УДК 512.5:512.64

В. М. Бондаренко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ОДИН КЛАС МАТРИЧНИХ ЗАДАЧ, ЗВ'ЯЗАНИХ З МОДУЛЯРНИМИ ЗОБРАЖЕННЯМИ КВАЗІДІЕДРАЛЬНИХ ГРУП ТА УЗАГАЛЬНЕНИХ ГРУП КВАТЕРНІОНІВ

In this paper we study extended t^2-representations of posets with involution which are generalizations of ordinary ones. The ordinary and extended representations (which were introduced by the author) arise, in particular, in classifying the modular representations of quasidihedral and generalized quaternion groups.

У статті розглядаються розширені t^2-зображення частково впорядкованих множин з інволюцією, які є узагальненням звичайних t^2-зображень. Ці (введені автором зображення) виникають, зокрема, при класифікації модулярних зображень квазідіедральних груп та узагальнених груп кватерніонів.

Добре відомо, що опис модулярних зображень групи G над полем k (тобто тоді, коли характеристика p поля k ділить порядок групи) зводиться до аналогічної задачі для її силовської p-підгрупи. Циклічна p-група має (з точністю до еквівалентності) скінченне число нерозкладних зображень, які описуються тривіальним чином; довільна нециклічна p-група має вже (над полем характеристики p) нескінченне число нерозкладних зображень (див., наприклад, §64 [1]).

Першим прикладом класифікації зображень нециклічної p-групи над полем характеристики p була отримана в 1961 р. класифікація зображень групи $(2,2)$ [2], яка тривіально звелася до добре відомої задачі про пучок матриць. Після цього серед спеціалістів з теорії зображень панувала думка, що і для інших p-груп модулярні зображення можна описати. Проте пізніше вияснилося, що в більшості випадків це не так, бо задача про опис зображень містить в собі класичну нерозв'язану задачу лінійної алгебри про канонічну форму пари операторів, що діють в скінченновимірному векторному просторі (пізніше такі задачі були названі дикими, а решта — ручними [3, 4]). А саме було доведено, що у випадку $p \neq 2$ дикою є задача про опис зображень групи (p,p) [5], а значить і довільної нециклічної p-групи, а у випадку $p = 2$ дикими є задачі про опис зображень груп $(2,4)$ і $(2,2,2)$ [6]. Із цих результатів випливало, що надіятися на класифікацію модулярних зображень (нециклічних) p-груп можна було лише при $p = 2$ і лише для груп, які не мають фактор-груп типу $(2,4)$ і $(2,2,2)$. Такі групи вичерпуються наступними трьома нескінченними серіями 2-груп [7]:

- діедральні групи $D_m = \langle x,\ y \mid x^2 = y^{2^m} = 1,\ yx = xy^{-1}\rangle$ $(m \geqslant 1)$;
- квазідіедральні групи $Q_m = \langle x,\ y \mid x^2 = y^{2^m} = 1,\ yx = xy^{2^{m-1}-1}\rangle$ $(m \geqslant 3)$;
- узагальнені групи кватерніонів $H_m = \langle x,\ y \mid y^{2^m} = 1,\ x^2 = y^{2^{m-1}},\ yx = xy^{-1}\rangle$ $(m \geqslant 2)$.

Першим нетривіальним результатом про повну класифікацію модулярних зображень p-груп був отриманий в 1975 р. автором [8] і, незалежно, К. Рінгелем [9]. А саме були описані модулярні зображення всіх діедральних 2-групп (відмітимо, що в [8] описані також зображення, над полем характеристики 2, всіх діедральних груп, що не є 2-групами). При цьому автор ввів і розв'язав деякий клас матричних задач з одним співвідношенням, а К. Рінгель використав метод, запропонований І. М. Гельфандом і В. А. Пономарьовим в [10]. Модулярні зображення квазідіедральних груп описані в 1977 р. в роботі [11] (результат анонсовано в [12]); при цьому виникає деякий клас матричних задач, які є узагальненням тих, що розглядалися при вивченні модулярних зображень діедральних груп. Відмітимо, що метод І. М. Гельфанда і В. А. Пономарьова в цьому випадку не працює.

В [11] доведено, що підгрупа скінченного індексу ручної над полем k групи сама є ручною над k. І оскільки узагальнена група кватерніонів H_m ізоморфна підгрупі квазідіедральної групи Q_{m+1}, яка породжена елементами xy і y^2, то узагальнені групи кватерніонів є ручними над полем характеристики 2. Таким чином, всі ручні випадки описано[1].

Сказане више можна сформулювати інваріантним чином у вигляді наступної теореми (через G' позначається, як звичайно, комутант групи G).

Теорема 1 ([11]). *Нециклічна скінченна p-група G є ручною над полем k характеристики p тоді і лише тоді, коли $(G : G') \leqslant 4$ (або, менш формально, $p = 2$ і $(G : G') = 4$).*

В роботі [11] доведено, що скінченна група є ручною над полем характеристики $p > 0$ тоді і лише тоді, коли ручною є її силовська підгрупа. В інваріантному вигляді цей результат формулюється наступним чином.

Теорема 2 ([11]). *Скінченна група G є ручною над полем k характеристики p тоді і лише тоді, коли довільна її абелева p-підгрупа порядку більше 4-х — циклічна.*

Відмітимо, що в це твердження формально можна включити і класичний випадок $p = 0$, якщо за 0-підгрупу вважати лише одиничну підгрупу.

Зупинимося тепер коротко на тому, яким чином описуються модулярні зображення діедральних та квазідіедральних груп (використовуючи сучасну термінологію, введену автором в його останніх роботах). Відмітимо, що всі частково впорядкові множини, які зустрічаються нижче, є скінченними.

Спочатку про діедральні групи.

1-*ий крок.* Оскільки довільна скінченна група D_m є фактор-групою групи $D_0 = (2) * (2)$ (вільного добутку двох циклічних груп другого порядку), то достатньо, з принципової точки зору, описати зображення групи D_0 над полем характеристики 2. На матричній мові це означає, що потрібно описати з точністю до подібності пари матриць A, B, кожна із яких дорівнює в квадраті одиничній матриці, або, враховуючи, що $\operatorname{char} k = 2$, — нульовій матриці: $A^2 = 0, B^2 = 0$.

2-*ий крок.* Для сформульованої задачі характеристика поля вже не є суттєвою і задача розглядається без обмежень на поле k. За допомогою розкладу матриці A в пряму суму клітин Жордана (розміру 1×1 і 2×2, з нульовими власними числами) з подальшою перестановкою її рядків і стовпців (узгодженим чином) приведемо A до вигляду

$$A_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & E \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(E — одинична матриця[2], всі діагональні клітини — квадратні) і у відповідності з її розбиттям проведемо горизонтальний і вертикальний поділ матриці B.

Будемо робити тепер з парою матриць A_0, B лише такі перетворення, які не змінюють вигляду матриці A_0. Тоді легко бачити, що ми маємо задачу про t^2-зображення

[1] У цій статті розглядаються класифікаційні задачі класичної теорії модулярних зображень груп. Читачам, які цікавляться зображеннями скінченних груп над кільцями, автор рекомендує праці П. М. Гудивка [13, 14, 15].

[2] У випадку, коли клітини Жордана розміру 2×2 відсутні, E — "пуста" матриця (а більш формально, матриця розміру 0×0).

частково впорядкованої множини з інволюцією $(X, *)$, де $X = \{1 < 2 < 3\}$ і $1^* = 3$, $2^* = 2$ (див. означення в пункті 2).

3-*ій крок.* Отже, на другому кроці ми упростили нашу задачу, а саме із задачі про приведення двох матриць з двома співвідношеннями отримали, хоч і блокову, але одну матрицю і, крім того, з одним співвідношенням. В роботі [8] розглядається природнє узагальнення задачі, яка виникла на другому кроці. А саме за A береться довільна лінійно впорядкована множина, а за $*$ — довільна інволюція на A; в термінах пункту 2 ми маємо задачу про t^2-зображення довільної лінійно впорядкованої множини з інволюцією. В [8] детально вивчається саме ця, остання, задача (після її розв'язання потрібно, звичайно, повернутися до початкової задачі і вказати її розв'язок).

По подібній схемі вивчаються і модулярні зображення квазідіедральних груп [11]. Зупинимось коротко на кожному з кроків.

1-*ий крок.* Добре відомо, що групова алгебра kQ_m є локальною і фробеніусовою. Значить в ній є єдиний мінімальний ідеал I (її цоколь) і довільне нерозкладне зображення, крім регулярного, є зображенням фактор-алгебри kQ_m/I. Ця фактор-алгебра ізоморфна алгебрі $\Lambda_n = \langle a,\, b \mid a^3 = 0,\, b^2 = 0,\, a^2 = (ba)^n b\rangle$ при $n = 2^{m-1} - 1$. За ізоморфізм можна взяти, наприклад, наступний:

$$a \mapsto (1+\overline{x})\left(\sum_{s=0}^{2^{m-3}-1} \overline{y}^{4s+1} + \sum_{s=2^{m-3}+1}^{2^{m-2}} \overline{y}^{4s-1}\right) + \overline{y}^{2^{m-1}} + x\overline{y}^{2^m-1},$$

$$a \mapsto (1+\overline{x})\left(\sum_{s=0}^{2^{m-3}-1} \overline{y}^{4s+1} + \sum_{s=0, s\neq 2^{m-2}}^{2^{m-1}-1} \overline{y}^{2s}\right),$$

де $\overline{x} = x + I$, $\overline{y} = y + I$.

Отже, наша задача звелася до задачі про класифікацію з точністю до подібності пар матриць A, B (над полем характеристики 2), які задовольняють рівностям

$$A^3 = 0, \quad B^2 = 0, \quad A^2 = (BA)^n B$$

при $n = 2^{m-1} - 1$ (тут $A = T_a$, $B = T_b$, де T — довільне зображення Λ_n). Ми розв'язуємо цю задачу для довільного поля і для довільного натурального числа n.

2-*ий крок.* Після приведення матриці A до вигляду

$$A_0 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(E_1, E_2 — одиничні матриці[3], всі діагональні клітини — квадратні) і додаткового, досить складного, приведення матриці B, вказана задача про пару матриць зводиться до задачі про блокову матрицю, яка в квадраті також дорівнює нулю, але структура допустимих перетворень більш складна і задається наступною частково впорядкованою множиною з інволюцією $S = (A, *)$: елементами A є числа $-n$ −

[3] Як і у випадку діедральних груп (див. примітку 2), кожна із цих матриць може бути "пустою".

$1, -n, \dots, -1, -0, +0, 1, \dots, n, n+1$, де $-0 \neq +0$, з природньою впорядкованістю (при цьому $-i < \pm 0 < j$ для $i, j > 0$, а -0 і $+0$ — єдина пара непорівняльних елементів) і $i^* = -i$ при $i \neq \pm 0, (\pm 0)^* = \pm 0$. В термінах пункту 2 ми маємо задачу про t^2-зображення множини з інволюцією $S = (A, *)$.

3-*ій крок.* Отримана на другому кроці задача узагальнюється, а саме за A береться довільна частково впорядкована множина, будь-який елемент якої непорівняльний не більше, ніж з одним елементом, а за $*$ — таку інволюцію, що рівність $a^* = b$ при $a \neq b$ можлива лише для елементів, які порівняльні з усіма іншими точками; такі множини S називаються $*$-напівланцюгами. Введений клас задач зводиться до деяких (ручних) класифікаційних задач без співвідношень, названих автором зображеннями в'язок напівланцюгів.

Для доведення теорем 1 і 2 повна класифікація модулярних зображень узагальнених груп кватерніонів не потрібна (див. вище), але вона цікава і важлива сама по собі (зокрема, тому, що завершує теорію, пов'язану з класифікацією модулярних зображень скінченних p-груп). Класифікація, про яку йде мова, отримана автором недавно і відповідний результат буде незабаром опублікований (див. [16]).

Модулярні зображення узагальнених груп кватерніонів описуються по тій же схемі, що і модулярні зображення діедральних та квазідіедральних груп. У цьому випадку на першому кроці виникає вже задача про класифікацію з точністю до подібності пар матриць A, B які задовольняють таким рівностям:

$$B^2 = (AB)^n A, \quad A^2 = (BA)^n B, \quad (AB)^{n+1} = 0;$$

відмітимо, що із вказаних рівностей випливає, що $A^3 = 0$, $B^3 = 0$ і $(BA)^{n+1} = 0$. На другому кроці виникає задача, яка є узагальненням відповідної задачі, що розглядалася у випадку квазідіедральних груп; в термінах пункту 2 це задача про розширені t^2-зображення частково впорядкованої множини з інволюцією $S = (A, *)$ (тієї ж самої, що і для квазідіедральних груп). На третьому кроці розглядається природнє узагальнення останньої задачі, коли за $S = (A, *)$ береться довільний $*$-напівланцюг.

У цій статті ми розглядаємо звичайні та розширені t^2-зображення довільної частково впорядкованої множини з інволюцією.

1. В'язки напівланцюгів та їх зображення. Оскільки зображення в'язок напівланцюгів відіграють головну роль у процесі класифікації модулярних зображень квазідіедральних груп і узагальнених груп кватерніонів, ми нагадаємо відповідні означення (в першу чергу для читачів, які не знайомі з роботами автора по цій тематиці). Відмітимо, що введені при цьому позначення використовуються також в наступних пунктах.

Для частково впорядкованої множини C позначимо через $\mathcal{N}(C)$ множину квадратних блокових матриць $M = (M_{xy}), x, y \in C$, над полем k, які задовольняють таким умовам:

а) горизонтальні (відповідно вертикальні) смуги матриці M занумеровані елементами множини C;

б) всі діагональні блоки M_{xx} є квадратними.

Через $\mathcal{N}_0(C)$ (відповідно $\mathcal{N}'_0(C)$ позначимо множину всіх матриць $M \in \mathcal{N}(C)$, для яких додатково виконується така умова:

с) блок M_{xy} є нульовим кожного разу, коли $x \not\leq y$ (відповідно $x \not\geq y$).

Легко бачити, що матриця $M \in \mathcal{N}_0(C)$ (відповідно $M \in \mathcal{N}'_0(C)$) є оборотньою тоді і лише тоді, коли оборотніми є всі M_{xx}; в цьому випадку $M^{-1} \in \mathcal{N}'_0(C)$ (відповідно $M^{-1} \in \mathcal{N}_0(C)$).

Далі, якщо на C задана деяка інволюція $*$ і $T = (C, *)$ позначає відповідну частково впорядковану множину з інволюцією, то через $\mathcal{N}(T)$ будемо позначати множину всіх матриць $M \in \mathcal{N}(C)$, таких, що (квадратні) блоки M_{xx} і $M_{x^*x^*}$ мають однаковий розмір для будь-якого $x \in C$; а через $\mathcal{N}_0(T)$ будемо позначати множину всіх матриць $M \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}_0(C)$, таких, що $M_{xx} = M_{x^*x^*}$ для будь-якого $x \in C$.

При розгляді добутку MN блокових матриць M і N будемо завжди вважати, що поділ матриці N на горизонтальні смуги узгоджений з поділом матриці M на вертикальні смуги (тобто смуги з однаковими номерами мають однакову розмірність); тоді матриці можна перемножати поблоково.

Нагадаємо, що напівланцюгом називається частково впорядкована множина виду $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$, де кожна підмножина X_i (яка називається його компонентою) складається із однієї або двох непорівняльних між собою елементів і при цьому $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ для довільних $x_i \in X_i$.

В'язки довільних напівланцюгів $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_n$, $n \geqslant 1$, та їх зображення вводяться в [17, 18]. Ми розглянемо тут лише випадок $n = 1$ (тому, що саме цей випадок виникає в процесі опису модулярних зображень квазідіедральних груп та узагальнених груп кватерніонів і при доведенні сформульованої в останньому пункті теореми).

Нехай A і B — напівланцюги, що не перетинаються. Їх в'язкою називається тройка $\overline{S} = (A, B, \star)$, де $\star$ — інволюція на $A \cup B$, така, що $x^\star = x$ для будь-якого елемента x, який належить двоелементній компоненті A або B. Зображенням в'язки $\overline{S}$ над полем k називається блокова матриця U над k, така, що

1) горизонтальні смуги матриці U занумеровані елементами напівланцюга A, а вертикальні — елементами напівланцюга B; смуга з номером $x \in A \cup B$ позначається через $P(x)$, а її розмірність (тобто, кількість рядків, якщо $x \in A$, і кількість стовпців, якщо $x \in B$) — через $\dim P(x)$;

2) $\dim P(x) = \dim P(y)$ кожного разу, коли $x^\star = y$.

Відмітимо, що серед смуг $P(x)$ можуть бути "пусті" (тобто такі, що мають розмірність 0).

Зображення в'язки назвемо невиродженим, якщо відповідна йому блокова матриця є оборотньою.

Зображення U і U' в'язки напівланцюгів $\overline{S} = (A, B, \star)$ називаються еквівалентними, якщо $MUN = U'$ для деяких невироджених матриць $M \in \mathcal{N}_0'(A)$ і $N \in \mathcal{N}_0(B)$, таких, що

$M_{xx} = M_{yy}$ кожного разу, коли $x^\star = y$ і при цьому $x \in A$, $y \in A$;

$N_{xx} = N_{yy}$ кожного разу, коли $x^\star = y$ і при цьому $x \in B$, $y \in B$;

$M_{xx} = N_{yy}$ кожного разу, коли $x^\star = y$ і при цьому $x \in A$, $y \in B$.

Пряма сума і нерозкладність зображень в'язки напівланцюгів визначаються природнім чином.

В [17, 18] дається повна, з точністю до еквівалентності, класифікація нерозкладних зображень довільної в'язки напівланцюгів (для довільного $n \geqslant 1$).

Зображення в'язок напівланцюгів виникають при вивченні зображень різних класів сагайдаків (орієнтовних графів) із співвідношеннями та алгебр (див., наприклад, [19, 20, 21, 22, 23, 24]), у процесі класифікації точних частково впорядкованих множин нескінченного росту [25], при розгляді зображень частково впорядкованих множин з інволюцією [26] та з відношенням еквівалентності [27, 28] (в тому числі з деякими умовами невиродженості [29, 30]). В останній час основна класифікаційна теорема роботи [18] використовується при вивченні різних задач теорії зображень, топології та алгебраїчної геометрії (див., наприклад, [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39]).

2. $f(t)$-зображення частково впорядкованих множин з інволюцією. Нехай $T = (C, *)$ — частково впорядкована множина з інволюцією і $f = f(t)$ — поліном над k степені $\deg f > 0$. Ми називаємо $f(t)$-зображенням (інколи звичайним $f(t)$-зображенням) множини T всяку матрицю $V \in \mathcal{N}(T)$, таку, що $f(V) = 0$. Два $f(t)$-зображення V і V' називаємо еквівалентними, якщо $M^{-1}VM = V'$ для деякої невиродженої матриці $M \in \mathcal{N}_0(T)$. Пряма сума і нерозкладність $f(t)$-зображень визначаються природнім чином.

Пару (T, f) назвемо парою скінченного, ручного, дикого і т. п. типів, якщо такою є задача про опис (з точністю до еквівалентності) f-зображень множини T. Вивченню таких пар присвячено ряд робіт автора [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51]. Відмітимо, що при цьому суттєво використовується основна класифікаційна теорема для зображень в'язок напівланцюгів [18].

Теорема 3 ([43, 51]). *Пара (T, f) має скінченний тип тоді і лише тоді, коли T є ланцюгом з тривіальною інволюцією і при цьому виконується одна із таких умов:*
1) $\deg f(t) = 1$;
2) $|C| = 1$;
3) $|C| = 2,\ \deg f(t) = 2, 3$;
4) $|C| > 2,\ \deg f(t) = 2$.

Теорема 4 ([40, 50, 51]). *Нехай* $\deg f(t) = 2$. *Тоді пара (T, f) є ручною в тому і лише в тому випадку, коли T — $*$-напівланцюг.*

Теорема 5 ([40, 47, 51]). *Нехай* $\deg f(t) > 2$ *і при цьому пара (T, f) має нескінченний тип. Тоді пара (T, f) є ручною тоді і лише тоді, коли коли виконуються такі умови:*
1) *T — ланцюг з тривіальною інволюцією довжини* $6 - \deg f(t)$;
2) *кратність довільного кореня поліному $f(t)$ менша трьох.*

Теорема 6 ([51]). *Нехай (T, f) — пара нескінченного типу. Тоді (T, f) має скінченний ріст тоді і лише тоді, коли інволюція $*$ тривіальна, всі корені поліному $f(t)$ є різними і додатково виконується одна із таких умов:*
a) $\deg f(t) = 2$, *C — напівланцюг з одною двоелементною компонентою*;
b) $\deg f(t) = 3$, *C — ланцюг довжини* 3;
c) $\deg f(t) = 4$, *C — ланцюг довжини* 2.

3. Розширені t^2-зображення частково впорядкованих множин з інволюцією. Розширені t^2-зображення частково впорядкованої множини з інволюцією введені автором в [16] (як уже відмічалося вище, в зв'язку з описом модулярних зображень узагальнених груп кватерніонів).

Нехай $T = (C, *)$ — частково впорядкована множина з інволюцією. Позначимо через $\overline{C}$ частково впорядковану множину $C \cup \{-\infty, +\infty\}$, де $-\infty < c < +\infty$ для довільного $c \in C$; далі, позначимо через $\overline{T}$ частково впорядкована множина з інволюцією $(\overline{C}, *)$, де інволюція $*$ діє на C по-старому і $(-\infty)^* = +\infty$. Розширеним t^2-зображенням множини T назвемо довільну блокову матрицю $W = (W_{xy})$, $x \in C \cup -\infty$, $y \in C \cup +\infty$, таку, що її блокова підматриця $W_0 = (W_{xy}), x, y \in C$, є звичайним t^2-зображенням множини T і, окрім того,

a) добуток блокових підматриць $(W_{-\infty,x}), x \in C$, і W_0 є нульовою матрицею;

b) добуток блокових підматриць W_0 і $(W_{y,+\infty}), y \in C$, є нульовою матрицею;

c) добуток блокових підматриць $(W_{-\infty,x}), x \in C$, і $(W_{y,+\infty}), y \in C$, є одиничною матрицею.

Зіставимо такому зображенню W звичайне t^3-зображення $\overline{W}$ нашої частково впорядкованої множини з інволюцією $\overline{T} = (\overline{C}, *)$ наступним чином: $\overline{W} = (\overline{W}_{xy})$, $x, y \in \overline{C}$, де $\overline{W}_{xy} = W_{xy}$ при $x \in C \cup -\infty$, $y \in C \cup +\infty$ і $\overline{W}_{xy} = 0$ для решти випадків. Два розширені t^2-зображення W і W' назвемо еквівалентними, якщо еквівалентні відповідні їм t^3-зображення $\overline{W}$ і $\overline{W}'$. Пряма сума і нерозкладність розширених t^2-зображень визначаються природнім чином.

Має місце наступна теорема.

Теорема 7. *Задача про опис розширених t^2-зображень частково впорядкованої множини з інволюцією $T = (C, *)$ є ручною тоді і лише тоді, коли ручною є задача про опис її звичайних t^2-зображень (або, іншими словами, коли T є $*$-напівланцюгом; див. теорему 4).*

Доведення. Ручність задачі про опис розширених t^2-зображень довільного $*$-напівланцюга $T = (C, *)$ доведена в [16 за допомогою модифікації методу “інтегрування матричних задач” [51,§§ 6,7]), з суттєвим використанням основної класифікаційної теореми для зображень в’язок напівланцюгів [18]. Дикість цієї задачі у випадку, коли частково впорядкована множина $T = (C, *)$ не є $*$-напівланцюгом, доводиться по аналогічной схемі, але вже з використанням теореми 1 із [53] про невироджені зображення пар підкатегорій категорії скінченновимірних векторних просторів (зображення таких пар введені в [51,§5]).

Відмітимо, що в роботі [52] автор ввів розширені t^m-зображення частково впорядкованих множин з інволюцією не лише для $m = 2$, а і для довільного $m > 2$. Але випадок $m > 2$ не виникає беспосередньо при вивченні модулярних зображень груп і тому в цій статті не розглядається.

1. *Кертис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука, 1969. – 668 с.
2. *Башев В. А.* Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 // ДАН СССР. – 1961. – **141**. – Вып. 5. – С. 1015–1018.
3. *Donovan P., Freislich M. R.* Some evidence for an extension of the Brauer-Thrall conjecture // Sonderforschungsbereich. Theor. Math.(Bonn). – 1973. – **40**. – P. 24–26.
4. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
5. *Кругляк С. А.* О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p // ДАН СССР. – 1963. – **153**. - Вып. 6. – С. 1263–1265.
6. *Brenner S.* Modular representations of p-groups // J. Algebra. – 1970. – no. 1. – P. 69–102.
7. *Huppert B.* Endliche Gruppen. - Berlin: Springer-Verlag, 1967. – 793 p.
8. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**. – Вып. 1. – С. 63–74.
9. *Ringel C.* The indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**. – no. 1. – P. 19–34.
10. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**. – Вып. 2. – С. 3–60.
11. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления. – Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
12. *Бондаренко В. М.* Модулярные представления квазидиэдральных групп // Пятый Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы сообщений. – Новосибирск, 1976. – С. 10–11.
13. *Гудивок П. М.* Целочисленные представления конечных групп (учебное пособие). – Ужгород: Ужгород. гос. ун-т, 1978. – 81 с.
14. *Гудивок П. М.* Про розвиток теорії зображень скінченних груп в Ужгородському університеті // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вып. 7. – С. 4–15.
15. *Гудивок П. М.* Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2003. – 118 с.

16. *Бондаренко В. М.* Про класифікацію модулярних зображень узагальнених груп кватерніонів // Доповіді НАН України. – 2004. – №12.
17. *Бондаренко В. М.* Связки полуцепных множеств и их представления. – К.: 1988. – 32 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.60).
18. *Бондаренко В. М.* Представления связок полуцепних множеств и их приложения // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, вып. 5. – С. 38–61.
19. *Шкабара А. С.* Коммутативные колчаны ручного типа. К.: 1978. – 32 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 78.42).
20. *Шкабара А. С.* Колчаны с соотношениями и ДГК // Представления колчанов с соотношениями. (К.: Препр. / АН УССР. Ин-т математики) – 1978 – №78.43 – С. 3–41.
21. *Завадский А. Г.* Колчаны без циклов с выделенным путем ручного типа // Представления колчанов с соотношениями. (К.: Препр. / АН УССР. Ин-т математики) – 1978 – №78.43 – С. 42–56.
22. *Happel D., Vossieck D.* Minimal algebras of infinite representation type with preprojective component // Manuscripta math. – 1983. – **42**. – P. 221–243.
23. *Bongartz K.* Critical simply connected algebras // Manuscripta math. – 1984. – **46**. – P. 117–136.
24. *Skowroński A.* Group algebras of polynomial growth // Manuscripta math. – 1987. – **59**. – P. 499–516.
25. *Бондаренко В. М.* Точные частично упорядоченные множества бесконечного роста // Линейная алгебра и теория представлений. – К.: Ин-т математики АН УССР. - 1993. – С. 63–85.
26. *Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В.* Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией // Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. – 1990. – **183**. – С. 149–159.
27. *Bondsrenko V. M, Zavadskij A. G.* Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth // Canad. Math. Soc. Conf. Proc. – 1991. – **11**. – P. 67–88.
28. *Bondarenko V. M., Zavadskij A. G.* Tame posets with equivalence relation, Contem. Math. – 1992. – **131**, part 2. – P. 237–251.
29. *Бондаренко В. М.* Представления с условиями невырожденности слабо пополненных частично упорядоченных множеств: категории $\overline{R}_k(S\coprod T)$ конечного типа // Вісник Київ. ун-ту (сер. фіз.-мат. науки). – 1999. – №2. – С. 14–23.
30. *Бондаренко В. М.* Представления двухкомпонентных слабо пополненных частично упорядоченных множеств с условиями невырожденности: описание ручных и диких случаев // Вісник Київ. ун-ту (сер. фіз.-мат. науки). – 1999. – №3. – С. 33–42.
31. *Dräxler P., Geiss Ch.* A note on the $\mathrm{D_n}$-pattern // Canad. Math. Soc. Conf. Proc.. – 1998. – **24**. – P. 145–152.
32. *Drozd Yu. A.* Cohen-Macaulay modules and vector bundles// Interactions between ring theory and representations of algebras (Murcia); Lecture notes in Pure and Appl. Math. – 2000. – **210**. – P. 107–130.
33. *Baues Hans-Joachim, Drozd Yuri.* Representation theory of homotopy types with at most two non-trivial homotopy groups localized at a prime// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 2000. – **128**. – P.283–300.
34. *Baues Hans-Joachim, Drozd Yuri.* Indecomposable homotopy types with at most two non-trivial homology groups// Groups of homotopy self-equivalences and related topics (Gargnano, 1999); Contemp. Math. – 2001. – **274**. – P. 39–56.
35. *Drozd Yu. A., Greuel Gert-Martin.* Projective curves and classification of vector bundles // J. Algebra. – 2001. – **246**, no. 1. – P. 1–54.
36. *Drozd Yu. A.* Finitely generated quadratic modules// Manuscripta Math. – 2001. – **104**, no. 2. – P. 239–256.
37. *Brüstle Th, König S., Mazorchuk V.* The coinvariant algebra and representation types of blocks of category $\mathcal{O}$ // Bull. London Math. Soc. – 2001. – **33**. – P. 669–681.
38. *Burban I., Drozd Yu.* Derived categories of nodal algebras // J. Algebra. – 2004. – **272**, no. 1. – P. 46–94.
39. *Burban I., Drozd Yu.* Coherent sheaves on rational curves with simple double points and transversal intersections // Duke Math.J. – 2004. – **121**, no. 2. – P. 189–229.
40. *Бондаренко В. М.* О классификации линейных операторов с точностью до S-подобия // Доповіді НАН України. – 1997. – №10. – С. 16–20.
41. *Бондаренко В. М.* Операторы в S-пространстве, удовлетворяющие полиномиальному равенству // Науковий вісник Ужгородського університету (серія: математика). – 1997. – Вип. 2. – С. 12–17.
42. *Бондаренко В. М.* Линейные операторы в конечномерных S-пространствах // Некоторые во-

просы современной математики. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1998. – **25**. – С. 7–24.

43. *Бондаренко В. М.* Категории $\Lambda_{S,k,f}$ конечного типа // Некоторые вопросы современной математики. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1998. – **25**. – С. 25–34.
44. *Бондаренко В. М.* Классификация объектов категории $\Lambda_{S,k,f}$ конечного типа // Некоторые вопросы современной математики. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1998. – **25**. – С. 35–48.
45. *Бондаренко В. М.* О каноническом виде проектора в фильтрированном векторном пространстве // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1998. – Вип. 3. – С. 24–29.
46. *Bondarenko V. M.* Operators on $(A,*)$-Spaces and Linear Classification Problems // Proc. of the Third International Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – Part 2. – Kiev. – 1999. – P. 330–332.
47. *Бондаренко В. М.* Лінійні оператори в скінченновимірних S-просторах: пари (S,f) ручного типу // Вісник Київ. ун-ту імені Тараса Шевченко (Математика. Механіка). – 1999. – Вип. 3. – С. 6–10.
48. *Бондаренко В. М.* О нормальной форме оператора, действующего в конечномерном фильтрованном векторном пространстве // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1999. – Вип. 4. – С. 4–11.
49. *Бондаренко В. М.* Классификация линейных операторов с минимальным полиномом $f(t) = (t-a)(t-b)$, $a \neq b$, действующих в фильтрованном векторном пространстве // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**. – №1. – С. 31–35.
50. *Bondarenko V. M.* Operators on a finite-dimensional S-space that satisfy a quadratic equality: tame and wild cases // Математичні Студії. – 2000. – **14**, no. 1. – С. 19–22.
51. *Bondarenko V. M.* Linear operators on S-graded vector spaces // Linear algebra and its application. – 2003. – **365**. – P. 45–90.
52. *Bondarenko V. M.* On $f(t)$-representations of posets with involution // Proc. of Kyiv University. – 2004 – №3. – С. 11–12.
53. *Bondarenko V. M.* On certain aspects of the representation theory of bundles of semichaines // Алгебраїчні структури та їх застосування: Праці Українського математичного конгресу. – Київ, 2002 – С. 190–200.

Одержано 21.10.2004