \in G),$$

де $\Gamma_{r_t} \in W$ $(t = 1, \ldots, m)$. Задамо добуток $[\Gamma_i]$ і $[\Gamma_j]$ таким чином:

$$[\Gamma_i][\Gamma_j] = [\Gamma_{r_1}] + \cdots + [\Gamma_{r_m}]. \qquad (1)$$

Нехай $R^\lambda G$ — схрещене групове кільце групи G і кільця R при системі факторів $\lambda_{a,b}$, $\lambda_{a,b} \in R^*$; $a, b \in G$. Означення (1) коректне, оскільки для $R^\lambda G$-модулів має місце теорема Крулля-Шмідта (див. [1]). Цим самим $A_1(G, R)$ перетворюється в алгебру над Q.

Нехай $V = \{\Delta_i\}$ — множина всіх незвідних проективних R-зображень групи G. Позначимо через $B_1(G, R)$ підалгебру алгебри $A_1(G, R)$, породжену множиною $V' = \{[\Delta_i]\}$.

Нехай $A(RG)$ — підалгебра алгебри $A_1(G, R)$, породжена множиною $\{[\Gamma'_i]\}$, де $\{\Gamma'_i\}$ — множина всіх нерозкладних лінійних R-зображень групи G. Аналогічно вводиться підалгебра $B(RG)$ алгебри $B_1(R, G)$.

Алгебри $A(RG)$ і $A_1(R,G)$ вивчалися в [2–7]. В роботах [2–7] розв'язана задача про напівпростоту (в розумінні Джекобсона) алгебр $A(RG)$ і $A_1(R,G)$.

Питання про напівпростоту алгебри $B(RG)$ розв'язане в [8–10]. Алгебра $B_1(G,\mathbb{Z}_p)$, де G — циклічна група порядку p^n $(p \neq 2)$, $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел, вивчалася в [11].

Нехай F — скінченне нерозгалужене розширення поля раціональних p-адичних чисел Q_p степеня f, R — кільце всіх цілих величин поля F, R^* — мультиплікативна група кільця R і $H=(a)$ — циклічна група порядку p^n $(p \neq 2)$.

В даній роботі вивчається питання про напівпростоту алгебри $B_1(H,R)$ і доводиться, що вона скінченновимірна.

В кільці $R^\lambda H$ можна вибрати R-базис

$$u_e, u_a, \ldots, u_a^{p^n-1},$$

де $u_a^{p^n} = \gamma \in R^*$ (e — одиниця H).

Надалі $R^\lambda H$ будемо також позначати $[R,H,\gamma]$ або $H(\gamma)$.

Добре відомо, що довільна одиниця $\eta \in R$ однозначно представляється у вигляді:

$$\eta = \omega^r \prod_{i=1}^{f} \eta_i^{\alpha_i},$$

де ω — первісний корінь степеня p^f-1, r — ціле число $(0 \le r < p^f-1)$; α_i — ціле раціональне p-адичне число, $\eta_i = 1+\omega_i p$ $(i=1,\ldots,f)$; $\omega_1,\ldots,\omega_f$ — деякий цілий базис поля F відносно $\mathbb{Q}_p$. Оскільки $H(\gamma) = H(\mu^{p^n})$ $(\gamma,\mu \in R^*)$, то можна вважати, що $R^\lambda H = H(\eta)$, де

$$\eta = \prod_{i=1}^{f} \eta_i^{\alpha_i},$$

а α_i — таке ціле раціональне число, що $0 \le \alpha_i < p^n$ для кожного $i=1,\ldots,f$. Якщо $R^\lambda H$ не є груповим кільцем, то

$$\eta = \gamma^{p^k},$$

де $0 \le k < n$,

$$\gamma = (1+\omega_1 p)^{\beta_1} \cdots (1+\omega_f p)^{\beta_f},$$
$$(\beta_1,\ldots,\beta_f) \not\equiv (0,\ldots,0) (\mathrm{mod} p),$$
$$0 \le \beta_i < p^{n-k} \ (i=1,\ldots,f).$$

В цьому випадку кільце $R^\lambda H$ будемо позначати $[H,R,\beta_1,\ldots,\beta_f]$. Натомість групове кільце позначимо $[H,R,0,0,\ldots,0]$.

Клас еквівалентних систем R-факторів групи H будемо ототожнювати з системою чисел $(k,\beta_1,\ldots,\beta_f)$.

Нехай H — множина систем $(k,\beta_1,\ldots,\beta_f)$. На множині M визначимо множення за формулою:

$$(k',\beta_1',\ldots,\beta_f') \circ (k'',\beta_1'',\ldots,\beta_f'') = (k,\beta_1,\ldots,\beta_f),$$

де $\beta_i' p^{k'} + \beta_i'' p^{k''} \equiv \beta_i p^k (\mathrm{mod} p^n)$ для кожного $i=1,\ldots,f$. Зауважимо, що $k \ge \min\{k',k''\}$ при $(\beta_1,\ldots,\beta_f) \not\equiv (0,\ldots,0)(\mathrm{mod} p)$.

Нехай

$$k' = k'',\ k' > 0,\ \beta_i'' = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \beta_i' = 0; \\ p^{n-k'} - \beta_i', & \text{якщо} \quad \beta_i' > 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\beta_i' + \beta_i'' = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \beta_i' = 0; \\ p^{n-k'}, & \text{якщо} \quad \beta_i' > 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\beta_i' p^{k'} + \beta_i'' p^{k''} = p^{k'}(\beta_i' + \beta_i'') = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \beta_i' = 0; \\ p^{n}, & \text{якщо} \quad \beta_i' > 0. \end{cases}$$

Тому $k = 0$, $\beta_i = 0$. Отже,

$$(k', \beta_1', \ldots, \beta_f') \circ (k'', \beta_1'', \ldots, \beta_f'') = (0, 0, \ldots, 0).$$

Нехай $k' < k''$, $k' > 0$. Тоді $\beta_i' p^{k'} + \beta_i'' p^{k''} = (\beta_i' + \beta_i'' p^{k''-k'}) p^{k'}$. Якщо $\beta_i' \equiv (\mathrm{mod} p)$, то $\beta' \equiv \beta_i' + \beta_i'' p^{k''-k'} (\mathrm{mod} p)$. Але $(\beta_i', \ldots, \beta_f') \not\equiv (0, \ldots, 0)(\mathrm{mod} p)$. Отже, $\beta_i' \not\equiv 0 (\mathrm{mod} p)$ для деякого i, а тому в цьому випадку $k = k'$.

Якщо $k' = k''$, то $k = 0$, $\beta_1 = 0, \ldots, \beta_f = 0$ або $(\beta_i + \beta_i'') p^{k'} \equiv \beta_i p^k (\mathrm{mod} p^n)$, де $(\beta_1, \ldots, \beta_f) \not\equiv (0, \ldots, 0)(\mathrm{mod} p)$ і $k > 0$. Якщо $\beta_j \not\equiv 0 (\mathrm{mod} p)$, то з конгруенції $(\beta_j' + \beta_j'') p^{k'} \equiv \beta_j p^k (\mathrm{mod} p^n)$ випливає, що $\beta_j p^k \equiv 0 (\mathrm{mod} p^{k'})$ і тому $p^k \equiv 0 (\mathrm{mod} p^{k'})$, звідки $k \geq k'$.

Нехай t — корінь незвідного над R полінома $\varphi(x)$ з старшим коефіцієнтом 1. Позначимо через $\widetilde{t}$ матрицю, яка відповідає оператору множення на t в R-базисі $1, t, \ldots, t^m$ кільця $R[t]$.

Нехай H — циклічна група порядку p^n ($p \neq 2$, $\rho_{r,\ s,\ \beta_1, \ldots,\ \beta_f}$ — корінь полінома $\Phi_{p^r}\left(\frac{x^{p^{n-s}}}{\lambda_{\beta_1, \ldots, \beta_f}}\right)$), де

$$s = 0, 1, 2, \ldots, n; r = 0, 1, \ldots, s;$$

$$\lambda_{\beta_1, \ldots, \beta_f} = (1 + \omega_1 p)^{\beta_1} \cdots (1 + \omega_f p)^{\beta_f}, 0 \leq \beta_i < p^{n-s},$$

$$i = 1, \ldots, f, (\beta_1, \ldots, \beta_f) \not\equiv (0, \ldots, 0)(\mathrm{mod} p).$$

Всі незвідні нееквівалентні проективні R-зображення групи $H = (a)$ вичерпуються такими зображеннями: $a \to \widetilde{\rho}_{r,s,\beta_1,\ldots,\beta_f}$ ($s = 0, 1, 2, \ldots, n; r = 0, 1, \ldots, s; \beta_i = 0, 1, \ldots, p^{n-s} - 1, i = 1, \ldots, f$); $a \to \widetilde{\rho}_{k,n,0,\ldots,0}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Лема 1 (Шануель). *Нехай Λ — довільне кільце з одиницею і послідовності*

$$0 \to A_1 \to P_1 \to B_1 \to 0,$$

$$0 \to A_2 \to P_2 \to B_2 \to 0$$

Λ-модулів точні. Якщо P_1, P_2 — проективні Λ-модулі і $B_1 \cong B_2$, то $A_1 \oplus P_2 \cong A_2 \oplus P_1$.

Нехай $\Lambda_{i,k,\beta_1,\ldots,\beta_f}$ — R-кільце з визначальним співвідношенням

$$v_{i,k,\beta_1,\ldots,\beta_f}^{p^{n-k+i}} = \gamma^{p^i} v_e \ (i \leq k),$$

де $\gamma = (1+\omega_1 p)^{\beta_1} \cdots (1+\omega_f p)^{\beta_f}, 0 \leq \beta_l < p^{n-k}, l = 1, \ldots, f, (\beta_1, \ldots, \beta_f) \not\equiv (0, \ldots, 0)(\mathrm{mod} p)$.

Очевидно, існує гомоморфне відображення кільця $\Lambda_{k,\beta_1,\ldots,\beta_f}$ на кільце $\Lambda_{i,k,\beta_1,\ldots,\beta_f}$. Тому будь-яке R-зображення кільця $\Lambda_{i,k,\beta_1,\ldots,\beta_f}$ буде також R-зображенням кільця $\Lambda_{k,\beta_1,\ldots,\beta_f}$.

Нехай $A_{i,k,\beta_1,\ldots,\beta_f}$ — регулярне R-зображення кільця $\Lambda_{i,k,\beta_1,\ldots,\beta_f}$, $\Gamma_{i,k,\beta_1,\ldots,\beta_f}$ — незвідне R-зображенням кільця $\Lambda_{i,k,\beta_1,\ldots,\beta_f}$, яке реалізується в кільці $R[\Theta_{i,k,\beta_1,\ldots,\beta_f}]$, де

$\Theta_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}$ — корінь полінома $\Phi_{p^i}\left(\frac{x^{p^{n-k}}}{\gamma}\right)$ ($\Phi_{p^i}(y)$ — поліном ділення круга порядку p^i). Всі незвідні нееквівалентні проективні R-зображення групи H вичерпуються зображеннями вигляду $\Gamma_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\beta_f}$ ($i = 0, 1, \dots, k$; $\beta_l = 0, 1, \dots, p^{n-k} - 1$; $l = 1, \dots, f$; $(\beta_1, \dots, \beta_f) \not\equiv (0, \dots, 0)(\mathrm{mod} p)$); $\Gamma_{i,\ n,\ 0,\dots,0}$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Очевидно, $A_{0,\ k,\ \beta_1,\dots,\beta_f} = \Gamma_{0,\ k,\ \beta_1,\dots,\beta_f}$.

Лема 2. *Мають місце слідуючі точні послідовності $\Lambda_{k,\beta_1,\dots,\beta_f}$-модулів:*

$$0 \to R[\Theta_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}] \to \Lambda_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f} \to \Lambda_{i-1,k,\beta_1,\dots,\beta_f} \to 0,$$

$$0 \to \Lambda_{i-1,k,\beta_1,\dots,\beta_f} \to \Lambda_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f} \to R[\Theta_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}] \to 0.$$

Доведення. Нехай $m = v_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}^{p^{n-k+i-1}} - \gamma^{p^{i-1}}$, $t = 1 + v_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}^{p^{n-k+i-1}} + \dots + v_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}^{(p-1)p^{n-k+i-1}}$, де $v_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}$ — твірний елемент кільця $\Lambda_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\beta_f}$. Тоді справедливі слідуючі послідовності:

$$0 \to \Lambda_{i-1,k,\beta_1,\dots,\beta_f} \cdot m \to \Lambda_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f} \to \Lambda_{i-1,k,\beta_1,\dots,\beta_f} \to 0,$$
$$0 \to \Lambda_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f} \cdot t \to \Lambda_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f} \to R[\Theta_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}] \to 0.$$

Задамо гомоморфізми:

$$m' : \Lambda_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f} \cdot m \to R[\Theta_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}],$$

$$t' : \Lambda_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f} \to \Lambda_{i-1,k,\beta_1,\dots,\beta_f},$$

покладаючи:

$$m'\Big(\sum_l \lambda_l v_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}^l \cdot m\Big) = \sum_l \lambda_l \Theta_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}^l,$$

$$t'\Big(\sum_l \lambda_l v_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}^l \cdot t\Big) = \sum_l \lambda_l v_{i-1,k,\beta_1,\dots,\beta_f}^l \ (\lambda_l \in R).$$

Очевидно, m' і t' — ізоморфізми $\Lambda_{k,\beta_1,\dots,\beta_f}$-модулів. Лема доведена.

Лема 3. *Мають місце слідуючі формули множення в алгебрі $B_1(H, R)$:*

$$[A_{i_1,k_1,\beta_1',\dots,\beta_f'}] \circ [A_{i_2,k_2,\beta_1'',\dots,\beta_f''}] = p^{n-k_1+i_1}[A_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}] \ (k_1 - i_1 \geq k_2 - i_2), \tag{2}$$

$$[\Gamma_{i_1,k_1,\beta_1',\dots,\beta_f'}] \circ [A_{i_2,k_2,\beta_1'',\dots,\beta_f''}] = (p^{n-k_1+i_1} - p^{n-k_1+i_1-1})[A_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}] \ (k_1 - i_1 \geq k_2 - i_2), \tag{3}$$

$$[\Gamma_{i_1,k_1,\beta_1',\dots,\beta_f'}] \circ [A_{i_2,k_2,\beta_1'',\dots,\beta_f''}] = p^{n-k_2+i_2}[\Gamma_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}] \ (k_1 - i_1 < k_2 - i_2), \tag{4}$$

$$[\Gamma_{i_1,k_1,\beta_1',\dots,\beta_f'}] \circ [\Gamma_{i_2,k_2,\beta_1'',\dots,\beta_f''}] = (p^{n-k_2+i_2} - p^{n-k_2+i_2-1})[\Gamma_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}] \tag{5}$$

$$((k, \beta_1, \dots, \beta_f) = (k_1, \beta_1', \dots, \beta_f') \circ (k_2, \beta_1'', \dots, \beta_f''),\ i = k - k_2 + i_2);$$

$$[\Gamma_{i_1,k_1,\beta_1',\dots,\beta_f'}][\Gamma_{i_1,k_1,\beta_1',\dots,\beta_f'}] = p^{n-k_1+i_1-1}(p-2)[A_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}] + p^{n-k_1+i_1-1}[A_{i-1,k,\beta_1,\dots,\beta_f}] \tag{6}$$

$$(k, \beta_1, \dots, \beta_f) = (k_1, \beta_1', \dots, \beta_f') \circ (k_1,\ \beta_1', \dots,\ \beta_f'),\ i = k - k_1 + i_1.$$

Доведення. Зображення $A_{i_1,k_1,\beta_1',\dots,\beta_f'}$ і $A_{i_2,k_2,\beta_1'',\dots,\beta_f''}$ мають слідуючий вигляд:

$$A_{i_j,k_j,\beta_1^j,\dots,\beta_f^j} : v_{i_j,k_j,\beta_1^j,\dots,\beta_f^j} \to A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma^{p^{i_j}} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \ (j = 1, 2).$$

Тоді

$$A_{i_1,k_1,\beta'_1,\dots,\beta'_f}\otimes A_{i_2,k_2,\beta''_1,\dots,\beta''_f}:v_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}\to\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&0&\gamma^{p^{i_2}}A\\A&0&0&\dots&0&0\\0&A&0&\dots&0&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot\\0&0&0&\dots&A&0\end{pmatrix}.$$

Нехай

$$C=\begin{pmatrix}A&&&0\\&A^2&&\\&&\ddots&\\0&&&A^{p^{n_2-k_2+i_2}}\end{pmatrix}.$$

Очевидно,

$$C^{-1}(A_{i_1,k_1,\beta'_1,\dots,\beta'_f}\otimes A_{i_2,k_2,\beta''_1,\dots,\beta''_f})C:v_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}\to\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&0&\gamma^{p^{i_2}}A^{p^{n-k_2+i_2}}\\E&0&0&\dots&0&0\\0&E&0&\dots&0&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot\\0&0&0&\dots&E&0\end{pmatrix}.$$

Оскільки $A^{p^{n-k_2+i_2}}=(A^{p^{n-k_1+i_1}})^{p^{k_1-i_1-k_2+i_2}}=(\gamma^{p^{i_1}})^{p^{k_1-i_1-k_2+i_2}}=\gamma^{p^{k_1-k_2+i_2}}$E (E — одинична матриця порядку $p^{n-k_1+i_1}$), то

$$[A_{i_1,k_1,\beta'_1,\dots,\beta'_f}]\circ[A_{i_2,k_2,\beta''_1,\dots,\beta''_f}]=p^{n-k_1+i_1}[A_{i,k,\beta_1,\dots,\beta_f}],\tag{7}$$

де $(k,\beta_1,\dots,\beta_f)=(k_1,\beta'_1,\dots,\beta'_f)\cdot(k_2,\beta''_1,\dots,\beta''_f)$.

Порівнюючи степені зображень лівої і правої частини рівності (7), одержимо $i=$ $=k-k_2+i_2$. Формули (4) і (5) доводяться однотипно.

Помножимо точну послідовність

$$0\to R[\Theta_{i_1,k_1,\beta'_1,\dots,\beta'_f}]\to\Lambda_{i_1,k_1,\beta'_1,\dots,\beta'_f}\to\Lambda_{i-1,k,\beta'_1,\dots,\beta'_f}\to 0\tag{8}$$

тензорно на $R[\Theta_{i_2,k_2,\beta''_1,\dots,\beta''_f}]$, де $k_1-i_1<k_2-i_2$.

Тоді одержимо таку точну послідовність

$$\begin{gathered}0\to R[\Theta_{i_1,k_1,\beta'_1,\dots,\beta'_f}]\otimes_R R[\Theta_{i_2,k_2,\beta''_1,\dots,\beta''_f}]\to\\ \to\Lambda_{i_1,k_1,\beta'_1,\dots,\beta'_f}\otimes_R R[\Theta_{i_2,k_2,\beta''_1,\dots,\beta''_f}]\to\Lambda_{i_1-1,k_1,\beta'_1,\dots,\beta'_f}\otimes_R R[\Theta_{i_2,k_2,\beta''_1,\dots,\beta''_f}]\to 0.\end{gathered}\tag{9}$$

Згідно (3)

$$\begin{gathered}\Lambda_{i_1,\ k_1,\ \beta'_1,\dots,\ \beta'_f}\otimes_R R[\Theta_{i_2,\ k_2,\ \beta''_1,\dots,\ \beta''_f}]\cong(p^{n-k_2+i_2}-p^{n-k_2+i_2-1})\Lambda_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f},\\ \Lambda_{i_1,\ k_1,\ \beta'_1,\dots,\ \beta'_f}\otimes_R R[\Theta_{i_2,\ k_2,\ \beta''_1,\dots,\ \beta''_f}]\cong(p^{n-k_2+i_2}-p^{n-k_2+i_2-1})\Lambda_{i-1,\ k,\beta_1,\dots,\ \beta_f},\end{gathered}\tag{10}$$

де $i=k-k_1+i_1$ (nM означає $M\oplus\dots\oplus M$ (n разів)). Далі, враховуючи (8), має місце точна послідовність

$$\begin{gathered}0\to(p^{n-k_2+i_2}-p^{n-k_2+i_2-1})R[\Theta_{i_1,\ k_1,\ \beta'_1,\dots,\beta'_f}]\to\\ \to(p^{n-k_2+i_2}-p^{n-k_2+i_2-1})\Lambda_{i_1,\ k_1,\ \beta'_1,\dots,\beta'_f}\to\Lambda_{i_1-1,\ k_1,\ \beta'_1,\dots,\beta'_f}\to 0.\end{gathered}\tag{11}$$

На основі (9) і (10) одержуємо точну послідовність:

$$0 \to R[\Theta_{i_1,\ k_1,\ \beta'_1,\dots,\beta'_f}] \otimes_R R[\Theta_{i_2,\ k_2,\ \beta''_1,\dots,\ \beta''_f}] \to$$

$$\to (p^{n-k_2+i_2} - p^{n-k_2+i_2-1})\Lambda_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f} \to (p^{n-k_2+i_2} - p^{n-k_2+i_2-1})\Lambda_{i-1,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f} \to 0. \quad (12)$$

Застосовуючи лему 1, з формул (11) одержуємо:

$$R[\Theta_{i_1,\ k_1,\ \beta'_1,\dots,\beta'_f}] \otimes_R R[\Theta_{i_2,\ k_2,\ \beta''_1,\dots,\ \beta''_f}] \cong (p^{n-k_2+i_2} - p^{n-k_2+i_2-1})R[\Theta_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f}].$$

Доведемо формулу (6). За доведеним раніше точна послідовність

$$0 \to R[\Theta_{i_1,\ k_1,\ \beta_1,\dots,\beta_f}] \otimes_R R[\Theta_{i_1,\ k_1,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f}] \to$$

$$\to (p^{n-k_1+i_1} - p^{n-k_1+i_1-1})\Lambda_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f} \to p^{n-k_1+i_1-1}R[\Theta_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f}] \to 0.$$

Враховуючи лему 2 одержуємо слідуючу точну послідовність:

$$0 \to p^{n-k_1+i_1-1}\Lambda_{i-1,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f} \to p^{n-k_1+i_1-1}\Lambda_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f} \to p^{n-k_1+i_1-1}R[\Theta_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f}] \to 0.$$

Тоді з леми 1 випливає, що

$$R[\Theta_{i_1,\ k_1,\ \beta'_1,\dots,\beta'_f}] \otimes_R R[\Theta_{i_1,\ k_1,\ \beta'_1,\dots,\ \beta'_f}] \cong p^{n-k_1+i_1-1}(p-2)\Lambda_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f} \oplus$$

$$\oplus p^{n-k_1+i_1-1}\Lambda_{i-1,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f}.$$

Лема доведена.

Теорема 1. *Алгебра $B_1(H,R)$ скінченновимірна і напівпроста.*

$$\dim_Q B_1(H,R) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)\sum_{l=1}^{f} C_f^l (p^{n-k} - p^{n-k-1})^l + (2n+1).$$

Доведення. Нехай $M = \{[\lambda]|\ \lambda \in R^*\}$ — група класів еквівалентних систем R-факторів групи H (мультиплікатор). Якщо N RH-модуль, то через $\overline{N}$ будемо позначати $\overline{R}H$-модуль N/PN, де $\overline{R} = R/P$ — поле характеристики p (P — простий ідеал кільця R). Розглянемо лінійне відображення ψ алгебри $B_1(H,R)$) в алгебру $QM \otimes_Q \Lambda(\overline{R}H)$: $\psi([\Gamma]) = [\lambda] \otimes [\overline{\Gamma}]$, де Γ — проективне R-зображення групи H з системою R-факторів $\{\lambda_{a,b}\} \in [\lambda]$ $(a,b \in H)$, $\overline{\Gamma}$ — $\overline{R}$-зображення групи $H = (a)$, одержане з R-зображення $\Gamma : a \to \Gamma(a)$ групи H зведенням елементів матриці $\Gamma(a)$ за модулем ідеала P.

Легко бачити, що ψ — гомоморфізм алгебри $B_1(H,R)$ в алгебру $QM \otimes_Q A(\overline{R}H)$. З точністю до $\overline{R}$-еквівалентності мають місце формули:

$$\begin{gathered} \overline{\Gamma}_i,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f : a \to I_{(p^{n-k+i} - p^{n-k+i-1})}, \\ \overline{A}_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f} : a \to I_{p^{n-k+i}} \end{gathered} \quad (13)$$

(I_l — жорданова клітка з одиницями по головній діагоналі порядку l).

Нехай $\Delta_1,\dots,\Delta_t$ — всі нееквівалентні нерозкладні проективні R-зображення групи $H = (a)$, що входять в множину, яка складається з усіх зображень вигляду $\Gamma_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\ \beta_f}$, $A_{i,\ k,\ \beta_1,\dots,\beta_f}$. Очевидно, $\Delta_1,\dots,\Delta_t$ є Q-базис алгебри $B_1(H,R,V)$ і

$$t = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)\sum_{l=1}^{f} C_f^l (p^{n-k} - p^{n-k-1})^l + (2n+1).$$

З (13) випливає, що $\overline{\Delta}_i$ і $\overline{\Delta}_j$ $(i \neq j)$ $\overline{R}$-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли степені зображень $\overline{\Delta}_i$ і $\overline{\Delta}_j$ співпадають. Якщо степені $\overline{\Delta}_i$ і $\overline{\Delta}_j$ співпадають $(i \neq j)$, то в них нееквівалентні системи факторів. Звідси одержуємо, що $\mathrm{Ker}\psi = 0$. Як відомо [12], алгебра $A(\overline{R}H)$ напівпроста. Оскільки алгебра QM сепарабельна, то алгебра $QM \otimes_Q A(\overline{R}H)$ напівпроста. Отже, алгебра $B_1(H, R)$ напівпроста. Теорема доведена.

1. *Боревич З. И., Фаддеев Д. К.* Теория гомологий в группах// Вестник Ленингр. ун-та. – 1959. – №7. – С. 72–87.
2. *Reiner I.* Integral representation algebras// Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – **124**. – P. 111–121.
3. *Zemanek J. R.* Nilpotent elements in representation rings// J. Algebra. – 1971. – **19**. – P. 453–469.
4. *Гудивок П. М., Гончарова С. Ф., Рудько В. П.* Об алгебре целочисленных представлений конечной группы// Докл. АН СССР. – 1971. – **198**, №3. – С. 509–512.
5. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* Об алгебрах модулярных и целочисленных представлений конечных групп// Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – **53**, №5. – С. 963–987.
6. *Баранник А. Ф., Гудивок П. М.* Про алгебру проективних цілочислових зображень скінченних груп// Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – №4. – С. 291–293.
7. *Баранник А. Ф., Гудивок П. М.* Кільце проективних цілочислових P-адичних зображень скінченної групи// Матем. зб. наук. праць Львів. матем. тов-ва. – 1991. – Вип. I. – С. 44–54.
8. *Гудивок П. М., Гончарова С. Ф., Рудько В. П.* О тензорных произведениях неприводимых целочисленных p-адических представлений конечных групп// Укр. матем. ж. – 1982. – **4**, №6. – С. 688–694.
9. *Баранник В. Ф., Гудивок П. М., Рудько В. П.* Тензорні добутки зображень скінченних груп над повними дискретно нормованими кільцями// Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – №4. – С. 9–12.
10. *Баранник В. Ф., Рудько В. П.* Алгебра целых p-адических представлений абелевой группы, порожденная неприводимыми представлениями// Сб. "Материалы XXIX науч. конф. проф.-препод. состава УжГУ". Секция матем. наук (Ужгород, 1975). – М., 1975. – С. 195–209. – Деп. в ВИНИТИ, №705–76.
11. *Баранник В. Ф.* Тензорні добутки незвідних проективних цілочислових p-адичних зображень циклічної p-групи// Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 19–24.
12. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* Тензорные произведения представлений конечных групп. – Ужгород: Ужгород. ун-т, 1985. – 118 с.

Одержано 08.12.2004