УДК 519.624.3

В. В. Маринець (Ужгородський нац. ун-т),
Т. В. Маринець (Лозанна, Швейцарія),
О. Ю. Питьовка (Мукачівський технолог. ін-т)

ДВОСТОРОННІЙ МЕТОД НАБЛИЖЕНОГО ІНТЕГРУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ

The boundary value problem with parameters for quasylinear second order differential equation is invertigated by the two-sided method.

В роботі за допомогою двостороннього методу досліджується крайова задача з параметрами для квазілінійного диференціального рівняння другого порядку.

Дослідженню крайових задач з параметрами присвячено значну кількість наукових робіт (див. бібліографію в [1]). В даній роботі будується та досліджується одна модифікація двостороннього методу наближеного розв'язання двоточкової крайової задачі з параметрами у крайових умовах у випадку квазілінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку, а саме, розглядається задача:
на проміжку $(0,1)$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \equiv f[y(x)], \tag{1}$$

який задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} \alpha_{10}y(0) + \lambda\alpha_{11}y'(0) + \beta_{10}y(1) + \beta_{11}y'(1) = d_1, \\ \alpha_{20}y(0) + \alpha_{21}y'(0) + \beta_{20}y(1) + \beta_{21}y'(1) = d_2\lambda, \end{aligned} \tag{2}$$

а також умову

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = y_0. \tag{3}$$

В умовах (2), (3) α_{ij}, β_{ij}, $i = 1, 2$; $j = 0, 1$; d_1, d_2, α_1, α_2, y_0 — задані сталі, $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ — шуканий параметр.

Розв'язком крайової задачі (1)–(3) є пара $(\lambda, y(x))$, де

$$y(x) \in \overline{C}^2(0,1) = C^2(0,1) \cap C'[0,1]$$

— розв'язок рівняння (1), який разом з λ задовольняє умовам (2), (3).

Надалі будемо вважати, що права частина рівняння (1) $f : \overline{D} \to R$ задовольняє наступним умовам:

1) для всіх $(x, y, y') \in \overline{D}$ функція $f[y(x)] \in C(\overline{D})$;

2) в області $\overline{D}$ $f[y(x)]$ можна подати у вигляді $f[y(x)] \equiv f(x, y, y'; y, y') \equiv f[y^+(x); y^-(x)]$ таким чином, що для довільних пар функцій $(z_0(x), v_0(x))$, $(z_1(x), v_1(x))$ з простору $\overline{C}^2(0,1)$, які належать області визначення $\overline{D}_1$ функції $f[y^+(x); y^-(x)]$ і при $x \in [0,1]$ задовольняють нерівності $z_0^{(k)}(x) \le z_1^{(k)}(x)$, $v_0^{(k)}(x) \ge v_1^{(k)}(x)$, $k = 0, 1$, виконується умова

$$f[z_1(x); v_1(x)] - f[z_0(x); v_0(x)] \ge 0; \tag{4}$$

3) функція $f[y^+(x); y^-(x)]$ в $\overline{D}_1$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто

$$|f[z_1(x); v_1(x)] - f[z_0(x); v_0(x)]| \le \frac{1}{4} L\left(|z_1(x) - z_0(x)| + |z_1'(x) - z_0'(x)| + \right.$$

$$\left. + |v_1(x) - v_0(x)| + |v_1'(x) - v_0'(x)|\right),$$

де L — стала Ліпшіца.

Простір функцій $f[y(x)]$, які задовольняють останнім трьом умовам позначимо через $C_1(\overline{D})$.

Легко показати, що крайову задачу (1), (2) можна подати у еквівалентній інтегральній формі

$$y(x) = \omega(x, \lambda) + \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f[y(\xi)] d\xi, \tag{5}$$

де

$$\omega(x, \lambda) = \frac{1}{\Delta}\left\{\left[(\alpha_{20} + \beta_{20})d_1 - (\alpha_{10} + \beta_{10})d_2\lambda\right] x + (\lambda\alpha_{11} + \beta_{10} + \beta_{11})d_2\lambda - \right.$$

$$\left. -(\alpha_{21} + \beta_{20} + \beta_{21})d_1\right\},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} + \beta_{10} + \beta_{11} & \alpha_{10} + \beta_{10} \\ \alpha_{21} + \beta_{20} + \beta_{21} & \alpha_{20} + \beta_{20} \end{vmatrix} \ne 0,$$

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} g_1(x, \xi, \lambda), & \xi \in [0, x), \\ g_2(x, \xi, \lambda), & \xi \in [x, 1], \end{cases}$$

а

$$\begin{gathered} g_1(x, \xi, \lambda) = \left\{\left[(\alpha_{20}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{20})\xi + (\lambda\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{21}\beta_{10})\right](x - 1) + \right. \\ \left. +(\lambda\alpha_{11}\alpha_{20} - \alpha_{21}\alpha_{10})(x - \xi) - (\beta_{11}\alpha_{20} - \beta_{21}\alpha_{10})\xi + \alpha_{21}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{21}\lambda\right\} \tfrac{1}{\Delta}, \\ g_2(x, \xi, \lambda) = \left\{\left[(\alpha_{10}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{10})x + (\alpha_{21}\beta_{10} - \lambda\alpha_{11}\beta_{20})\right](1 - \xi) + \right. \\ \left. +(\beta_{10}\beta_{21} - \beta_{11}\beta_{20})(x - \xi) + (\beta_{21}\alpha_{10} - \beta_{11}\alpha_{20})x + \alpha_{21}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{21}\lambda\right\} \tfrac{1}{\Delta}. \end{gathered} \tag{6}$$

I. Розглянемо спочатку розділені крайові умови, тобто будемо вважати, що

$$\beta_{10} = \beta_{11} = 0, \quad \alpha_{20} = \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{10}^2 + \alpha_{11}^2 \ne 0, \quad \beta_{20}^2 + \beta_{21}^2 \ne 0. \tag{7}$$

Тоді

$$\omega(x, \lambda) = \frac{1}{\Delta}\left[(\beta_{20}d_1 - \alpha_{10}d_2\lambda)x + \lambda^2\alpha_{11}d_2 - (\beta_{20} + \beta_{21})d_1\right],$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \alpha_{10} \\ \beta_{20} + \beta_{21} & \beta_{20} \end{vmatrix} = \lambda\alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{10}(\beta_{20} + \beta_{21}) \ne 0,$$

$$g_1(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\Delta}\left[\beta_{20}(\lambda\alpha_{11} - \alpha_{10}\xi)(x - 1) + \beta_{21}\alpha_{10}\xi - \alpha_{11}\beta_{21}\lambda\right],$$

$$g_2(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\Delta}\left[\beta_{20}(\alpha_{10}x - \lambda\alpha_{11})(1 - \xi) + \beta_{21}\alpha_{10}x - \alpha_{11}\beta_{21}\lambda\right].$$

а) Нехай $\alpha_{11} = \frac{1}{\lambda}\overline{\alpha}_{11} \ne 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $d_2 \ne 0$. Тоді згідно умови (3) маємо

$$y_0\left(\overline{\alpha}_{11}\beta_{20} - \alpha_{10}(\beta_{20} + \beta_{21})\right) = \lambda\overline{\alpha}_{11}d_2 - (\beta_{20} + \beta_{21})d_1 +$$

$$+ \int_0^1 \left[\beta_{20}\overline{\alpha}_{11}(\xi - 1) - x\overline{\alpha}_{11}\beta_{21}\right] f[y(\xi)] d\xi,$$

звідки

$$\lambda = \frac{1}{\overline{\alpha}_{11} d_2} \left[y_0(\overline{\alpha}_{11}\beta_{20} - \alpha_{10}(\beta_{20}+\beta_{21})) + (\beta_{20}+\beta_{21})d_1 \right] + \\ + \int_0^1 \frac{1}{\overline{\alpha}_{11} d_2} \left[\overline{\alpha}_{11}\beta_{21} + \beta_{20}\overline{\alpha}_{11}(1-\xi) \right] f[y(\xi)] d\xi.$$

Не зменшуючи загальності міркувань можна вважати, що $\overline{\alpha}_{11} = 1$. Тоді

$$\lambda = \frac{1}{d_2}[y_0\beta_{20} + (d_1 - y_0\alpha_{10})(\beta_{20}+\beta_{21})] + \frac{1}{d_2}\int_0^1 [\beta_{21} + \beta_{20}(1-\xi)] f[y(\xi)] d\xi. \tag{8}$$

Підставивши (8) у (5), одержимо

$$y(x) = d_1 x + y_0(1 - \alpha_{10}x) + \int_0^x (x-\xi) f[y(\xi)] d\xi. \tag{9}$$

Позначимо

$$\rho(x) = d_1 x + y_0(1 - \alpha_{10}x),$$
$$f^n(\xi) = f[z_n(x); v_n(x)], \quad f_n(\xi) = f[v_n(x); z_n(x)].$$

Побудуємо послідовності функцій $\{z_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$ за формулами

$$\begin{aligned} z_{n+1}(x) &= \rho(x) + \textstyle\int_0^x (x-\xi) f^n(\xi) d\xi, \\ v_{n+1}(x) &= \rho(x) + \textstyle\int_0^x (x-\xi) f_n(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{10}$$

де за нульове наближення вибираємо функції з простору $\overline{C}^2(0,1)$, які задовольняють умовам

$$\begin{aligned} & z_0(0) = v_0(0) = y_0, \quad z_0'(0) = v_0'(0) = d_1 - \alpha_{10}y_0, \\ & z_0(x) \le v_0(x), \quad z_0'(x) \le v_0'(x), \\ & z_0''(x) - f^0(x) = \alpha_0(x) \ge 0, \quad x \in [0,1], \\ & v_0''(x) - f_0(x) = \beta_0(x) \le 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1 ([2]). *Нехай права частина рівняння* (1) $f[y(x)] \in C_1(\overline{D})$ *і існують функції нульового наближення* $z_0(x)$ *та* $v_0(x)$, *які задовольняють умовам* (11). *Тоді послідовності функцій* $\{z_n(x)\}$ *і* $\{v_n(x)\}$, *побудовані згідно закону* (10), *збігаються абсолютно і рівномірно до единого в просторі* $\overline{C}^2(0,1)$ *розв'язку рівняння* (9) *та при* $x \in [0,1]$ *мають місце нерівності*

$$v_n^{(k)}(x) \le v_{n+1}^{(k)}(x) \le y^{(k)}(x) \le z_{n+1}^{(k)}(x) \le z_n^{(k)}(x), \ k = 0, 1. \tag{12}$$

Припустимо, що $\beta_{20} \ne 0$ і $\beta_{21}\beta_{20} \ge 0$.

Позначимо

$$\lambda_n^+ = d + \frac{\beta_{20}}{d_2}\int_0^1 \left[\frac{\beta_{21}}{\beta_{20}} + 1 - \xi\right] f^n(\xi) d\xi,$$
$$\lambda_n^- = d + \frac{\beta_{20}}{d_2}\int_0^1 \left[\frac{\beta_{21}}{\beta_{20}} + 1 - \xi\right] f_n(\xi) d\xi,$$

де $d = \frac{1}{d_2}\left[y_0\beta_{20} + (d_1 - y_0\alpha_{10})(\beta_{20}+\beta_{21})\right]$.

Тоді із (8), враховуючи (4), (12), маємо

$$\lambda_n^+ - \lambda = \frac{\beta_{20}}{d_2}\int_0^1 \left(1-\xi+\frac{\beta_{21}}{\beta_{20}}\right)\left(f^n(\xi) - f[y(\xi); y(\xi)]\right)d\xi \geq (\leq)\ 0$$

при $\frac{\beta_{20}}{d_2} \geq (\leq)\ 0$, а

$$\lambda_n^- - \lambda \leq (\geq)\ 0 \quad \text{при} \quad \frac{\beta_{20}}{d_2} \geq (\leq)\ 0.$$

Таким чином

$$\lambda_n^-(\geq) \leq \lambda(\geq) \leq \lambda_n^+ \quad \text{при} \quad \frac{\beta_{20}}{d_2} \geq (\leq)\ 0. \tag{13}$$

У випадку, коли $\beta_{21}\beta_{20} \leq 0$

$$\lambda_n^+ = d + \frac{\beta_{20}}{d_2}\int_0^1 \left[(1-\xi)f^n(\xi) + \frac{\beta_{21}}{\beta_{20}}f_n(\xi)\right]d\xi,$$

$$\lambda_n^- = d + \frac{\beta_{20}}{d_2}\int_0^1 \left[(1-\xi)f_n(\xi) + \frac{\beta_{21}}{\beta_{20}}f^n(\xi)\right]d\xi.$$

Якщо ж $\beta_{20} = 0$, то

$$\lambda_n^+ = d + \frac{\beta_{21}}{d_2}\int_0^1 f^n(\xi)d\xi, \qquad \lambda_n^- = d + \frac{\beta_{21}}{d_2}\int_0^1 f_n(\xi)d\xi,$$

а нерівності (13) виконуються при $\frac{\beta_{21}}{d_2} \geq (\leq)\ 0$.

Таким чином, ми побудували двосторонні наближення до розв'язку задачі (1)–(3) у випадку виконання умов (7) і коли $\alpha_2 = 0$.

Зауважимо, що якщо $\alpha_{11} = 0$, то при виконанні умов (7) функція (5) буде розв'язком задачі (1)–(3) для довільних $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$.

б) Нехай $\alpha_{11} = \frac{1}{\lambda}\overline{\alpha}_{11} \neq 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ d_2 \neq 0.$

Тоді

$$\lambda = \frac{1}{\alpha_{10}d_2}\left[\beta_{20}d_1 + y_0\alpha_{10}(\beta_{20}+\beta_{21}) - y_0\overline{\alpha}_{11}\beta_{20}\right] +$$

$$+\frac{1}{d_2}\int_0^1 \left[\beta_{20}(1-\xi)+\beta_{21}\right]f[y(\xi)]d\xi, \qquad \alpha_{10} \neq 0,$$

а

$$y(x) = y_0x - \frac{1}{\alpha_{10}}(\overline{\alpha}_{11}y_0 - d_1) + \int_0^x (x-\xi)f[y(\xi)]d\xi.$$

Отже, і в цьому випадку двосторонні наближення будуємо згідно наведеної в попередньому пункті схеми.

в) Якщо виконуються умови (7) і $d_2 = \frac{1}{\lambda}\overline{d}_2,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 = 0$, то

$$\begin{gathered}\lambda = \tfrac{1}{y_0\alpha_{11}\beta_{20}}\left\{\beta_{20}d_1 - \alpha_{10}\overline{d}_2 + y_0\alpha_{10}(\beta_{20}+\beta_{21}) + \right.\\ \left. + \textstyle\int_0^1 \left[\beta_{20}(1-\xi)+\beta_{21}\right]\alpha_{10}f[y(x)]d\xi\right\},\ y_0\alpha_{11}\beta_{20} \neq 0,\end{gathered} \tag{14}$$

а

$$y(x) = \frac{\overline{d}_2}{\beta_{20}} - y_0\left(1-x+\frac{\beta_{21}}{\beta_{20}}\right) + \int_0^1 G_1(x,\xi)f[y(\xi)]d\xi, \tag{15}$$

$$G_1(x,\xi)=\begin{cases}\left(1-x+\frac{\beta_{21}}{\beta_{20}}\right), & \xi\in[0,x],\\ \left(1-\xi+\frac{\beta_{21}}{\beta_{20}}\right), & \xi\in(x,1].\end{cases}$$

1. Нехай $\frac{\beta_{21}}{\beta_{20}}\geq 0$ і $f[y(x)]\in C_2(\overline{D})$, де $C_2(\overline{D})$ — простір функцій, які задовольняють умовам (1)–(3) визначення простору $C_1(\overline{D})$ лише нерівність (4) виконується для довільних пар функцій $(z_0(x),v_0(x))$, $(z_1(x),v_1(x))$ з простору $\overline{C}^2(0,1)$, що належать області визначення $\overline{D}_1$ функції $f[y^+(x);y^-(x)]$, які задовольняють умовам, $z_0(x)\geq z_1(x)$, $z_0'(x)\leq z_1'(x)$, $v_0(x)\leq v_1(x)$, $v_0'(x)\geq v_1'(x)$.

Побудуємо ітераційний процес згідно формул [3]

$$\begin{gathered}z_{n+1}(x)=\Omega(x)+\int_0^1 G_1(x,\xi)f^n(\xi)d\xi,\\ v_{n+1}(x)=\Omega(x)+\int_0^1 G_1(x,\xi)f_n(\xi)d\xi,\end{gathered}\tag{16}$$

де $\Omega(x)=\frac{\overline{d}_2}{\beta_{20}}-y_0\left(1-x+\frac{\beta_{21}}{\beta_{20}}\right)$, а за нульове наближення $z_0(x)$, $v_0(x)$ вибираємо довільні функції із простору $\overline{C}^2(0,1)$, які задовольняють умови

$$y'(0)=y_0,\ \beta_{20}y(1)+\beta_{21}y'(1)=\overline{d}_2,\tag{17}$$

та нерівності

$$w_0(x)\equiv z_0(x)-v_0(x)\leq 0,\ w_0'(x)\geq 0,\tag{18}$$
$$z_0''(x)-f^0(x)=\alpha_0(x)\geq 0,\ v_0''(x)-f_0(x)=\beta_0(x)\leq 0.$$

Позначивши

$$\alpha_n(x)=z_n''(x)-f^n(x),\ \beta_n(x)=v_n''(x)-f_n(x),\tag{19}$$

і враховуючи (16) маємо

$$\begin{gathered}z_{n+1}(x)-z_n(x)=-\int_0^1 G_1(x,\xi)\alpha_n(\xi)d\xi,\\ v_{n+1}(x)-v_n(x)=-\int_0^1 G_1(x,\xi)\beta_n(\xi)d\xi,\\ (z_{n+1}(x)-z_n(x))'=-\int_0^x \alpha_n(\xi)d\xi,\\ (v_{n+1}(x)-v_n(x))'=-\int_0^x \beta_n(\xi)d\xi,\end{gathered}\tag{20}$$

$$\begin{gathered}w_{n+1}(x)=\int_0^1 G_1(x,\xi)(f^n(\xi)-f_n(\xi))d\xi,\\ w_{n+1}'(x)=\int_0^x(f^n(\xi)-f_n(\xi))d\xi,\end{gathered}\tag{21}$$

$$\alpha_{n+1}(x)=f^n(x)-f^{n+1}(x),\quad \beta_{n+1}(x)=f_n(x)-f_{n+1}(x).\tag{22}$$

Із (20)–(22), враховуючи (4), (18) та той факт, що $G(x,\xi)\leq 0$ коли $x\in[0,1]$, $\xi\in[0,1]$, при $n=0$ одержимо

$$z_1(x)-z_0(x)\geq 0,\ (z_1(x)-z_0(x))'\leq 0,\ v_1(x)-v_0(x)\leq 0,$$
$$(v_1(x)-v_0(x))'\geq 0,\ w_1(x)\leq 0,\ w_1'(x)\geq 0,\ \alpha_1(x)\geq 0,\ \beta_1(x)\leq 0,$$

тобто

$$\begin{gathered}z_0(x)\leq z_1(x)\leq v_1(x)\leq v_0(x),\\ v_0'(x)\leq v_1'(x)\leq z_1'(x)\leq z_0'(x).\end{gathered}\tag{23}$$

Приймаючи функції $z_1(x)$ та $v_1(x)$ за вихідні і повторюючи вище наведені міркування, методом математичної індукції переконуємося в справедливості при $x \in [0,1]$ нерівностей

$$\begin{aligned} &z_n(x) \le z_{n+1}(x) \le v_{n+1}(x) \le v_n(x), \\ &v_n'(x) \le v_{n+1}'(x) \le z_{n+1}'(x) \le z_n'(x). \end{aligned} \tag{24}$$

Доведемо, що побудовані послідовності функцій $\{z_n(x)\}$, $\{v_n(x)\}$ згідно закону (16), (18) збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного розв'язку рівняння (15). В силу нерівностей (24) для цього достатньо показати, що

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x) = \lim_{n\to\infty} w_n^{'}(x) = 0.$$

Позначимо

$$\sup_{[0,1]} \left\{ |w_0(x)|, |w_0^{'}(x)| \right\} = d, \quad \sup \left\{ 1, (0,5 + \frac{\beta_{21}}{\beta_{20}}) \right\} = q.$$

Тоді виходячи із (21) методом математичної індукції легко переконатися в справедливості оцінок

$$\sup_{[0,1]} \left\{ |w_n(x)|, |w_n^{'}(x)| \right\} \leqslant (Lq)^n d.$$

Із останніх оцінок і нерівностей (24) випливає, що якщо $Lq < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) = y(x), \qquad \lim_{n\to\infty} z_n^{'}(x) = \lim_{n\to\infty} v_n^{'}(x) = y^{'}(x),$$

де $y(x)$ — розв'язок рівняння (15).

Таким чином має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $f[y(x)] \in C_2(\overline{D})$ і $Lq < 1$. Якщо існують функції нульового наближення $z_0(x)$ та $v_0(x)$, які задовольняють умови* (18), *то послідовності функцій $\{z_n(x)\}$ і $\{v_n(x)\}$, побудовані згідно закону* (16), *збігаються при $x \in [0,1]$ абсолютно і рівномірно до єдиного в просторі $\overline{C}^2(0,1)$ розв'язку рівняння* (15), *причому мають місце нерівності*

$$\begin{aligned} &z_n(x) \leqslant z_{n+1}(x) \leqslant y(x) \leqslant v_{n+1}(x) \leqslant v_n(x), \\ &v_n^{'}(x) \leqslant v_{n+1}^{'}(x) \leqslant y^{'}(x) \leqslant z_{n+1}^{'}(x) \leqslant z_n^{'}(x), \quad x \in [0,1]. \end{aligned} \tag{25}$$

Для доведення нерівностей (25) достатньо повторити міркування, наведені в роботі [3]. Позначимо

$$\lambda_n^+ = \frac{1}{y_0\alpha_{11}\beta_{20}} \left\{ \beta_{20}d_1 - \alpha_{10}\overline{d}_2 + y_0\alpha_{10}(\beta_{20}+\beta_{21}) + \int_0^1 [\beta_{20}(1-\xi)+\beta_{21}]\alpha_{10} f^n(\xi) d\xi \right\},$$

$$\lambda_n^- = \frac{1}{y_0\alpha_{11}\beta_{20}} \left\{ \beta_{20}d_1 - \alpha_{10}\overline{d}_2 + y_0\alpha_{10}(\beta_{20}+\beta_{21}) + \int_0^1 [\beta_{20}(1-\xi)+\beta_{21}]\alpha_{10} f_n(\xi) d\xi \right\}.$$

Приймаючи до уваги (25) та (4), легко переконатися у справедливості нерівностей

$$\lambda_n^- \leqslant \lambda \leqslant \lambda_n^+ \quad \text{при} \quad \frac{\alpha_{10}}{y_0\alpha_{11}} \geqslant 0, \qquad \lambda_n^+ \leqslant \lambda \leqslant \lambda_n^- \quad \text{при} \quad \frac{\alpha_{10}}{y_0\alpha_{11}} \leqslant 0. \tag{26}$$

2. У випадку, коли $\frac{\beta_{21}}{\beta_{20}} < 0$ двосторонній ітераційний процес будуємо за формулами [4]:

$$\begin{aligned} z_{n+1}(x) &= \Omega(x) + \int_0^1 G_{1,1}(x,\xi) f^n(\xi) d\xi - \int_0^1 \tfrac{\beta_{21}}{\beta_{20}} f_n(\xi) d\xi, \\ v_{n+1}(x) &= \Omega(x) + \int_0^1 G_{1,1}(x,\xi) f_n(\xi) d\xi - \int_0^1 \tfrac{\beta_{21}}{\beta_{20}} f^n(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{27}$$

$$G_{1,1}(x,\xi) = \begin{cases} x-1, & \xi \in [0,x], \\ \xi - 1, & \xi \in [x,1], \end{cases}$$

де за нульове наближення вибираємо довільні функції $z_0(x), v_0(x)$ із простору $\overline{C}^2(0,1)$, які задовольняють умови:

$$\begin{gathered} w_0(x) \leqslant 0, w_0^{'}(x) \geqslant 0, \\ \left[z_0(x) - \Omega(x) - \int_0^1 G_{1,1}(x,\xi) f^0(\xi) d\xi + \int_0^1 \tfrac{\beta_{21}}{\beta_{20}} f_0(\xi) d\xi\right]^{(k)} \geqslant (\leqslant)\ 0, \\ \left[v_0(x) - \Omega(x) - \int_0^1 G_{1,1}(x,\xi) f_0(\xi) d\xi + \int_0^1 \tfrac{\beta_{21}}{\beta_{20}} f^0(\xi) d\xi\right]^{(k)} \leqslant (\geqslant)\ 0, \\ k = 0 \quad (k = 1). \end{gathered} \tag{28}$$

Із (26) та (28) при $n = 0$ маємо

$$z_0^{(k)}(x) - z_1^{(k)}(x) \geqslant (\leqslant)\ 0, \quad v_0^{(k)}(x) - v_1^{(k)}(x) \leqslant (\geqslant)\ 0, \quad w_1^{(k)}(x) \geqslant (\leqslant)\ 0, \quad k = 1\ (k = 0),$$

тобто і в цьому випадку справедливі нерівності (23). Приймаючи до уваги останні нерівності та справедливість формул

$$w_{n+1}(x) = \int_0^1 \left[G_{1,1}(x,\xi) + \frac{\beta_{21}}{\beta_{20}}\right] (f^n(\xi) - f_n(\xi)) d\xi,$$

$$v_{n+1}(x) - v_n(x) = \int_0^1 \left[f_n(\xi) - f_{n-1}(\xi)\right] G_{1,1}(x,\xi) d\xi - \int_0^1 \frac{\beta_{21}}{\beta_{20}} \left(f^n(\xi) - f^{n-1}(\xi)\right) d\xi,$$

$$z_{n+1}(x) - z_n(x) = \int_0^1 \left[f^n(\xi) - f^{n-1}(\xi)\right] G_{1,1}(x,\xi) d\xi - \int_0^1 \frac{\beta_{21}}{\beta_{20}} \left(f_n(\xi) - f_{n-1}(\xi)\right) d\xi,$$

методом математичної індукції легко переконатися у виконанні нерівностей (24).

Як і в попередньому випадку легко показати, що якщо

$$Lq_1 < 1, \qquad q_1 = \sup\left\{1, \left(0,5 - \frac{\beta_{21}}{\beta_{20}}\right)\right\},$$

то послідовності функцій $\{z_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$, побудовані згідно закону (27), (28), збігаються абсолютно і рівномірно на проміжку $(0,1)$ до єдиного в просторі $\overline{C}^2(0,1)$ розв'язку рівняння (15), причому мають місце нерівності (25). Позначивши

$$\begin{aligned} \lambda_n^+ &= \frac{1}{y_0\alpha_{11}\beta_{20}} \left[\beta_{20} d_1 - \alpha_{10}\overline{d}_2 + y_0\alpha_{10}(\beta_{20} + \beta_{21})\right] + \\ &+ \frac{\alpha_{10}}{y_0\alpha_{11}} \left\{\int_0^1 (1-\xi) f^n(\xi) d\xi + \int_0^1 \frac{\beta_{21}}{\beta_{20}} f_n(\xi) d\xi\right\}, \\ \lambda_n^- &= \frac{1}{y_0\alpha_{11}\beta_{20}} \left[\beta_{20} d_1 - \alpha_{10}\overline{d}_2 + y_0\alpha_{10}(\beta_{20} + \beta_{21})\right] + \\ &+ \frac{\alpha_{10}}{y_0\alpha_{11}} \left\{\int_0^1 (1-\xi) f_n(\xi) d\xi + \int_0^1 \frac{\beta_{21}}{\beta_{20}} f^n(\xi) d\xi\right\}, \end{aligned}$$

легко переконатися, що і в цьому випадку мають місце нерівності (26).

Теорема 3. *Нехай* $f[y(x)] \in C_2(\overline{D})$ *і* $Lq_1 < 1$. *Якщо існують в просторі* $\overline{C}^2(0,1)$ *функції нульового наближення* $z_0(x)$ *та* $v_0(x)$, *які задовольняють умови* (28), *то послідовності функцій* $\{z_n(x)\}$ *і* $\{v_n(x)\}$, *побудовані згідно закону* (27), *збігаються при* $x \in [0,1]$ *рівномірно до єдиного в просторі функцій* $\overline{C}^2(0,1)$ *розв'язку рівняння* (15), *причому мають місце нерівності* (25), (26).

Зауважимо, що функції $z_n(x)$ та $v_n(x)$, визначені згідно формул (27), не задовольняють другу із крайових умов (17), але функція

$$y_n(x) = \frac{1}{2}(z_n(x) + v_n(x))$$

задовольняє обом крайовим умовам (17) і її приймаємо за n-ве наближення до розв'язку рівняння (15), а за n-ве наближення розв'язку крайової задачі (1)–(3) в цьому випадку приймається пара $(\lambda_n, y_n(x))$, $\lambda_n = \frac{1}{2}(\lambda_n^+ + \lambda_n^-)$.

II. Нехай крайові умови (2) не є розділеними, але виконується умова $\lambda_{11} = \beta_{11} = \alpha_{20} = \beta_{20} = 0$, тобто розглядаємо крайові умови:

$$\begin{cases} \alpha_{10}y(0) + \beta_{10}y(1) = d_1, \\ \alpha_{21}y^{'}(0) + \beta_{21}y^{'}(1) = d_2\lambda, \end{cases} \tag{29}$$

$$\beta_{10} \neq 0, \quad d_2 \neq 0, \ (\alpha_{21} + \beta_{21})(\alpha_{10} + \beta_{10}) \neq 0,$$

а) Припустимо, що $\alpha_1 = 1$, а $\alpha_2 = 0$. Тоді із (5), (6), (3) та враховуючи (29) одержимо

$$\lambda = \tfrac{(\alpha_{21}+\beta_{21})(d_1 - y_0(\alpha_{10}+\beta_{10}))}{\beta_{10}d_2} + \tfrac{1}{d_2}\int_0^1 \left[(\beta_{21} + \alpha_{21})\xi - \alpha_{21}\right] f[y(\xi)]d\xi, \tag{30}$$

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{\beta_{10}}[d_1 - y_0(\alpha_{10} + \beta_{10})]x + \int_0^1 G_2(x,\xi) f[y(\xi)]d\xi, \tag{31}$$

де

$$G_2(x,\xi) = \begin{cases} \xi(x-1), \ \xi \in [0,x], \\ x(\xi - 1), \ \xi \in [x,1]. \end{cases}$$

Подамо рівняння (31) у вигляді

$$y(x) = \Omega_1(x) + \int_0^1 (x-1)(\xi-1) f[y(\xi)]d\xi + \int_0^1 G_{2,1}(x,\xi) f[y(\xi)]d\xi, \tag{32}$$

де

$$\Omega_1(x) = y_0 + \frac{1}{\beta_{10}}[d_1 - y_0(\alpha_{10} + \beta_{10})]x,$$

$$G_{2,1}(x,\xi) = \begin{cases} x - 1, \ \xi \in [0,x], \\ \xi - 1, \ \xi \in (x,1]. \end{cases}$$

Відмітимо, що $(x-1)(\xi-1) \geqslant 0$, $G_{2,1}(x,\xi) \leqslant 0$ при $x \in [0,1]$, $\xi \in [0,1]$, а їх похідна першого порядку по x в цій області недодатня (відповідно невід'ємна).

Надалі вважаємо, що $f[y(x)] \in C_2(\overline{D})$ і будуємо ітераційний процес згідно закону:

$$\begin{aligned} z_{n+1}(x) &= \Omega_1(x) + \textstyle\int_0^1 (x-1)(\xi-1) f_n(\xi)d\xi + \int_0^1 G_{2,1}(x,\xi) f^n(\xi)d\xi, \\ v_{n+1}(x) &= \Omega_1(x) + \textstyle\int_0^1 (x-1)(\xi-1) f^n(\xi)d\xi + \int_0^1 G_{2,1}(x,\xi) f_n(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{33}$$

де за нульове наближення вибираємо довільні із простору $\overline{C}^2(0,1)$ функції $z_0(x)$ та $v_0(x)$, які задовольняють умовам

$$\begin{gathered} w_0(x) \leqslant 0, \quad w_0^{'} \geqslant 0, \\ \left[z_0(x) - \Omega_1(x) - \int_0^1 (x-1)(\xi-1) f_0(\xi) d\xi - \int_0^1 G_{2,1}(x,\xi) f^0(\xi) d\xi\right]^{(k)} \leqslant (\geqslant)\ 0, \\ \left[v_0(x) - \Omega_1(x) - \int_0^1 (x-1)(\xi-1) f^0(\xi) d\xi - \int_0^1 G_{2,1}(x,\xi) f_0(\xi) d\xi\right]^{(k)} \geqslant (\leqslant)\ 0, \\ k=0 \quad (k=1). \end{gathered} \tag{34}$$

Як і в попередньому випадку легко переконатися, що побудовані послідовності функцій $\{z_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$ згідно закону (33), (34) при $x \in [0,1]$ задовольняють нерівності (24).

Оскільки із (33) маємо

$$w_{n+1}(x) = \int_0^1 \left[G_{2,1}(x,\xi) - (x-1)(\xi-1)\right] (f^n(\xi) - f_n(\xi)) d\xi,$$

то методом математичної індукції переконуємося в справедливості оцінок

$$\sup_{[0,1]} \left\{ |w_n(x)|, |w_n^{'}(x)| \right\} \leqslant (1,5L)^n d,$$

а отже в силу нерівностей (24), при $1,5L < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x) = y(x),$$

де $y(x)$ єдиний розв'язок рівняння (31) в просторі функцій $\overline{C}^2(0,1)$, причому мають місце нерівності (25).

1. Нехай $\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \leqslant 0$. Позначимо

$$\lambda_n^+ = \frac{(\alpha_{21}+\beta_{21})(d_1 - y_0(\alpha_{10}+\beta_{10}))}{\beta_{10} d_2} + \frac{d_{21}}{d_2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} + 1\right)\xi - 1\right] f^n(\xi) d\xi,$$

$$\lambda_n^- = \frac{(\alpha_{21}+\beta_{21})(d_1 - y_0(\alpha_{10}+\beta_{10}))}{\beta_{10} d_2} + \frac{d_{21}}{d_2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} + 1\right)\xi - 1\right] f_n(\xi) d\xi.$$

Тоді приймаючи до уваги нерівності (25) та (4) маємо

$$\lambda_n^+ \leqslant \lambda \leqslant \lambda_n^- \quad \text{при} \quad \frac{\alpha_{21}}{d_2} \geqslant 0, \qquad \lambda_n^- \leqslant \lambda \leqslant \lambda_n^+ \quad \text{при} \quad \frac{\alpha_{21}}{d_2} \leqslant 0. \tag{35}$$

2. Якщо ж $\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} > 0$, то для виконання умов (35) покладаємо

$$\lambda_n^+ = \frac{(\alpha_{21}+\beta_{21})(d_1 - y_0(\alpha_{10}+\beta_{10}))}{\beta_{10} d_2} + \frac{d_{21}}{d_2} \left\{ \int_0^1 (\xi-1) f^n(\xi) d\xi + \int_0^1 \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \xi f_n(\xi) d\xi \right\},$$

$$\lambda_n^- = \frac{(\alpha_{21}+\beta_{21})(d_1 - y_0(\alpha_{10}+\beta_{10}))}{\beta_{10} d_2} + \frac{d_{21}}{d_2} \left\{ \int_0^1 (\xi-1) f_n(\xi) d\xi + \int_0^1 \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \xi f^n(\xi) d\xi \right\}.$$

Зауважимо, що якщо $\alpha_{21} = 0$, то згідно умов (29) $\beta_{21} \neq 0$, а отже замість відношення $\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}}$ розглядаємо випадки, коли $\beta_{21} \geqslant (<)\ 0$.

Таким чином, нами доведена наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай* $f[y(x)] \in C_2(\overline{D})$ *і* $1,5L < 1$. *Якщо існують в просторі* $\overline{C}^2(0,1)$ *функції нульового наближення* $z_0(x)$, $v_0(x) \in \overline{D}$, *які задовольняють умови* (34), *то послідовності функцій* $\{z_n(x)\}$ *і* $\{v_n(x)\}$, *побудовані згідно закону* (33), *збігаються при* $x \in [0,1]$ *рівномірно до єдиного в просторі функцій* $\overline{C}^2(0,1)$ *розв'язку рівняння* (31), *причому мають місце нерівності* (25), (35).

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
&z_{n+1}(0) - y_0 = y_0 - v_{n+1}(0) = \textstyle\int_0^1 (\xi - 1)\left[f^n(\xi) - f_n(\xi)\right] d\xi,\\
&z_{n+1}(1) = v_{n+1}(1) = \tfrac{1}{\beta_{10}}(d_1 - \alpha_{10} y_0),\\
&z'_{n+1}(0) = \tfrac{1}{\beta_{10}}\left[d_1 - y_0(\alpha_{10} + \beta_{10})\right] + \textstyle\int_0^1 (\xi - 1) f_n(\xi) d\xi,\\
&v'_{n+1}(0) = \tfrac{1}{\beta_{10}}\left[d_1 - y_0(\alpha_{10} + \beta_{10})\right] + \textstyle\int_0^1 (\xi - 1) f^n(\xi) d\xi,\\
&z'_{n+1}(1) = \tfrac{1}{\beta_{10}}\left[d_1 - y_0(\alpha_{10} + \beta_{10})\right] + \textstyle\int_0^1 \left[\xi f_n(\xi) + f^n(\xi) - f_n(\xi)\right] d\xi,\\
&v'_{n+1}(1) = \tfrac{1}{\beta_{10}}\left[d_1 - y_0(\alpha_{10} + \beta_{10})\right] + \textstyle\int_0^1 \left[\xi f^n(\xi) + f_n(\xi) - f^n(\xi)\right] d\xi,
\end{aligned}$$

а отже члени побудованих послідовностей функцій $\{z_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$ згідно закону (33), (34) не задовольняють умови (29) і (3), але пара

$$(\lambda_n, y_n(x)) = \left(\frac{1}{2}(\lambda_n^+ + \lambda_n^-), \frac{1}{2}(z_n(x) + v_n(x))\right)$$

задовольняє всім вказаним умовам і їх приймаємо за n-ве наближення до розв'язку розглядуваної крайової задачі.

б) Розглянемо випадок, коли $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. Тоді

$$\lambda = \frac{\alpha_{21} + \beta_{21}}{d_2} y_0 + \frac{\beta_{21}}{d_2} \int_0^1 f[y(\xi)] d\xi, \tag{36}$$

$$y(x) = \Omega_2(x) + \frac{\beta_{10}}{\alpha_{10} + \beta_{10}} \int_0^1 G_3(x,\xi) f[y(\xi)] d\xi, \tag{37}$$

де

$$\Omega_2(x) = y_0 x + \frac{d_1 - \beta_{10} y_0}{\alpha_{10} + \beta_{10}},$$

$$G_3(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\alpha_{10}}{\beta_{10}}(x - \xi) + x - 1, & \xi \in [0,x],\\ \xi - 1, & \xi \in [x,1]. \end{cases}$$

1. Нехай $-1 < \frac{\alpha_{10}}{\beta_{10}} \leq 0$, а $f[y(x)] \in C_2(\overline{D})$. Будуємо двосторонні наближення до розв'язку рівняння (37) згідно формул

$$\begin{aligned}
z_{n+1}(x) &= \Omega_2(x) + \tfrac{\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}} \textstyle\int_0^1 G_3(x,\xi) f^n(\xi) d\xi,\\
v_{n+1}(x) &= \Omega_2(x) + \tfrac{\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}} \textstyle\int_0^1 G_3(x,\xi) f_n(\xi) d\xi,
\end{aligned} \tag{38}$$

де за нульове наближення вибираємо довільну пару функцій із простору $\overline{C}^2(0,1)$, які задовольняють умовам

$$y'(0) = y_0, \;\; \alpha_{10} y(0) + \beta_{10} y(1) = d_1, \tag{39}$$

та нерівності (18).

Можна показати, що якщо $Lq_1 < 1$, $q_1 = \sup\left\{1, \frac{1}{2}\left|\frac{\alpha_{10}-\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}}\right|\right\}$, то послідовності функцій $\{z_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$, побудовані за законом (38), (18), збігаються абсолютно та рівномірно до єдиного в просторі функцій $\overline{C}^2(0,1)$ розв'язку рівняння (37), причому виконуються нерівності (25).

Позначивши

$$\lambda_n^+ = \frac{\alpha_{21}+\beta_{21}}{d_2}y_0 + \frac{\beta_{21}}{d_2}\int_0^1 f^n(\xi)d\xi, \qquad \lambda_n^- = \frac{\alpha_{21}+\beta_{21}}{d_2}y_0 + \frac{\beta_{21}}{d_2}\int_0^1 f_n(\xi)d\xi, \tag{40}$$

легко переконатися в справедливості і в цьому випадку нерівностей (35) при $\frac{\beta_{21}}{d_2} \geq 0$ та $\frac{\beta_{21}}{d_2} \leq 0$.

2. Якщо ж $\frac{\alpha_{10}}{\beta_{10}} < -1$, то $\frac{\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}}G_3(x,\xi) \geq 0$, а $y'(x) = y_0 + \int_0^x f[y(\xi)]d\xi$.

Припускаючи, що $f[y(x)] \in C_1(\overline{D})$, будуємо двосторонні наближення до розв'язку рівняння (37) згідно формул (38), де за нульове наближення вибираємо довільну пару функцій $z_0(x),\ v_0(x)$ із простору $\overline{C}^2(0,1)$, які задовольняють умови (39) та нерівності (11).

Приймаючи до уваги (4) методом математичної індукції можна показати, що якщо $Lq_1 < 1$, то послідовності функцій $\{z_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$ побудовані згідно закону (38), (11), збігаються рівномірно до єдиного розв'язку рівняння (37) і мають місце нерівності (12).

3. Розглянемо випадок, коли $\frac{\alpha_{10}}{\beta_{10}} \geq 0$, а $f[y(x)] \equiv f(x,y(x)) \in C_1(\overline{D})$. Побудуємо ітераційний процес згідно формул

$$\begin{aligned} z_{n+1}(x) &= \Omega_2(x) + \left\{\int_0^x \frac{\alpha_{10}}{\beta_{10}}(x-\xi)f^n(\xi)d\xi + \int_0^1 G_{3,1}(x,\xi f_n(\xi)d\xi\right\}\frac{\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}},\\ v_{n+1}(x) &= \Omega_2(x) + \left\{\int_0^x \frac{\alpha_{10}}{\beta_{10}}(x-\xi)f_n(\xi)d\xi + \int_0^1 G_{3,1}(x,\xi f^n(\xi)d\xi\right\}\frac{\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}}, \end{aligned} \tag{41}$$

$$G_{3,1}(x,\xi) = \begin{cases} x-1,\ \xi \in [0,x],\\ \xi-1,\ \xi \in (x,1], \end{cases}$$

де за нульове наближення вибираємо функції з простору $\overline{C}^2(0,1)$ таким чином, щоб виконувались умови (39) та нерівності

$$w_0(x) \geq 0,$$

$$\begin{aligned} z_0(x) - \Omega_2(x) - \left\{\int_0^x \frac{\alpha_{10}}{\beta_{10}}(x-\xi)f^0(\xi)d\xi + \int_0^1 G_{3,1}(x,\xi f_0(\xi)d\xi\right\}\frac{\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}} \geq 0,\\ v_0(x) - \Omega_2(x) - \left\{\int_0^x \frac{\alpha_{10}}{\beta_{10}}(x-\xi)f_0(\xi)d\xi + \int_0^1 G_{3,1}(x,\xi f^0(\xi)d\xi\right\}\frac{\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}} \leq 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Із (41), враховуючи (42) та (4), при $n = 0$ маємо

$$z_0(x) - z_1(x) \geq 0,\ v_0(x) - v_1(x) \leq 0,\ w_1(x) \geq 0,$$

тобто

$$v_0(x) \leq v_1(x) \leq z_1(x) \leq z_0(x), \quad x \in [0,1].$$

Методом математичної індукції легко переконатися в справедливості нерівностей

$$v_n(x) \leq v_{n+1}(x) \leq z_{n+1}(x) \leq z_n(x) \tag{43}$$

для будь-якого n і $x \in [0,1]$.

Із (41) маємо

$$w_{n+1} = \tfrac{\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}} \int_0^x \left[\tfrac{\alpha_{10}}{\beta_{10}}(x-\xi)+1-x\right](f^n(\xi)-f_n(\xi))d\xi+ \\ +\tfrac{\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}} \int_x^1 \left[(\xi-1)(f^n(\xi)-f_n(\xi))\right]d\xi, \tag{44}$$

де $\frac{\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}} \le 1$.

Позначимо

$$d_0 = \sup_{[0,1]} w_0(x),\ q_2 = \sup\left\{\frac{1}{2}\frac{\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}},\ \frac{1}{2}\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}}\right\}.$$

Тоді із (44) випливає справедливість оцінки

$$w_{n+1}(x) \le d_0(Lq_2)^{n+1},$$

тобто, враховуючи нерівності (43) одержуємо, що якщо $Lq_2 < 1$, то послідовності функцій $\{z_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$, побудовані згідно закону (41), (42), збігаються рівномірно до єдиного в просторі функцій $\overline{C}^2(0,1)$ розв'язку рівняння (37), причому справедливі нерівності

$$v_n(x) \le v_{n+1}(x) \le y(x) \le z_{n+1}(x) \le v_n(x), \tag{45}$$

для будь-якого n та $x \in [0,1]$.

Використавши позначення (40) та приймаючи до уваги нерівності (4) і(45) легко переконатися у справедливості оцінок

$$\lambda_n^- \le \lambda \le \lambda_n^+ \ \text{ при } \ \frac{\beta_{21}}{d_2} \ge 0, \qquad \lambda_n^+ \le \lambda \le \lambda_n^- \ \text{ при } \ \frac{\beta_{21}}{d_2} < 0.$$

Зауважимо, що для будь-якого n справедливі рівності

$$z'_{n+1}(0) = v'_{n+1} = y_0,$$

$$\alpha_{10}z_{n+1}(0)+\beta_{10}z_{n+1}(1)-d_1 = d_1-\alpha_{10}v_{n+1}(0)-\beta_{10}v_{n+1}(1) = \\ = \frac{\alpha_{10}\beta_{10}}{\alpha_{10}+\beta_{10}}\int_0^1 (1-\xi)(f^n(\xi)-f_n(\xi))d\xi,$$

$$\alpha_{21}z'_{n+1}(0)+\beta_{21}z'_{n+1}(1)-d_2\lambda_n^+ = d_2\lambda_n^- -\alpha_{21}v'_{n+1}(0)-\beta_{21}v'_{n+1}(1) = \\ = -\frac{\beta_{10}\beta_{21}}{\alpha_{10}+\beta_{10}}\int_0^1 (f^n(\xi)-f_n(\xi))d\xi,\ \frac{\beta_{21}}{d_2} \ge 0,$$

$$\alpha_{21}z'_{n+1}(0)+\beta_{21}z'_{n+1}(1)-d_2\lambda_n^- = d_2\lambda_n^+ -\alpha_{21}v'_{n+1}(0)-\beta_{21}v'_{n+1}(1) = \\ = \frac{\alpha_{10}\beta_{21}}{\alpha_{10}+\beta_{10}}\int_0^1 (f^n(\xi)-f_n(\xi))d\xi,\ \frac{\beta_{21}}{d_2} < 0,$$

а отже за $(n+1)$-ше наближення до розв'язку крайової задачі (1), (29), (3) ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$) приймаємо пару $(\lambda_{n+1},\ y_{n+1}(x))$, де

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{2}(\lambda_{n+1}^+ + \lambda_{n+1}^-), \quad y_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(z_{n+1}(x)+v_{n+1}(x)),$$

яка задовольняє всім умовам (29).

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1992. – 280 с.
2. *Маринец В. В.* Об одном методе приблежонного интегрированея начальной задачи для систем нелинейных волновых уравнений // О некоторых приближенных методах интегрирования дифференциальных уравнений. – К., 1985. – С. 13–17 (Препринт АН УССР. Ин-т матем.: №8556).
3. *Маринец В. В.* Об одном подходе построения итерациальных методов приближонного интегрирования краевых задач теории пластин и оболочек // Материалы VIII Всесоюзной конф. “Численные методы решения задач теории упругости и пластичности”. – Новосибирск, 1984. – С. 194–198.
4. *Маринець В. В., Питьовка О. Ю.* Про один підхід дослідження двоточкових крайових задач // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 69–75.

Одержано 9.12.2004