УДК 519.7

О. І. Кузка (Ужгородский нац. ун-т)

ВИКОНАННЯ РОБІТ БЕЗ ПЕРЕРИВАНЬ В СИСТЕМІ ІДЕНТИЧНИХ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРИЛАДІВ

The article deals with the problem of fiting the set of N requirements into the system consisting of identical parallel devices at $d = 0$ time moment. Each requirement is attended to during $t_i \leq D_i$ time units by any device and without any interruption.

Розглядається задача побудови допустимого розкладу виконання множини N робіт в системі ідентичних паралельних приладів. Кожна робота $i \in N$ повинна бути без переривань виконана протягом t_i одиниць часу деяким приладом в інтервалі часу $(0,\ D_i]$.

В задачах теорії розкладів важливе місце посідає проблема перевірки існування допустимих розкладів та їх побудови. Часто по складності це задача того ж порядку, що і задача оптимізації розкладів [1]. В даній роботі розглядається задача планування виконання робіт в одно стадійній системі ідентичних приладів. Вважається, що відома тривалість виконання кожної роботи, всі роботи надходять в систему одночасно, але кожна робота має власний директивний термін, до якого її виконання повинно бути завершене. Виконання кожної роботи повністю може бути здійснено будь яким виконавцем (приладом). При цьому в будь-який момент часу кожен прилад може виконувати не більше однієї роботи і кожна робота може виконуватись не більше ніж одним приладом (аналогічні задачі розглядались в [2–5]). Якщо при виконанні робіт допускаються переривання, то побудова допустимого розкладу може бути здійснена за допомогою алгоритму пакування (див. [1]). Вказаний алгоритм дозволяє отримати розклад, в якому не більше ніж $n - 2$ переривання (тут n — кількість робіт). При цьому хоч кожна робота й переривається не більше одного разу, її завершення проходить на іншому приладі. Задача значно ускладнюється, якщо переривання при виконанні робіт не допускаються.

1. Постановка задачі. В систему з M ідентичних паралельних приладів в момент часу $d = 0$ надходить множина $N = \{1,\ 2, ...,\ n\}$ робіт. Необхідно побудувати допустимий розклад, в якому кожна робота $i \in N$ повинна виконатись в інтервалі часу $(0,\ D_i]$ деяким приладом без переривань на протязі $t_i > 0$ одиниць часу.

Можна вважати, що

$$t_i \leq D_i,\ i \in N,$$

так як в іншому випадку, очевидно, допустимого розкладу не існує. Також природно припустити

$$M \leq n,$$

інакше кожній роботі $i \in N$ можна виділити окремий прилад, який виконає її в інтервалі часу $(0,\ t_i]$, тобто допустимий розклад будується тривіально.

Для зручності будемо вважати, що роботи пронумеровані по неспаданню директивних строків $D_i,\ i \in N$, при чому, якщо для двох різних робіт $i < j$ $(i,\ j \in N)$, директивні строки співпадають $D_i = D_j$, то $t_i \geq t_j$. Розглянемо впорядковану по зростанню множину $Q = \{\ q_l \mid l = 1,\ 2, \ldots,\ k\}$ всіх різних значень директивних строків $D_i,\ i \in N$ (тут k — кількість різних значень $D_i,\ i \in N$), та розіб'ємо всі роботи на k підмножин $N_1,\ N_2, \ldots,\ N_k$,

$$N_l = \{i \in N\ |D_i = q_l\},\ l = 1,\ 2, \ldots,\ k.$$

Таким чином

$$D_1 \le D_2 \le \ldots \le D_n; \tag{1}$$

$$D_1 = q_1 < q_2 < \ldots < q_k = D_n;$$

$$t_i \ge t_j, \quad \text{при } \ i < j, \ \ i, j \in N_l, \ \ l = 1, \ 2, \ldots, \ k.$$

2. Умова існування розкладу для одного приладу. Звичайно для визначення розкладу виконання робіт необхідно для кожної роботи вказати прилади, що обслуговують роботу та строки виконання роботи. В нашому випадку переривання в процесі виконання робіт не допускаються, тому в обслуговуванні кожної роботи приймає участь тільки один прилад, а це означає, що після розподілу робіт по приладах можна будувати M окремих розкладів для кожного з них незалежно один від одного. Тому розглянемо умови існування допустимого розкладу виконання деякої множини робіт $G \subseteq N$ одним приладом. Нехай $P = (p_1, \ p_2, \ldots, \ p_g)$ — перестановка, утворена із номерів робіт множини G розташованих в порядку їх зростання.

Означення 1 ([2]). *Активним розкладом називається розклад, в якому роботи виконуються без невиправданих простоїв приладів.*

Зауваження 1. *Перерва в роботі приладу виправдана, якщо вона обумовлена неготовністю наступної роботи до виконання (із-за обмеження на строки, порядок виконання робіт, тощо). Для задачі, що розглядається, активними будуть такі розклади, в яких прискорення виконання жодної роботи не можливе без зміни порядку виконання робіт або їх розподілу по приладах.*

Означення 2 ([1, 2]). *Перестановочним називається активний розклад $S(X)$, який однозначно визначається перестановкою $X = (x_1, \ x_2, \ldots, \ x_g)$, що вказує порядок виконання робіт (g — кількість робіт, які виконуються приладом, а $x_i \in G$, $i = 1, \ 2, \ \ldots, \ g$ — їх номери).*

Теорема 1. *Допустимий розклад виконання робіт множини G існує тоді і тільки тоді, коли допустимим є перестановочний розклад $S(P)$.*

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що з допустимості довільного розкладу S випливає допустимість $S(P)$. Дійсно. Нехай S — деякий допустимий розклад. Всі роботи множини G готові до виконання в будь-який момент часу (починаючи з моменту $d = 0$). Це означає, що якщо в ньому мають місце простої приладу до завершення виконання всіх робіт, то вони можуть бути ліквідовані шляхом "активізації"[4] розкладу. При цьому розклад залишиться допустимим, так як терміни виконання кожної роботи $i \in G$ не вийдуть за межі відповідного проміжку часу $(0, \ D_i]$. Роботи виконуються без переривань, тому буде отримано деякий перестановочний розклад $S(X)$, де перестановка X визначає порядок виконання робіт в цьому розкладі. Якщо $X \ne P$, то існує i таке, що $x_i > x_{i+1}$. Розклад $S(X)$ — допустимий, тому з (1) отримаємо, що момент r завершення виконання роботи x_{i+1} задовольняє нерівності

$$r \le D_{x_{i+1}} \le D_{x_i}. \tag{2}$$

Змінимо послідовність виконання робіт x_i і x_{i+1}. Строки виконання роботи x_{i+1} прискоряться, тому залишаться допустимі. Виконання роботи x_i буде завершено в момент r і тому, враховуючи (2), теж буде допустимим. Таким чином за скінчене число попарних обмінів послідовність виконання робіт X, можна перетворити на P.

[4]прискорення термінів виконання робіт без зміни порядку їх виконання

При цьому розклад $S(X)$, після кожного перетворення залишатиметься допустимим, отже і розклад $S(P)$ буде допустимим. Теорема доведена.

З теореми 1 випливає, що для визначення розкладу виконання робіт достатньо для кожної роботи вказати прилад, який буде її обслуговувати. Щоб визначити терміни виконання робіт необхідно для кожного приладу впорядкувати номери робіт, які призначені на цей прилад та побудувати відповідний перестановочний розклад. При цьому виконання першої в списку роботи починається в момент часу 0 і виконується протягом визначеного для неї часу, а кожна наступна робота починає виконуватись одразу після завершення попередньої. Тобто, якщо деякий прилад виконує роботи множини G і $P = (p_1, p_2, \ldots, p_g)$ — перестановка, що визначає порядок їх виконання, то робота $p_i \in G$ буде виконуватись в інтервалі

$$\left(\sum_{j<i} t_{p_j}; \sum_{j<i} t_{p_j} + t_{p_i} \right].$$

3. Загальна схема побудови допустимого розкладу. При виконанні робіт в системі M приладів розклад S визначається сукупністю розкладів $S(P_j)$, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ M\}$ для кожного з приладів, тобто

$$S = \{S(P_1),\ S(P_2), \ldots,\ S(P_M)\}, \tag{3}$$

де $S(P_j)$ — розклад виконання робіт приладом $j \in \{1,\ 2, \ldots,\ M\}$, а P_j — перестановка впорядкованих по зростанню номерів робіт $i \in N$, які виконуються даним приладом. Поставимо у відповідність кожному натуральному числу $g \leq n$ і розкладу S_g виконання робіт множини $G = \{1,\ 2, \ldots,\ g\}$ вектор $X(S_g) = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_g)$ розмірності g з натуральними компонентами $x_i \in \{1,\ 2, \ldots,\ M\}$, $i \in G$, що визначають номер приладу, на який призначено для виконання роботу i. Так як розклад S_g включає (при $g < n$) не всі роботи, то, не зважаючи на дотримання обмежень на строки виконання цих робіт, розклад не буде допустимим, і, так як для робіт з номерами $i > g$ строки виконання і прилад не визначені, то вектору $X(S_g)$ відповідає деяка множина розкладів з фіксованим "початком".

Означення 3. *Множину розкладів, в яких призначення для робіт підмножини* G *співпадають і визначаються вектором* $X(S_g)$ *називатимемо частковим розкладом, або* $X(S_g)$*-розкладом.*

Означення 4. $X(S_g)$*-розклад називатимемо допустимим, якщо розклад* S_g *допустимий по строкам виконання робіт множини* $\{1,\ 2, \ldots,\ g\}$.

Якщо $g = n$, то $X(S_n)$-розклад містить єдиний розклад $S_n = \{S(P_1), S(P_2),\ \ldots,\ S(P_M)\}$, де P_j — перестановка впорядкованих по зростанню номерів робіт $i \in G = N$, для яких $x_i = j$, $j \in \{1, 2, \ldots,\ M\}$.

Означення 5. *Повним розкладом називатимемо* $X(S_n)$*-розклад.*

Узагальнимо поняття X-розкладу на випадок, коли при виконанні робіт допускаються переривання.

Означення 6. $\overline{X}(S_g)$*-розкладом називатимемо множину розкладів, в яких виконання робіт* $1,\ 2,\ \ldots,\ g$ *співпадає з їх виконанням у відповідному* $X(S_g)$*-розкладі, а при виконанні інших робіт* $(g+1,\ g+2,\ \ldots,\ n)$ *допускаються переривання.*

Означення 7. *Перспективним X-розкладом називатимемо такий X-розклад, що відповідний йому $\overline{X}$-розклад є не порожньою множиною.*

Оскільки розглядається система ідентичних паралельних приладів і, згідно з умовою задачі, кожна робота може виконуватися будь-яким з приладів протягом проміжку часу фіксованої довжини t_i, $i \in N$ з інтервалу часу $(0, D_i]$, який не залежать від номера приладу, то розклади виконання робіт (3), а також X-розклади визначаються з точністю до нумерації приладів. Тому не порушуючи загальності міркувань можна вважати допустимими повні чи часткові розклади S_g, а також відповідні їм X-розклади, для яких мають місце наступні умови:

а) на кожному приладі роботи виконуються в порядку зростання їх номерів без простоїв приладу при завершенні однієї роботи та переході до виконання наступної (тобто розглядаються активні перестановочні розклади (3));

б) номери робіт, що виконуються першими на кожному приладі не менші ніж номери відповідних приладів і утворюють зростаючу послідовність (при цьому не зайняті прилади мають максимальні номери). Тобто для всіх $P_j = (p_{j1}, p_{j2}, \ldots, p_{jn_j})$, $j \in \{1, 2, \ldots, M-1\}$ виконуються нерівності

$$j \le p_{j1} < p_{j+1\;1}, \quad \text{якщо} \quad n_{j+1} > 0, \tag{4}$$

тут n_j — кількість робіт, що виконуються приладом j.

в) робота з номером 1 виконується приладом з номером 1 і для будь якого X-розкладу $x_1 = 1$.

Таким чином, задача побудови розкладу зводиться до задачі розподілу робіт по приладах, який задовольняє умові б) (4), а розклад (3) виконання робіт будується однозначно для кожного приладу згідно а).

Для побудови допустимого розкладу пропонується конструктивний алгоритм, який є модифікацією методу гілок і меж [6]. Вершинам дерева варіантів ставляться у відповідність деякі X-розклади (кореневі дерева відповідає (1)-розклад). Для розгалуження вершини вибираються в порядку лексикографічного зростання відповідних їм X-розкладів, а саме розгалуження вершин здійснюється шляхом збільшення розмірності відповідного X-розкладу (включенням в розклад чергової роботи). Так при розгалудженні вершини, якій відповідає X_g-розклад утворюються нові вершини, яким відповідають X_g^j-розклади, де $X_g^j = (X_g, j)$, а $j = 1, 2, \ldots\ M$ і визначається з умови допустимості X_g^j-розкладу та з врахуванням умови (4).

Для скорочення перебору вершин дерева варіантів кожна вершина перевіряється на перспективність і до розгляду беруться тільки перспективні вершини. Способи такої перевірки наводяться нижче.

4. Оцінка перспективності вершин дерева варіантів. Як уже відмічалось, побудова допустимого розкладу здійснюється шляхом включення в побудований раніше X-розклад наступної роботи. При цьому множина допустимих розкладів звужується. В загальному випадку робота може бути призначена на будь який з m приладів. Різним призначенням для нової роботи відповідають різні вершини дерева варіантів. Де які з них можуть виявитися порожніми. Перевірка цього факту — задача аналогічна початковій, тому для її спрощення знімемо заборону на переривання при виконані робіт, що не ввійшли в X-розклад, тобто перевірятимемо чи буде даний X-розклад перспективним. Очевидно не порожня множина може відповідати тільки перспективному X-розкладу.

4.1. Побудова початкового допустимого $\overline{X}_g$-розкладу. Розглянемо деякий X_g-розклад ($g < n$). Нехай строки виконання перших g робіт допустимі і вектор

$\tau = (\tau_1,\ \tau_2,\ \dots,\ \tau_M)$ вказує моменти завершення роботи відповідних приладів при їх виконанні. Добудувати заданий X_g-розклад до деякого допустимого $\overline{X}_g$-розкладу можна застосувавши алгоритм пакування [1], але використовувати такий розклад в алгоритмі гілок і меж (див. розділ 3) для оцінки перспективності X_g-розкладу не зручно так як при включенні в X_g-розклад нової роботи (виконанні розгалуження в дереві варіантів) для кожного новоутвореного X_{g+1}-розкладу необхідно будувати відповідний $\overline{X}_{g+1}$-розклад. При цьому використати, побудований раніше $\overline{X}_g$-розклад не можливо.

Пропонується побудову допустимого $\overline{X}_g$-розкладу виконувати починаючи з планування виконання робіт множини N_k на проміжку $(q_{k-1}, q_k]$. Потім на проміжку $(q_{k-2}, q_{k-1}]$ планується виконання робіт множини N_{k-1} та тих робіт множини N_k, виконання яких сплановане не повністю. Процес продовжується до тих пір поки розклад буде побудовано повністю, або не буде встановлено, що допустимого розкладу не існує. Така схема дозволяє при включенні в X_g-розклад нової роботи змінювати відповідний $\overline{X}_g$-розклад тільки на тому проміжку часу $[q_{L-1}, q_L]$ для якого виконується умова

$$g \in N_L. \tag{5}$$

4.2. Алгоритм побудови допустимого $\overline{X}_g$-розкладу.
Початковий етап:

1. Визначимо L із умови (5).

2. Покладемо $l = k$ та $G = \varnothing$.

3. Позначимо час, необхідний для завершення виконання роботи i через $\widetilde{t}_i$ (з початку $\widetilde{t}_i = t_i,\ i = g+1,\ g+2, \dots,\ n$).

Основний етап. Побудова розкладу виконання робіт на проміжку $\lambda = (q_{l-1}, q_l],\quad (l = k, k-1, \dots, L)$:

1. Включимо до множини G роботи підмножини N_l, номери яких більші ніж g. Нехай H — кількість робіт в множині G.

2. Якщо $L < l$, то кожен з приладів може бути використаний для виконання робіт множини G в будь який момент часу з проміжку λ. Визначивши підмножину робіт, що будуть виконуватись, і їх тривалість можна вважати розклад побудованим (він тривіально будується за алгоритмом пакування). Якщо ж $L = l$, то де-які прилади частково можуть бути завантажені виконанням інших робіт $(1, 2, \dots, g)$, тому для побудови допустимого розкладу перейдемо до виконання пункту 8.

3. Розглянемо проміжок часу $\lambda = (q_{l-1},\ q_l]$. Нехай Δ його довжина, тобто $\Delta = q_l - q_{l-1}$. Якщо

$$H \le M, \tag{6}$$

то за кожною роботою множини G можна закріпити окремий прилад, який буде її виконувати. Тому перейдемо до виконання пункту 6.

4. Якщо ж $H > M$, то визначимо максимально можливий об'єм робіт, що можна виконати на розглядуваному проміжку

$$\Theta = \sum_{i=g+1}^{n} \min(\Delta, \widetilde{t}_i).$$

Якщо при цьому

$$\Theta \le M \times \Delta, \tag{7}$$

то також перейдемо до виконання пункту 6.

5. Нехай $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_H)$, — перестановка номерів робіт множини G, для якої

$$\widetilde{t}_i \geq \widetilde{t}_j \quad \text{при} \quad i < j.$$

Визначимо такі θ і найменше ціле δ, що задовільняють умові

$$\theta = (\Theta - \sum_{i=\delta+1}^{H} \widetilde{t}_{\pi_i} - M \times \Delta)/\delta \geq \widetilde{t}_{\pi_{\delta+1}}. \tag{8}$$

(Зауважимо, що при $\delta = H$ (8) вироджується в $\Theta > M \times \Delta$).

6. Якщо має місце хоч одна з умов (6) або (7), то роботи $i \in \{g+1, g+2, \ldots, n\}$, для яких

$$\widetilde{t}_i \leq \Delta \tag{9}$$

можуть бути виконані повністю і такі роботи виключаються з множини G, а для робіт $i \in \{g+1, g+2, \ldots, n\}$, таких що умова (9) не виконується час $\widetilde{t}_i$ необхідно зменшити на Δ, так як вони будуть виконуватись на протязі всього проміжку часу λ, що розглядається. Інакше на даному проміжку слід виконувати тільки роботи $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\delta$ при чому так, щоб для завершення кожної з них залишалось θ одиниць часу. Тобто покладемо

$$\widetilde{t}_i = \theta, \; i = 1, 2, \ldots, \delta.$$

Визначивши підмножину робіт та тривалість їх виконання на проміжку часу λ, строки їх виконання і прилади зайняті їх виконанням можна визначити за алгоритмом пакування [1].

Зауваження 2. *При оцінці перспективності X_g-розкладу будувати допустимий $\overline{X}_g$-розклад не має необхідності, тому достатньо для проміжку λ визначити величини $\widetilde{t}$.*

7. Зменшимо l на 1 і для організації виконання робіт на попередньому проміжку повторимо виконання основного етапу алгоритму з пункту 1.

8. Очевидно допустимий $\overline{X}_g$-розклад буде побудовано, якщо допустимим буде розклад виконання робіт множини G з тривалостями $\widetilde{t}$ в системі приладів на проміжках $[\tau_\alpha, q_L]$, побудований за загальним кроком алгоритму пакування для робіт з зрізними директивними строками [1].**Кінець алгоритму.**

4.3. Модифікація допустимого $\overline{X}_g$-розкладу. При переході від $\overline{X}_g$-розкладу до $\overline{X}_{g+1}$-розкладу, де $X_{g+1} = (X_g, j)$, як уже відмічалось не має необхідності будувати весь розклад з початку, а досить відкоректувати попередній на L-ому етапі, де L визначається з умови $j \in N_L$.

Розглянемо два випадки.

1. Виконується умова (5). В цьому випадку досить виключити $g+1$ з множини G, збільшити τ_j на t_{g+1} та виконати пункт 8 алгоритму (4.2).

2. Умова (5) не виконується. Тоді перш ніж виконувати попередній пункт необхідно відновити вектор $\widetilde{t}$, побудований на $L+1$-ому етапі алгоритму (4.2).

Зауважимо, що у випадку коли при побудові $\overline{X}_g$-розкладу за алгоритмом (4.2) робота j виконується без переривань, то і $\overline{X}_{g+1}$-розклад — допустимий і співпадає з $\overline{X}_g$-розкладом.

1. *Танаев В. С., Гордон В. С., Шафранский Я. М.* Теория расписаний. Одностадийные системы. – М.: Наука, 1984. – 382с.
2. *Танаев В. С., Шкурба В. В.* Введение в теорию расписаний. – М.: Наука, 1975. – 256с.
3. *Панишев А. В., Бурцева Л. П.* Задача минимизации числа параллельных машин при выполнении работ в директивные сроки. – Харьков, 1988. – 9с. – Деп. в УкрНИИНТИ, №390–Ук 88.
4. Cheng T. C. E., Sin C. C. S., *The NP-completeness of the n/m/parallel/Cmax preemptive due-date scheduling problem* // Math. and Comput. Modell., 1990. – 13, №3. – P. 93–94.
5. Leung Joseph Y-T., Young Gibbert H., *Minimizing schedule length subject to minimum flow time* // SIAM J. Comput. – 1989. – **18**, №2. – P. 314–326.
6. *Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю.* Метод ветвей и границ (обзор теории алгоритмов, программ и приложений) // Math. Oper. Rsch. Statist. Ser. Optimization. – 1977. – **8**, №2. – P. 253–280.

Одержано 10.11.2004