УДК 512.815.6

А. Б. Коновалов, А. Г. Цапок (Запорожский гос. ун-т)

СИММЕТРИЧНЫЕ ПОДГРУППЫ НОРМИРОВАННОЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЫ МОДУЛЯРНОЙ ГРУППОВОЙ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНОЙ p-ГРУППЫ

Let $V(KG)$ be a normalised unit group of the modular group algebra of a finite p-group G over the field K of p elements. We introduce a notion of symmetric subgroup in $V(KG)$ as a subgroup invariant under the action of the classical involution of the group algebra KG. We study properties of symmetric subgroups and construct a counterexample to the conjecture by V. Bovdi, which states that $V(KG) = \langle G, S_* \rangle$, where S_* is a set of symmetric units of $V(KG)$.

Нехай $V(KG)$ — нормована мультиплікативна група модулярної групової алгебри скінченної p-групи G над полем K з p элементів. Вводиться поняття симетричної підгрупи групи $V(KG)$, як підгрупи, інваріантної відносно класичної інволюції групової алгебри KG. Досліджуються властивості симетричних підгруп та знаходиться контрприклад до гіпотези В. Бовді про те, що $V(KG) = \langle G, S_* \rangle$, де S_* — множина симетричних елементів групи $V(KG)$.

Данная статья посвящена изучению структуры мультипликативной группы $U(KG)$ модулярной групповой алгебры KG, где G — конечная p-группа, K — поле из p элементов. Группа $U(KG)$ разлагается в прямое произведение мультипликативной группы поля K и нормированной мультипликативной группы $V(KG)$, состоящей из всех элементов вида $1 + x$, где x принадлежит $I(G)$ — фундаментальному идеалу модулярной групповой алгебры KG. Поэтому задача исследования группы $U(KG)$ сводится к изучению группы $V(KG)$, которая при этом также является p-группой, как и исходная группа G.

Изучение свойств обратимых элементов является одним из основных направлений исследований в теории групповых колец. Полученные в этой области результаты также применяются для исследования Лиевских свойств групповых колец, проблемы изоморфизма групповых колец и других открытых проблем в этой области (см., например, [1]).

Рассмотрим отображение φ из групповой алгебры KG в себя, которое отображает элемент $x = \sum \lambda_g g$ в элемент $\sum \lambda_g g^{-1}$. Оно является антиавтоморфизмом второго порядка, который называется *классической инволюцией* групповой алгебры KG. В дальнейшем мы будем обозначать $\varphi(x)$ через x^*. Элемент $x \in KG$ называется симметричным элементом, если $x = x^*$. Заметим, что если $x^* \neq x^{-1}$, то x^*x — нетривиальный симметричный элемент. Действительно, $\varphi(x^*x) = (x^*x)^* = x^*x^{**} = x^*x$, так как $x^{**} = x$. Классическая инволюция и симметричные относительно неё элементы изучались В. Бовди, М. Докучаевым, Л. Ковачем, С. Сегалом в работах [2, 3, 4, 5, 6].

В работе [7] указывается система образующих группы $V(KG)$, которая, однако, является минимальной только в абелевом случае. Для неабелевой группы проблема нахождения минимальной системы образующих в общем случае остается открытой. Для групп малых порядков минимальную систему образующих можно вычислить с помощью компьютера, предварительно вычислив группу $V(KG)$ с помощью алгоритма из [7], реализованного в пакете LAGUNA [8] для системы компьютерной алгебры GAP [9]. Наличие дальнейших теоретических результатов о минимальной системе образующих было бы полезно для усовершенствования алгоритмов вычисления группы $V(KG)$.

В 1996 году В. Бовди выдвинул следующую гипотезу:

Пусть G — конечная некоммутативная p-группа, $V(KG)$ — нормированная мультипликативная группа модулярной групповой алгебры KG, и

$$S_* = \{x \in V(KG) \mid x^* = x\}$$

— множество симметричных обратимых элементов. Верно ли, что

$$V(KG) = \langle G, S_* \rangle? \tag{1}$$

В настоящей работе приводится контрпример к этой гипотезе и исследуются дальнейшие свойства классической инволюции. Для этого вводятся понятия симметричных подмножеств групповой алгебры и симметричных подгрупп группы $V(KG)$, и исследуются их свойства. Далее, приводятся очевидные примеры симметричных подгрупп и ставится задача поиска нетривиального примера симметричной подгруппы. Затем исследуется нормированная мультипликативная группа модулярной групповой алгебры группы кватернионов порядка 8, и для нее проверяется гипотеза (1). Вычисления, произведенные авторами на компьютере с помощью пакета LAGUNA [8] показывают, что в данном случае условие (1) не выполняется, так как порядок подгруппы $\langle G, S_* \rangle$ равен 64. В данной статье порядок этой подгруппы вычисляется теоретически. Кроме того, оказывается, что эта подгруппа является симметричной, также как и множество S_*, которое в данном случае образует группу, что дает нам два примера нетривиальных симметричных подгрупп.

Представляет интерес дальнейшее изучение свойств симметричных подгрупп группы $V(KG)$ и выяснение условий существования в ней нетривиальных симметричных подгрупп.

1. Симметричные подгруппы. Пусть H — подмножество групповой алгебры KG. Назовём его *симметричным*, если $H^* = H$, где $H^* = \{h^* \mid h \in H\}$. Аналогично, если H — подгруппа группы $V(KG)$, назовём её *симметричной подгруппой* , если $H^* = H$.

Очевидно, что симметричные подгруппы существуют. Легко видеть, что такими подгруппами будут являться $\{1\}$, G, $V(KG)$. Возникает вопрос, существуют ли нормированные мультипликативные группы групповых алгебр, обладающие нетривиальными симметричными подгруппами? Более того, в работе [2] получены условия, при которых множество всех симметричных обратимых элементов образует группу, которая, в этом случае, очевидно, будет симметричной. Поэтому интересно найти такой пример нетривиальной симметричной подгруппы, в которой существуют несимметричные элементы, т.е. ограничение классической инволюции на эту подгруппу не является ее тождественным отображением.

Перед построением такого примера сформулируем и докажем некоторые свойства симметричных подгрупп.

Лемма 1. *Если H — подгруппа группы $V(KG)$, то H^* также является подгруппой группы $V(KG)$.*

Доказательство. Проверим, будет ли H^* подгруппой. Если $1 \in H$, то $1 \in H^*$, так как $\varphi(1)$. Далее, если $a^*, b^* \in H^*$, то $a^*b^* \in H^*$, так как $a^*b^* = \varphi(ba)$, а $ba \in H$. Наконец, если элемент $a^* \in H^*$, то тогда $(a^*)^{-1} = (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in H^*$, и лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть H' и H — подгруппы $V(KG)$, причем H — симметричная подгруппа. Тогда если H' и H сопряжены с помощью элемента $g \in V(KG)$, такого, что $(g^*)^{-1} = (g^{-1})^*$, то H'^* также сопряжена с H с помощью элемента $(g^*)^{-1}$.*

Доказательство. Пусть существует такой элемент $g \in V(KG)$, что $H' = g^{-1}Hg$, где $H = H^*$. Тогда $H'^* = \{(g^{-1}hg)^*\} = \{g^*h(g^{-1})^*\} = g^*H(g^{-1})^*$. Если $(g^*)^{-1} = (g^{-1})^*$ (в частности, это так для $g \in G$), то $H'^* = H^{(g^{-1})^*}$, и лемма доказана. Заметим, что H' уже не обязательно является симметричной, а также что $H'^* = (H^{g^{-1}})^*$.

Лемма 3. *Пусть H_1 и H_2 — симметричные подгруппы. Тогда H_1H_2 также является симметричной подгруппой.*

Доказательство. Пусть H_1 и H_2 — симметричные подгруппы и элемент $h = a_1b_1a_2b_2 \cdots a_kb_k$, где $a_i \in H_1, b_i \in H_2$, принадлежит H_1H_2. Тогда $h^* = u_kv_k \cdots u_2v_2 \times u_1v_1$, где $u_i = b_i^*, v_i = a_i^*$, также принадлежит H_1H_2, так как подгруппы H_1 и H_2 — симметричны. Таким образом, лемма доказана.

2. Исследование гипотезы о порождающих элементах $V(KG)$. Для проверки гипотезы В. Бовди о порождающих элементах нормированной мультипликативной группы был использован пакет LAGUNA [8] для системы компьютерной алгебры GAP [9]. В результате тестирования было обнаружено, что условие (1) не выполняется для группы кватернионов восьмого порядка.

Проверка гипотезы проводилась с помощью программы, разработанной на языке программирования GAP, с применением функций, доступных в пакете LAGUNA.

Алгоритм, использованный для тестирования заданной группы, выглядел следующим образом:

а) получение множества всех элементов заданной группы G;

б) вычисление с помощью пакета LAGUNA нормированной мультипликативной группы $V(KG)$, порожденной элементами групповой алгебры, и изоморфной ей группы W, заданной с помощью порождающих элементов и определяющих соотношений;

в) задание отображения f из группы G в групповую алгебру KG;

г) вычисление множества S симметричных элементов групповой алгебры KG;

д) объединение множества симметричных элементов S и образа $f(G)$;

е) отображение полученного множества в группу W, вычисление ее подгруппы $\langle G, S_*\rangle$ и проверка выполнения условия (1).

3. Вычисление симметричной подгруппы $\langle G, S_*\rangle$. Докажем теперь теоретически, что гипотеза В. Бовди не выполняется для группы кватернионов восьмого порядка. Будем обозначать её в дальнейшем через Q_8. Эта группа задаётся следующим представлением:

$$Q_8 = \langle a,\ b \mid a^4 = b^4 = 1,\ a^2 = b^2,\ b^{-1}ab = a^3\rangle,$$

и состоит из следующих элементов:

$$Q_8 = \{a^ib^j \mid 0 \leq i \leq 4,\ 0 \leq j \leq 2\}.$$

Любой симметричный элемент $x \in S_*$ имеет вид:

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 a^2 + \gamma_x, \tag{2}$$

где
$$\gamma_x = \alpha_2(a + a^3) + \alpha_3(b + a^2b) + \alpha_4(ab + a^3b). \tag{3}$$
При этом, поскольку x обратим и $x \in V(KQ_8)$, то $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$ (т. е. один и только один из коэффициентов α_0, α_1 равен единице). Отсюда можно сделать вывод, что $|S_*| = 16$.

Лемма 4. *Пусть $S_* = \{s \in V(KQ_8) | s^* = s\}$ — множество симметричных обратимых элементов. Тогда $S_* \subset Z(KQ_8)$, где $Z(KQ_8)$ — центр групповой алгебры KQ_8.*

Доказательство. Группа Q_8 разбивается на классы сопряжённых элементов следующим образом:
$$Q_8 = \{1\} \cup \{a^2\} \cup \{a, a^3\} \cup \{b, a^2b\} \cup \{ab, a^3\}.$$
Так как для любого класса сопряжённых элементов сумма его элементов принадлежит центру групповой алгебры [10], то требуемое непосредственно следует из (2) и (3).

Лемма 5. *Множество S_* является подгруппой нормированной мультипликативной группы $V(KQ_8)$.*

Доказательство. В работе [2] доказано, что множество симметричных элементов образует подгруппу тогда и только тогда, когда все они коммутируют между собой. Тогда требуемое следует из леммы 4.

Из леммы 5 также следует, что S_* является нетривиальной симметричной подгруппой группы $V(KQ_8)$. Однако, не все ее элементы симметричны, а нас еще интересует случай, когда в симметричной подгруппе есть несимметричные элементы.

Лемма 6. *Для произвольного $x \in S_*$ имеет место равенство $x^2 = 1$.*

Доказательство. Воспользовавшись формулой (2), получим:
$$x^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1 a^4 + \gamma_x^2 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 1,$$
так как характеристика поля K равна двум, элементы 1, a^4, γ_x лежат в центре $Z(KQ_8)$, и $\gamma_x^2 = 0$.

Эти леммы позволили доказать следующую теорему, теоретически обосновывающую найденный контрпример.

Теорема 1. *Пусть Q_8 — группа кватернионов восьмого порядка, $V(KQ_8)$ — нормированная мультипликативная группа и множество $S_* = \{x \in V(KQ_8) \mid x^* = x\}$ — множество симметричных элементов. Тогда*
$$|H| = |\langle Q_8, S_* \rangle| = 64.$$

Доказательство. Так как $S_* \subset Z(KQ_8)$, то любой элемент из H представим в виде $x = gs$, где $g \in Q_8$, $s \in S_*$. При этом $Q_8 \bigcap S_* = \{1, a^2\}$ и совпадает с $Z(Q_8)$. Таким образом, $\langle Q_8, S_* \rangle$ является центральным произведением групп Q_8 и S_*. Отсюда следует, что $|H| = \frac{|S_*|\cdot|Q_8|}{|Z(Q_8)|} = \frac{16\cdot 8}{2} = 64$, и теорема доказана.

Таким образом, мы доказали, что порядок подгруппы, порождённой самой группой Q_8 и множеством симметричных элементов S_*, равен 64, и не совпадает с порядком нормированной мультипликативной группы $V(KQ_8)$, который равен 128. Следовательно, $H \neq V(KQ_8)$, и группа кватернионов восьмого порядка дает контрпример к гипотезе В. Бовди. Кроме того, $H = \langle Q_8, S_* \rangle$ является нетривиальной симметричной подгруппой группы $V(KQ_8)$, содержащей как симметричные, так и несимметричные элементы.

1. *Bovdi, A.A., Kurdics J.* Lie properties of the group algebra and the nilpotency class of the group of units // Journal of Algebra. – 1999. – **212**. – P. 28–64.
2. *Bovdi V., Kovacs L.G., Sehgal S.K.* Symmetric units in modular group algebras // Communications in Algebra. – 1996. – **24**, (3). – P. 803–808.
3. *Bovdi V.* On symmetric units in group algebras // Communications in Algebra. – 2001. – **29**, (12). – P. 5411–5422.
4. *Bovdi V., Dokuchaev M.* Group algebras whose involutory units commute // Algebra Colloquim. – 2002. – **9**, (1). – P. 49–64.
5. *Bovdi V., Rozgonyi T.* On the unitary subgroup of modular group algebras // Acta Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. – 1992. – 13/D. – P. 13–17.
6. *Sehgal S.K.* Symmetric elements and identities in group algebras. Algebra. Some recent advances. Edited by I.B.S. Passi. – Trends in Mathematics. – Basel: Birkhauser Verlag, 1999. – P. 207–213.
7. *Bovdi A.A.* The group of units of a group algebra of characteristic p // Publ. Math. Debrecen. – 1998. – **52**, (1-2). – P. 193–244.
8. *Bovdi V., Konovalov A., Schneider C. and Rossmanith R.* LAGUNA — Lie AlGebras and UNits of group Algebras, Version 3.2.1; 2003, (`http://ukrgap.exponenta.ru/laguna.htm`).
9. *The GAP Group.* GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.3; 2002, (`http://www.gap-system.org`).
10. *Бовди А.А.* Групповые кольца. – К.: УМК ВО, 1988. – 156 с.

Получено 12.08.2004