УДК 517.3

В. Я. Рибак (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ОЗНАЧЕННЯ І ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ПОХІДНИХ ТА ІНТЕГРАЛІВ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

The definitions of derivatives and integrals of fractional order are analised and some of their properties and practical methods of use are examined in the paper.

У статті аналізуються означення похідних та інтегралів дробового порядку, розглядаються деякі їх властивості та практичні прийоми користування.

Дробові похідні та інтеграли майже невідомі широкому загалу математиків та інженерів, оскільки не включаються до навчальних програм курсів математичного аналізу не тільки технічних університетів чи інститутів, але й математичних факультетів класичних університетів. Між тим їх роль в узагальненні багатьох математичних понять надзвичайно плідна. До цього варто додати широку універсалізацію операцій. Наприклад, у дробовому аналізі операції диференціювання та інтегрування симетричні відносно знака порядку похідної чи інтеграла і виконуються за одним алгоритмом. Не менш значиме і те, що звичайні (натуральні) інтеграли і похідні виступають частковим випадком дробових аналогів.

Метою даної статті є висвітлення означень і деяких властивостей об'єктів дробового аналізу та популяризація їх можливостей. При написанні статті використані окремі результати [1].

Вважаємо, що операції дробового (або ненатурального) диференціювання та інтегрування задані на скінченниму проміжку $[a, b]$ дійсної змінної ($a \geq 0$).

1. Означення інтегралів та похідних дробового порядку.

Означення 1. *Нехай r — додатне дійсне число. Функція $f(x)$ називається інтегрованою із порядком r, якщо майже для всіх $x \in [a, b]$ існує інтеграл (у розумінні Лебега)*

$$\frac{1}{\Gamma(r)} \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{r-1} dt, \quad x > a,$$

який будемо називати також інтегралом Рімана-Ліувіля дробового порядку r від функції $f(x)$ [1], так що

$$D^{-r} f(x)|_a^x \stackrel{def}{=} \frac{1}{\Gamma(r)} \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{r-1} dt, \quad x > a. \tag{1}$$

Тут $\Gamma(r)$ — гамма-функція (інтеграл Ейлера другого роду) [2].

Зазначимо, що при $r \in \mathbb{N}$ вираз (1) збігається із відомою формулою Коші для n-кратного інтеграла, а саме:

$$\underbrace{\int\limits_a^x dx \int\limits_a^x dx \ldots \int\limits_a^x}_{n} f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{n-1} dt = D^{-n} f(x)|_a^x. \tag{2}$$

Означення 2. *Якщо для функції $f(x)$ існує така функція $g(x)$, що майже всюди на $[a, b]$*

$$D^{-r} g(x)|_a^x = f(x), \tag{3}$$

то функцію $g(x)$ будемо називати похідною порядку $r \geq 0$ від функції $f(x)$ і вживати для неї позначення $D^r f(x)|_a^x = g(x)$.

Структуру дробової похідної $D^r f(x)|_a^x$ розкриває

Теорема 1. *Нехай $f(x)$ має дробову похідну порядку r. Тоді*

$$D^r f(x)|_a^x \stackrel{def}{=} \frac{1}{\Gamma(1 - \{r\})} \left(\frac{d}{dx}\right)^{[r]+1} \int\limits_a^x f(t)(x - t)^{-\{r\}} dt, \tag{4}$$

де $[r]$ і $\{r\}$ — ціла та дробова частини числа r.

Доведення. Для $f(x)$ справедливе співвідношення $D^{-r} g(x)|_a^x = f(x)$, що у розгорнутому стані має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int\limits_a^x g(t)(x - t)^{r-1} dt.$$

Домножуємо обидві частини цієї рівності на $(x - t)^{-\{r\}}$ і проінтегруємо по t в межах від a до x.

$$\int\limits_a^x f(t)(x - t)^{-\{r\}} dt = \frac{1}{\Gamma(r)} \int\limits_a^x (x - t)^{-\{r\}} dt \int\limits_a^t g(\tau)(t - \tau)^{r-1} d\tau.$$

Повторний інтеграл, що стоїть у правій частині, перетворюємо за формулою Діріхле таким чином:

$$\int\limits_a^x f(t)(x - t)^{-\{r\}} dt = \frac{1}{\Gamma(r)} \int\limits_a^x g(\tau) d\tau \int\limits_\tau^x (x - \tau)^{-\{r\}} (t - \tau)^{r-1} dt.$$

Для цього ж інтеграла вводимо нову незалежну змінну $u = (t - \tau)/(x - \tau)$.

$$\int\limits_a^x f(t)(x - t)^{-\{r\}} dt = \frac{1}{\Gamma(r)} \int\limits_a^x g(\tau)(x - \tau)^{r-\{r\}} d\tau \int\limits_0^1 (1 - u)^{-\{r\}} u^{r-1} du.$$

Правий інтеграл дорівнює бета-функції $B(1-\{r\}, r) = \Gamma(1-\{r\})\Gamma(r)/\Gamma(1-\{r\}+r)$[2]. Зважаючи на $r = [r] + \{r\}$, знаходимо

$$\frac{1}{\Gamma(1 - \{r\})} \int\limits_a^x f(t)(x - t)^{-\{r\}} dt = \frac{1}{\Gamma(1 + [r])} \int\limits_a^x g(t)(x - t)^{[r]} dt.$$

На основі (1) і (2) переписуємо попередню рівність.

$$D^{-1+\{r\}} f(x)|_a^x = D^{-1-[r]} g(x)|_a^x.$$

Від правої та лівої частин беремо натуральну похідну порядку $[r]+1$:

$$g(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[r]+1} D^{-1+\{r\}}f(x)|_a^x=\frac{1}{\Gamma(1-\{r\})}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[r]+1}\int\limits_a^x f(t)(x-t)^{-\{r\}}dt=D^r f(x)|_a^x.$$

Теорема доведена.

Для спрощення записів застосуємо позначення:

$$m=[r]+1; \quad \rho=1-\{r\}; \quad r=m-\rho; \quad 0<\rho\le 1. \tag{5}$$

Тоді похідна $D^r f(x)|_a^x$ буде виглядати так[5]:

$$D^r f(x)|_a^x \stackrel{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\rho)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{\rho-1}dt. \tag{4a}$$

Очевидно, що для оператора нульового порядку повинно бути

$$D^0 f(x)|_a^x \stackrel{def}{=} f(x). \tag{6}$$

Зауваження до означень 1 та 2. Позначення D^r та D^{-r} не потрібно трактувати як взаємно обернені оператори. Спільний символ для операцій диференціювання та інтегрування використовується лише для уніфікації позначень.

З означення 2 випливає, що натуральні похідні не випадають із загальної процедури обчислення дробових похідних. Коли в (4a) покласти $\rho=1$, $m=n+1$, тоді будемо мати

$$D^n f(x)|_a^x \stackrel{def}{=} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \int\limits_a^x f(t)dt, \quad n=0,\ 1,\ 2,\dots, \quad f(x)\in L_1(a,b). \tag{7}$$

Операцію $(d/dx)^{n+1}$ слід сприймати як традиційну дію обчислення похідної n -го порядку за допомогою скінченних різниць. При такому підході створюються єдині вимоги до властивостей функцій, які диференціюються на $[a,b]$. Похідну (7) будемо називати *визначеною* похідною натурального порядку у розумінні Рімана-Ліувіля. Очевидно, що не всі натуральні похідні підпадають під означення (7). А, отже, потрібно розрізняти *визначені* та *невизначені* похідні натурального порядку, як це застосовується до інтегралів [3].

Питання про значення операторів дробового диференціювання та інтегрування як функцій від x варто відносити до величин порядку $0<r<1$. Для вищих порядків, коли $r=[r]+\{r\}>1$, існування $D^{-r}f(x)|_a^x$ та $D^r f(x)|_a^x$ можна пов'язувати з існуванням кратних інтегралів і похідних натуральних порядків від операторів $D^{-\{r\}}f(x)|_a^x$ та $D^{\{r\}}f(x)|_a^x$ відповідно. Очевидно також, що слід розрізняти поняття про можливість представлення дробових похідних на [a,b] у вигляді оператора $D^r f(x)|_a^x$ із поняттям про існування такої похідної на [a,b].

Відомо, що параметричний інтеграл, яким виражаються похідні та інтеграли дробового порядку функції $f(x)$, тобто,

[5] В сучасній математичній літературі для означених операцій дробового диференціювання та інтегрування застосовують також позначення $\left(D^r_{a+}f\right)(x)$ та $\left(I^r_{a+}f\right)(x)$ [1].

$$I\left(r,f\right)\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_a^x f(t)(x-t)^{r-1}dt\in AC([A,B]) \tag{8}$$

існує майже всюди на [a,b] при одночасному виконанні умов: $r\geq 0$, $f(x)\in L_1(a,b)$.

Властивості $I\left(r,f\right)\left(x\right)$ при незмінній вимозі $f(x)\in L_1(a,b)$ суттєво залежать від порядку r. Наприклад, для $r=1$ маємо

$$I\left(1,f\right)\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma(1)}\int\limits_a^x f(t)dt\in AC\left([a,b]\right).$$

Якщо ж $r=n\in\mathbb{N}$, то

$$I\left(n,f\right)\left(x\right)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x f(t)(x-t)^{n-1}dt\in AC^n\left([a,b]\right).$$

Отже, величина порядку визначає "рівень" неперервності функції $I\left(r,f\right)\left(x\right)$, коли діє незмінна вимога на належність $f(x)$ до класу інтегровних на [a,b] функцій. Зважаючи на властивості абсолютно неперервних функцій, можна стверджувати, що при $r\geq 1$ інтеграл $I\left(r,f\right)\left(x\right)$ існує всюди на [a,b], а його похідна $I'\left(r,f\right)\left(x\right)$ по x є інтегровною на цьому ж проміжку.

Складнішим є випадок для $0<r<0$ та $f(x)\in L_1(a,b)$. Інтуїтивно можна очікувати, що при цих значеннях порядку функція $I\left(r,f\right)\left(x\right)$ існуватиме на [a,b] майже всюди. Саме такий випадок вимагає окремого висвітлення.

Теорема 2. *Якщо $f(x)\in L_1(a,b)$, $0\leq r<1$, то інтеграл $I\left(r,f\right)\left(x\right)$ також належить до $L_1(a,b)$, а дробовий інтеграл $D^{-r}f(x)|_a^x$ може бути представлений у вигляді* (1).

Доведення. Припустимо, що $I\left(r,f\right)\left(x\right)\in AC\left([a,b]\right)$. Тоді, відповідно до означення класу абсолютно неперервних функцій, похідна $I'\left(r,f\right)\left(x\right)$ по x повинна належати класу $L_1(a,b)$ і існувати на [a,b] майже всюди. Проведемо диференціювання $I\left(r,f\right)\left(x\right)$ застосовуючи правило Лейбніца.

$$\begin{gathered} I'(r,f)(x)=\tfrac{1}{\Gamma(r)}\tfrac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)(x-t)^{r-1}dt=\tfrac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_a^x f(t)\tfrac{d}{dx}(x-t)^{r-1}dt+\\ +f(t)(x-t)^{r-1}|_{t=x}=\tfrac{1}{\Gamma(r-1)}\int\limits_a^x f(t)(x-t)^{r-2}dt+f(t)(x-t)^{r-1}|_{t=x}. \end{gathered} \tag{9}$$

В умовах теореми інтеграл (9) не існує, оскільки $r-2<-1$, і підінтегральний вираз стає несумовним за Лебегом.

Таким чином, припущення $I\left(r,f\right)\left(x\right)\in AC\left([a,b]\right)$ було хибним, з чого випливає справедливість теореми.

Наслідок 1. *Якщо $0\leq r<1$, то із належності $f(x)$ до певного класу функцій випливає належність $I\left(r,f\right)\left(x\right)$ до цього ж класу.*

Зауваження до теореми 2. Хочемо нагадати, що кожне інтегрування із порядком $r>0$ поліпшує «неперервні» властивості проінтегрованої функції. Тому твердження теореми 2 треба розуміти як мінімальний результат для $I(r,f)(x)$ в аспекті неперервності.

Теорема 3. *Нехай* $r = m - \rho$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \rho \le 1$, $f(x) \in AC^m([a,b])$. *Тоді дробова похідна* $D^r f(x)|_a^x$ *існує майже для всіх* $x \in [a,b]$ *і може бути представлена у вигляді*

$$D^r f(x)|_a^x = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int\limits_a^x f^{(m)}(t)(x-t)^{\rho-1}dt + \sum_{k=1}^{m} f^{(m-k)}(a)\frac{(x-a)^{\rho-k}}{\Gamma(1+\rho-k)}, \tag{10}$$

$f^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots m$ — *похідна* k*-го порядку від функції* $f(x)$.

Доведення. За означенням 2 маємо

$$D^r f(x)|_a^x = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{\rho-1}dt.$$

Проводимо заміну $u = x - t$.

$$D^r f(x)|_a^x = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \int\limits_0^{x-a} f(x-u)u^{\rho-1}du.$$

Скористаємось правилом Лейбніца диференціювання під знаком інтеграла, залежного від параметра.

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x-a} f(x-u)u^{\rho-1}du = \int\limits_0^{x-a} f'(x-u)u^{\rho-1}du + f(a)(x-a)^{\rho-1};$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_0^{x-a} f(x-u)u^{\rho-1}du = \int\limits_0^{x-a} f''(x-u)u^{\rho-1}du + f'(a)(x-a)^{\rho-1} + (\rho-1)f(a)(x-a)^{\rho-2};$$

....

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \int\limits_0^{x-a} f(x-u)u^{\rho-1}du = \int\limits_0^{x-a} f^{(m)}(x-u)u^{\rho-1}du +$$
$$+\Gamma(\rho)\left(f^{(m-1)}(a)\frac{(x-a)^{\rho-1}}{\Gamma(\rho)} + f^{(m-2)}(a)\frac{(x-a)^{\rho-2}}{\Gamma(\rho-1)} + \ldots + f(a)\frac{(x-a)^{\rho-m}}{\Gamma(\rho-m+1)}\right).$$

В останньому виразі переходимо до початкової незалежної змінної $t = x - u$ і отримуємо (10), що завершує доведення. Інтеграл у правій частині (10) існує, зважаючи на приналежність $f(x) \in AC^m([a,b])$.

Наслідок 2. *Якщо* $f(x) \in AC^{m-k}([a,b])$, $k = 1, 2, \ldots m-1$, *то похідна* $D^r f(x)|_a^x$ $(r = m - \rho,\ m \in \mathbb{N},\ 0 < \rho \le 1)$, *коли її розглядати як функцію* x, *стає несумовною на сегменті* $[a,b]$.

2. Основні властивості дробових інтегралів та похідних. Тут і надалі будемо вважати, що r — додатне дійсне число: $r = m - \rho$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \rho \le 1$.

2.1. Операції інтегрування та диференціювання симетричні відносно знака порядку .

Доведення. Покажемо, що оператору інтегрування (1) можна надати такого вигляду:

$$D^{-r} f(x)|_a^x = \frac{1}{\Gamma(m+r)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{m+r-1}dt. \tag{11}$$

Виконуємо операцію диференціювання, послідовно застосовуючи m разів правило Лейбніца (див. доведення теореми 2). Це дає

$$D^{-r}f(x)|_a^x=\frac{1}{\Gamma(m+r)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m\int\limits_a^x f(t)(x-t)^{m+r-1}dt=\frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_a^x f(t)(x-t)^{r-1}dt.$$

Отже, формули (1) та (11) тотожні. А порівняння (11) із (4а) доводить, що для інтегровних функцій операції дробового інтегрування і диференціювання симетричні відносно знака порядку.

2.2. Якщо $f(x)\in L_1(a,b)$, то

$$D^r\left(D^{-r}f(x)|_a^x\right)|_a^x=f(x). \tag{12}$$

Ця властивість є наслідком означення 2.

2.3. Якщо $f(x)\in AC^m\left([a,b]\right)$, $f^{(m-k)}(a)=0$, $k=1,\,2,\ldots m$, то

$$D^{-r}\left(D^r f(x)|_a^x\right)|_a^x=f(x). \tag{13}$$

Доведення. Дія внутрішнього оператора вже розкрита при доведенні теореми 3. Використовуємо той результат і розписуємо зовнішню операцію.

$$D^{-r}\left(D^r f(x)|_a^x\right)|_a^x=\frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(\rho)}\int\limits_a^x(x-t)^{r-1}dt\int\limits_a^t f^{(m)}(\tau)(t-\tau)^{\rho-1}d\tau.$$

Виконуємо заміну $t-\tau=u(x-\tau)$. Наступні викладки повторюють хід доведення теореми 1, в результаті чого знаходимо $D^{-r}\left(D^r f(x)|_a^x\right)|_a^x=\frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_a^x f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}dt=$ $=D^{-m}f^{(m)}(x)|_a^x=f(x)\quad\left(f^{(m-k)}(a)=0\right)$.

2.4. Нехай $f(x)\in L_1(a,b)$, $s\in\mathbb{R}$, $s>0$. *Тоді*

$$D^{-s}\left(D^{-r}f(x)|_a^x\right)|_a^x=D^{-r}\left(D^{-s}f(x)|_a^x\right)|_a^x=D^{-r-s}f(x)|_a^x, \tag{14}$$

тобто, операція інтегрування має напівгрупову властивість.

Доведення. Для першої групи операторів маємо

$$D^{-s}\left(D^{-r}f(x)|_a^x\right)|_a^x=\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(r)}\int\limits_a^x(x-t)^{s-1}dt\int\limits_a^t f(\tau)(t-\tau)^{r-1}d\tau.$$

Після виконання очевидних перетворень, про які вже згадувалось вище, отримуємо

$$D^{-s}\left(D^{-r}f(x)|_a^x\right)|_a^x=\tfrac{1}{\Gamma(s)\Gamma(r)}\int\limits_a^x f(\tau)(x-\tau)^{r+s-1}d\tau\int\limits_0^1 u^{r-1}(1-u)^{s-1}du=$$
$$=\tfrac{B(r,s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)}\int\limits_a^x f(\tau)(x-\tau)^{r+s-1}d\tau=\tfrac{1}{\Gamma(r+s)}\int\limits_a^x f(\tau)(x-\tau)^{r+s-1}d\tau=D^{-r-s}f(x)|_a^x.$$

Аналогічні дії проводимо із другою комбінацією операторів і переконуємося, що

$$D^{-r}\left(D^{-s}f(x)|_a^x\right)|_a^x=D^{-r-s}f(x)|_a^x.$$

2.5. Нехай $f(x) \in L_1(a,b)$, $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$. Тоді результат повторного застосування операторів $D^r\left(D^{-s}f(x)|_a^x\right)|_a^x$ *буде таким:*

$$a)\quad D^r\left(D^{-s}f(x)|_a^x\right)|_a^x = \frac{1}{\Gamma(\rho+s)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{\rho+s-1}dt, \quad \text{якщо} \quad r > s; \tag{15}$$

$$b)\quad D^r\left(D^{-s}f(x)|_a^x\right)|_a^x = D^{r-s}f(x)|_a^x = \frac{1}{\Gamma(s-r)} \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{s-r-1}dt, \quad \text{якщо} \quad r < s. \tag{16}$$

Доведення. Для випадку а) відповідно до означень 1, 2 та властивості 2.4 розписуємо послідовні операції.

$$D^r\left(D^{-s}f(x)|_a^x\right)|_a^x = D^{m-\rho}\left(D^{-s}f(x)|_a^x\right)|_a^x = D^m\left(D^{-\rho-s}f(x)|_a^x\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\rho+s)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{\rho+s-1}dt.$$

Диференціювання під знаком інтеграла не можна проводити, зважаючи на $f(x) \in L_1(a,b)$, а також на те, що після виконання дії $(d/dx)^m(x-t)^{\rho+s-1} = \Gamma(\rho+s)/\Gamma(\rho+s-m)\cdot(x-t)^{\rho+s-m-1}$ підінтегральний вираз став би неінтегровним $(-r+s-1 < -1)$. Отже, інтеграл (14) є остаточним значенням $D^r(D^{-s}f)$ при $r > s$.

Для випадку б) повторюємо попередні викладки.

$$D^r\left(D^{-s}f(x)|_a^x\right)|_a^x = \frac{1}{\Gamma(m-r+s)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{m-r+s-1}dt.$$

Оскільки $s-r > 0$, то можна скористатися правилом Лейбніца диференціювання під знаком інтеграла, що дає:

$$D^r\left(D^{-s}f(x)|_a^x\right)|_a^x = \frac{1}{\Gamma(s-r)} \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{s-r-1}dt.$$

За означенням 1 останній вираз є інтегралом дробового порядку $s-r$, тобто,

$$D^r\left(D^{-s}f(x)|_a^x\right)|_a^x = D^{r-s}f(x)|_a^x.$$

3. Приклади інтегродиференціювання елементарних функцій. Задача Абеля. Розглянемо декілька прикладів диференціювання та інтегрування елементарних функцій. З огляду на властивість 2.1, будемо вважати $r \in \mathbb{R}$ і в окремих випадках розглядатимемо лише інтегрування як менш громіздку дію. Для похідних при цьому потрібно міняти знак порядку на супротивний.

3.1. Степенева функція $f(x) = (x-a)^p$, $p > -1$.

$$D^{-r}(x-a)^p|_a^x = \frac{\Gamma(p+1)(x-a)^{p+r}}{\Gamma(p+1+r)}. \tag{17}$$

Розписуємо дії, що забезпечують (17). Підставляємо $f(x)$ в інтеграл (1).

$$D^{-r}\,(x-a)^p\,|_a^x = \frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_a^x (t-a)^p\,(x-t)^{r-1}\,dt.$$

Виконуємо заміну $t-a=\xi\,(x-a)$:

$$D^{-r}\,(x-a)^p\,|_a^x = \frac{(x-a)^{p+r}}{\Gamma(r)}\int\limits_0^1 \xi^p\,(1-\xi)^{r-1}d\xi = \frac{(x-a)^{p+r}}{\Gamma(r)}B(p+1,r).$$

Тут ми знову зустрічаємось із бета-функцією [2] (інтеграл Ейлера першого роду). Для неї справедливе представлення

$$B(p+1,r) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(r)}{\Gamma(p+1+r)},$$

що дозволяє відразу написати результат інтегрування:

$$D^{-r}\,(x-a)^p\,|_a^x = \frac{(x-a)^{p+r}}{\Gamma(r)}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(r)}{\Gamma(p+1+r)} = \frac{\Gamma(p+1)\,(x-a)^{p+r}}{\Gamma(p+1+r)}.$$

Для отримання із цього виразу похідної r-го порядку міняємо знак порядку на супротивний.

$$D^{r}\,(x-a)^p\,|_a^x = \frac{\Gamma(p+1)\,(x-a)^{p-r}}{\Gamma(p-r+1)}. \tag{17a}$$

Якщо прийняти $f(x)=C, \quad C=const(p=0)$, то (17) і (17а) дають

$$D^{-r}C|_a^x = C\frac{(x-a)^r}{\Gamma(1+r)};\quad D^{r}C|_a^x = C\frac{(x-a)}{\Gamma(1-r)}^{-r}. \tag{18}$$

3.2. $f(x)=(x-c)^p\,,\quad a>c,\quad p\in\mathbb{R}, p\neq -1,\ -2,\ -3,\ldots.$

$$D^{-r}(x-c)^p|_a^x = \frac{(x-a)^r\,(a-c)^p}{\Gamma(r+1)}{}_2F_1\left(1,-p;r+1;\frac{a-x}{a-c}\right), x<2a-c, \tag{19}$$

де ${}_2F_1(\quad)$ — гіпергеометрична функція [2].

У порівнянні із попереднім прикладом точка $x=c$, в якій $f(x)$ могла би мати особливість при $p\le -1$, винесена за межі проміжку $[a,b]$, що робить її неперервною на $[a,b]$.

Інтеграл (1) для розглядуваної функції набирає вигляду:

$$D^{-r}f(x)|_a^x = \frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_a^x (t-c)^p\,(x-t)^{r-1}\,dt.$$

Покладемо $t-a=\xi\,(x-a)$. Тоді

$$(t-c)^p = (a-c)^p\left(1+\xi\frac{x-a}{a-c}\right)^p = (a-c)^p\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}p\\k\end{array}\right)\left(\xi\frac{x-a}{a-c}\right)^k, x<2a-c.$$

Існує доведення [1], що диференціювання рівномірно збіжних рядів є коректною дією.

$$D^{-r}f(x)|_a^x =$$
$$= \tfrac{(x-a)^r(a-c)^p}{\Gamma(r)} \int\limits_0^1 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) \left(\xi \tfrac{x-a}{a-c}\right)^k (1-\xi)^{r-1}\, d\xi = \tfrac{(x-a)^r(a-c)^p}{\Gamma(r)} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array} \right) \left(\tfrac{x-a}{a-c}\right)^k \times$$
$$\times B(k+1,r) = \tfrac{(x-a)^r(a-c)^p}{\Gamma(r+1)} \left[1 + \tfrac{(-p)1!}{1!(r+1)}\ \tfrac{a-x}{a-c} + \tfrac{(-p)(1-p)2!}{2!(r+1)(r+2)} \left(\tfrac{a-x}{a-c}\right)^2 + \ldots \right] =$$
$$= \tfrac{(x-a)^r(a-c)^p}{\Gamma(r+1)} {}_2F_1\left(1,-p;r+1;\tfrac{a-x}{a-c}\right), x < 2a-c.$$

Якщо ж підінтегральний вираз представити таким чином:

$$(t-c)^p (x-c)^{r-1} \left(1 - \frac{t-c}{x-c}\right)^{r-1} = (t-c)^p (x-c)^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\begin{array}{c} r-1 \\ k \end{array} \right) \left(\frac{t-c}{x-c}\right)^k,$$

— то після інтегрування знайдемо

$$D^{-r}f(x)|_a^x = \tfrac{(x-c)^{p+r}}{\Gamma(r)} \left(\tfrac{1}{p+1} - \tfrac{r-1}{1!(p+2)} + \tfrac{(r-1)(r-2)}{2!(p+3)} - \ldots\right) -$$
$$- \tfrac{(x-c)^{r-1}(a-c)^{p+1}}{\Gamma(r)} \left(\tfrac{1}{p+1} - \tfrac{r-1}{1!(p+2)} \cdot \tfrac{a-c}{x-c} + \tfrac{(r-1)(r-2)}{2!(p+3)} \cdot \left(\tfrac{a-c}{x-c}\right)^2 - \ldots\right) =$$
$$= \tfrac{(x-c)^{p+r}}{\Gamma(r)(p+1)} {}_2F_1(1-r,p+1;p+2;1) - \tfrac{(x-c)^{r-1}(a-c)^{p+1}}{(p+1)\Gamma(r)} {}_2F_1\left(1-r,p+1;p+2;\tfrac{a-c}{x-c}\right) =$$
$$= \tfrac{\Gamma(p+1)(x-c)^{p+r}}{\Gamma(p+1+r)} - \tfrac{(x-c)^{r-1}(a-c)^{p+1}}{(p+1)\Gamma(r)} {}_2F_1\left(1-r,p+1;p+2;\tfrac{a-c}{x-c}\right). \tag{20}$$

Неважко переконатись, що (19) і (20) дають тотожні результати на спільних проміжках їх збіжності.

3.3. $f(x) = (x-a)^p \ln(x-a)$, $p > -1$.

$$D^r\left[(x-a)^p \ln(x-a)\right]|_a^x = \tfrac{\Gamma(p+1)(x-a)^{p-r}}{\Gamma(p+1-r)} \left(\ln(x-a) + \phi(p+1) - \phi(p+1-r)\right), \quad p > -1, r \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Записуємо очевидне співвідношення.

$$(x-a)^p \ln(x-a) = \frac{\partial}{\partial p}(x-a)^p. \tag{22}$$

Беремо від правої та лівої частин похідну D^r.

$$D^r\left[(x-a)^p \ln(x-a)\right]|_a^x = D^r\left[\frac{\partial}{\partial p}(x-a)^p\right]\Bigg|_a^x = \frac{\partial}{\partial p} D^r (x-a)^p|_a^x$$

Зміна порядку диференціювання тут можлива внаслідок неперервності $(x-a)^p$ на (a,b). На підставі (16a) розкриваємо $D^r(x-a)^p$ та проводимо його диференціювання оператором $\partial/\partial p$, зважаючи на особливості диференціювання гамма-функції [2].

$$\frac{\partial}{\partial p} D^r (x-a)^p|_a^x = (x-a)^{p-r} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-r)} \left(\ln(x-a) + \phi(p+1) - \phi(p+1-r)\right).$$

Тут $\phi(\quad)$ — псі-функція Ейлера ($d/dx\Gamma(x) = \Gamma(x)\cdot\phi(x)$). Остаточно маємо

$$D^r\left[(x-a)^p \ln(x-a)\right]|_a^x = \frac{\Gamma(p+1)(x-a)^{p-r}}{\Gamma(p+1-r)} \left(\ln(x-a) + \phi(p+1) - \phi(p+1-r)\right),$$

$p > -1$, $r \in \mathbb{R}$.

Для останнього прикладу покажемо, що (21) узагальнює операції натурального диференціювання та інтегрування в одному виразі. Візьмемо $f(x) = (x-a)^2 \ln(x-a)$. Нехай $r = 3$ (обчислюється похідна третього порядку від заданої функції).

$$D^3 \left[(x-a)^2 \ln(x-a)\right]\big|_a^x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2!(x-a)^{-1}}{\Gamma(\varepsilon)} \left(\ln(x-a) + \phi(3) - \phi(\varepsilon)\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{x-a} \frac{\phi(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} = \frac{2}{x-a}.$$

Покладемо тепер $r = -2$.

$$D^{-2} f(x)\big|_a^x = \int_a^x (t-a)^2 \ln(t-a)(x-t)dt = \tfrac{2!(x-a)^4}{4!} \left(\ln(x-a) + \phi(3) - \phi(5)\right) =$$
$$= \tfrac{(x-a)^4}{12} \left(\ln(x-a) - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{(x-a)^4}{12} \left(\ln(x-a) - \tfrac{7}{12}\right).$$

3.4. Задача Абеля (1823 р.). Відома задача тим, що у ній практична проблема механіки зведена до інтегрального рівняння, яке легко розв'язується за допомогою апарату дробового інтегродиференціювання.

У вертикальній площині (s, τ) знайти таку криву, по якій матеріальна точка, почавши рух без початкової швидкості у точці з ординатою x, під дією сили тяжіння досягає осі $O\tau$ за час $T = f(x)$, де функція $f(x)$ задана заздалегідь. Тертя відсутне.

Нехай θ — кут нахилу до осі $O\tau$ дотичної до шуканої кривої (рис.1).

Приріст кінетичної енергії точки при її переміщенні від M до N дорівнює роботі сили тяжіння.

$$\frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \frac{1}{\sin\theta}\right)^2 = mg(x-s), \tag{23}$$

де m — маса точки; g — прискорення земного тяжіння; t — поточне значення часу падіння.

Знаходимо вертикальну складову швидкості руху точки.

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(x-s)} \sin\theta.$$

Знак “мінус” вказує на те, що напрям швидкості протилежний осі Os.

Відокремлюємо незалежні змінні.

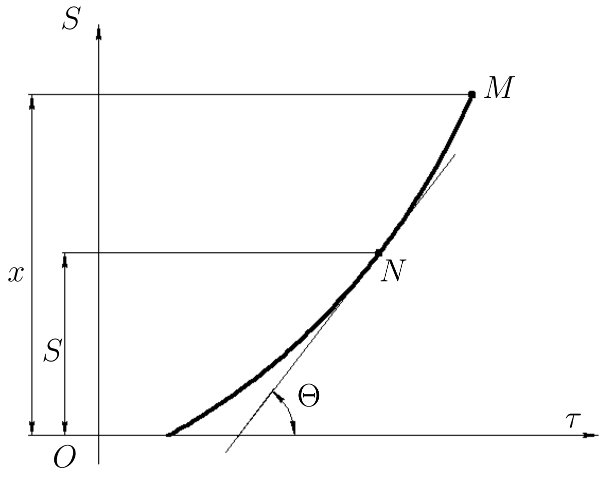
$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{(x-s)^{1/2} \sin\theta} = -dt$$

Позначимо $1/\sin\theta = \varphi(s)$ і проведемо інтегрування попереднього виразу в межах $0, x$.

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^{1/2}} = T = f(x) \tag{24}$$

Інтегральне рівняння (24) відносно невідомої функції $\varphi(s)$ називається рівнянням Абеля. Його записують у більш загальному вигляді:

$$\int_a^x \frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^r} = f(x), \quad 0 < r < 1, \quad x \in [a, b].$$



Мал. 1. Схема до задачі Абеля

А порівняння (24) із означенням 1 дозволяє записати його і так:

$$D^{-1/2}\varphi(x)|_0^x = \sqrt{2g/\pi}f(x), \tag{25}$$

— звідки випливає, що

$$\varphi(x) = \sqrt{2g/\pi}\cdot D^{1/2}f(x)|_0^x = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{-1/2}dt. \tag{26}$$

Тобто, шукана функція описується похідною дробового порядку від заданої часової функції $f(x)$.

Знайдемо форму кривої Абеля для деяких типових випадків часової функції. Нехай

$$f(x) = kx^{\alpha}, \tag{27}$$

де $\alpha \geq 0$, а k — масштабний коефіцієнт.

Тоді для $\varphi(x)$ знаходимо

$$\varphi(x) = k\sqrt{2g/\pi}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)x^{\alpha-1/2}}{\Gamma(\alpha+1/2)}.$$

Враховуємо, що $\varphi(x) = 1/\sin\theta = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}\Big/\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{tg}\theta = dx/d\tau$, записуємо вираз для $dx/d\tau$.

$$\frac{dx}{d\tau} = \pm\left(\frac{2g}{\pi}\left(\frac{k\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)}\right)^2 x^{2\alpha-1}-1\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

Очевидно, що $2\alpha-1 \leq 0$ (крива $x(\tau)$ за умовою досягає осі 0τ).Таким чином, $0 \leq \alpha \leq 1/2$.

Подаємо розв'язки (28) для деяких значень α.

1) α=0. Цей випадок відомий як задача Галілея (або задача про брахістохрону).

$$\tau = C + \sqrt{x(2a-x)} - 2a\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}.$$

Тут прийнято $k^2 = \pi^2 a/g$, $\quad C$ — стала інтегрування.

Шуканою кривою є частина циклоїди

$$\begin{cases} x = a(1+\cos t), \\ \tau = a\pi - a(t-\sin t); \end{cases} \quad C = a\pi; \quad t \in [0,\pi], \tag{29}$$

де a — радіус відтворюючого кола; відтворюючою прямою для цієї циклоїди виступає пряма $x = 2a$.

2). α=1/4. Інтегрування (28) дає

$$\tau = C + (u-a)\sqrt{u(2a-u)} + 2a^2 \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u}{2a-u}}; \quad u = \sqrt{x}, \quad a = \frac{g}{\pi}\left(k\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)}\right)^2.$$

Параметричне рівняння кривої має такий вигляд:

$$\begin{cases} x = a^2(1+\cos t)^2, \\ \tau = a^2\left(\pi - t + \frac{1}{2}\sin 2t\right); \end{cases} \quad C = 0, \quad t \in [0,\pi]. \tag{30}$$

3). α=1/2. Після інтегрування (28) знаходимо

$$x = \frac{\tau}{\sqrt{gk^2/2-1}}, \quad gk^2 > 2.$$

Тобто, випадку $\alpha = 1/2$ відповідає похила пряма, що проходить через початок координат. Подаємо її у параметричній формі.

$$\begin{cases} x = a(1+\cos t), \\ \tau = b(1+\cos t); \end{cases} \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{gk^2/2-1}}; \quad t \in [0,\pi]. \tag{31}$$

4. Практичні прийоми інтегродиференціювання. Розглянемо методи практичного інтегродиференціювання аналітичних функцій.

Теорема 4. *Коли $f(x) \in C^a(a,b)$, $r \in \mathbb{R}$, тоді*

$$D^r f(x)|_a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} f^{(k)}(x)\frac{(x-a)^{k-r}}{\Gamma(1+k-r)}. \tag{32}$$

Тут через $C^a(a,b)$ позначено клас аналітичних на (a,b) функцій.

Доведення. Скористаємось означенням 1. В інтегралі (1) проводимо заміну $x - t = u$ і розкладаємо $f(x-u)$ у ряд Тейлора із центром в точці x.

$$D^{-r} f(x)|_a^x = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{x-a} f(x-u)u^{r-1}du = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f^{(k)}(x)\frac{\Gamma(k+r)}{k!\Gamma(r)}\int_0^{x-a}\frac{u^{k+r-1}}{\Gamma(k+r)}du =$$

$$= \sum_{k=0}^{x-a}(-1)^k\frac{\Gamma(k+r)}{k!\Gamma(r)}f^{(k)}(x)\frac{(x-a)^{k+r}}{\Gamma(1+k+r)} = \sum_{k=0}^{x-a}\binom{-r}{k} f^{(k)}(x)\frac{(x-a)^{k+r}}{\Gamma(1+k+r)}$$

На підставі властивості 2.1 цей вираз буде справедливим і для операції диференціювання. Міняючи на протилежний знак порядку, отримуємо (32), чим завершується доведення.

Наслідок 3. *Формула (32) дає дуже простий алгоритм дробового інтегродиференціювання функції $f(x)$. Вона є частковим випадком узагальненого правила Лейбніца дробового інтегродиференціювання добутку двох функцій $f(x)\cdot g(x) \in C^a(a,b)$* [1].

Подаємо вираз цього правила без доведення:

$$D^r\left(f(x)g(x)\right)|_a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} r \\ k \end{array}\right) D^k f(x) D^{r-k} g(x)|_a^x. \tag{33}$$

Якщо у (33) покласти $g(x) = 1$, то маємо (32).

На закінчення розглянемо приклад диференціювання функції $e^{px}\sin\omega(x-a)$, $p,\omega \in \mathbb{R}$, із використанням (33). Нехай $f(x) = e^{px}\sin\omega(x-a)$, $g(x) = 1$. Обчислюємо натуральні похідні $f(x)$.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{px}\sin\omega\left(x-a\right)\right) = e^{px}\left[p\sin\omega\left(x-a\right) + \omega\cos\omega\left(x-a\right)\right] = e^{px}\left(p^2+\omega^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \sin\left[\omega\left(x-a\right) + \operatorname{arctg}\frac{\omega}{p}\right];$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{px}\sin\omega\left(x-a\right)\right) = e^{px}\left(p^2+\omega^2\right)\sin\left[\omega\left(x-a\right) + 2\operatorname{arctg}\frac{\omega}{p}\right]; \ \ldots$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{px}\sin\omega\left(x-a\right)\right) = e^{px}\left(p^2+\omega^2\right)^{n/2}\sin\left[\omega\left(x-a\right) + n\cdot\operatorname{arctg}\frac{\omega}{p}\right].$$

Підставляємо значення похідних у (33).

$$D^r\left(e^{px}\sin\omega\left(x-a\right)\right)|_a^x = e^{px}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} r \\ k \end{array}\right)\frac{(x-a)^{k-r}}{\Gamma(k-r+1)}\left(p^2+\omega^2\right)^{\frac{k}{2}}\sin\left[\omega\left(x-a\right)+k\cdot\operatorname{arctg}\frac{\omega}{p}\right]. \tag{34}$$

Висновки. 1. Похідні та інтеграли дробових порядків — результат глибокого узагальнення операцій диференціювання та інтегрування. Саме тому вони мають широкі можливості для узагальнення багатьох дискретних понять і об'єктів математичного аналізу (див., напр., [4]).

2. Дробові похідні та інтеграли від сумовних функцій симетричні відносно знака порядку. Для них операції обчислення похідних та інтегралів взаємно продовжують себе.

3. Дробове інтегродиференціювання відзначається високим рівнем універсалізації. Похідні та інтеграли натуральних порядків є частковим випадком відповідних дробових аналогів і обчислюються за одним алгоритмом.

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука, 1987. – 682 с.
2. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
3. *Рибак В.Я., Король І.Ю., Рубіш Ю.Ю.* Невизначені інтеграли та похідні дробового порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1999. – Вип. 4. – С. 90–95.
4. *Рибак В.Я.* Про узагальнення чисел Стірлінга другого роду // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 98–106.

Одержано 9.11.2004