УДК 517.9

Н. М. Щобак (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

By using a suitable change of variables, we reduce the boundary-value problem containing two parameters both in the non-linear ordinary differential equations and in the non-linear boundary conditions to a family of boundary-value problems with linear conditions plus some non-linear algebraic determining equations. We construct a numerical-analytic scheme suitable for studying the solutions of the transformed boundary-value problem.

Задача з двома параметрами в нелінійних звичайних диференціальних рівняннях і в нелінійних крайових умовах зводиться за допомогою заміни змінних до сім'ї параметризованих крайових задач з лінійними умовами, яка розглядається разом з деякою системою визначальних нелінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язки модифікованої задачі досліджуються за допомогою чисельно-аналітичної техніки.

1. Вступ. Простота та універсальність чисельно-аналітичного методу послідовних наближень, запропонованого А. М. Самойленко [1, 2], стимулювали активні дослідження по узагальненню та використанню чисельно-аналітичних методів до різноманітних класів періодичних, дво- і багатоточкових крайових задач.

Крайові задачі з параметрами в нелінійному диференціальному рівнянні та в лінійних крайових умовах вивчались у [1–6]. В [7, 1, 2] методологія чисельно-аналітичного методу була розширена, що зробило можливим дослідження нелінійних двоточкових задач з нелінійними крайовими умовами, для яких пропонується вводити нелінійну заміну змінних. У роботі [8] пропонується використовувати просту заміну, яка, як показано, суттєво полегшує застосування техніки згаданого вище методу послідовних наближень. Всі припущення сформульовані для першопочаткової задачі, а не для трансформованої. Встановлено, що для нелінійних параметризованих крайових задач з розділеними умовами чисельно-аналітичний метод застосовується без будь-якої заміни змінних. Подібні результати були отримані в [9].

На основі [8, 9], в [10–12] запропоновано конструювання чисельно-аналітичної схеми для вивчення параметризованих крайових задач з параметрами і в нелінійному диференціальному рівнянні, і в нелінійних крайових умовах.

В даній роботі розглядається один з підходів, що робить можливим вивчення, використовуючи чисельно-аналітичний метод, крайових задач більш загального вигляду з двома параметрами.

2. Постановка задачі. Розглянемо нелінійну двоточкову параметризовану задачу наступного вигляду

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y\,(t)\,, \lambda_1, \lambda_2), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$g\,(y\,(0)\,,\ y\,(T)\,, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \tag{2}$$

$$y_1\,(0) = h\,(\lambda_1, \lambda_2,\ y_2\,(0)\,, y_3\,(0)\,, \ldots, y_n\,(0))\,, \tag{3}$$

де $\lambda_k \in I_k$ $(I_k = [a_k, b_k], \quad k = 1, 2)$ — невідомі скалярні параметри.

Припустимо, що функції

$$f : [0, T] \times G \times I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}^n,$$

$$g : G \times G \times I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad h : I_1 \times I_2 \times G_1 \to \mathbb{R}$$

є неперервними, де множини $G \subset \mathbb{R}^n$, $G_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ $(G_1 \subset G)$ — замкнені зв'язні обмежені області.

Нехай для $t \in [0,T]$ і фіксованих $\lambda_k \in I_k$ $(k = 1,2)$ функція f задовольняє умову Ліпшіца вигляду

$$|f(t,u,\lambda_1,\lambda_2) - f(t,v,\lambda_1,\lambda_2)| \leq K\,|u-v| \tag{4}$$

для довільних $\{u,v\} \subset G$ і деякої невід'ємної сталої матриці $K = (K_{ij})_{i,j=1}^n$. Нерівність (4), як і подібні співвідношення нижче, розуміємо покомпонентно.

Потрібно знайти такі параметри λ_1, λ_2 , при яких задача (1), (2) має неперервний диференційовний розв'язок та задовольняє додаткову умову (3). Отже, розв'язком вважатимемо трійку $\{y,\lambda_1,\lambda_2\}$.

3. Побудова еквівалентної задачі з лінійними крайовими умовами. Введемо заміну

$$y(t) = x(t) + w, \tag{5}$$

де $x \in D$ — замикання обмеженої підобласті G ; $w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ — невідомий параметр; $D + \Omega \subset G$.

Використовуючи заміну змінних (5), задача (1)–(3) може бути переписана наступним чином

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x\,(t) + w, \lambda_1, \lambda_2), \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

$$g\,(x\,(0) + w, x\,(T) + w, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \tag{7}$$

$$x_1\,(0) = h(\lambda_1, \lambda_2,\ x_2\,(0) + w_2, x_3\,(0) + w_3, ..., x_n\,(0) + w_n) - w_1. \tag{8}$$

Введемо в розгляд сім'ю двоточкових крайових задач

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x\,(t) + w, \lambda_1, \lambda_2), \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = 0, \tag{10}$$

$$x_1\,(0) = h(\lambda_1, \lambda_2,\ x_2\,(0) + w_2, x_3\,(0) + w_3, ..., x_n\,(0) + w_n) - w_1. \tag{11}$$

Крім того, вимагаємо, щоб початкове значення при $t = 0$ розв'язку крайової задачі (6), (7), (8) задовольняло систему рівнянь

$$g\left(x\,(0) + w, -B^{-1}Ax(0) + w, \lambda_1, \lambda_2\right) = 0, \tag{12}$$

де $-B^{-1}Ax(0) = x(T)$.

Очевидно, що початкова нелінійна крайова задача (1)–(3) еквівалентна сім'ї крайових задач (9)–(11) з лінійними умовами (10), яка розглядається разом з нелінійною системою визначальних алгебраїчних рівнянь(12).

Отриману сім'ю задач (9)–(11) дослідимо, використовуючи чисельно-аналітичний метод послідовних наближень, розвинений в [1, 2].

Припускаємо, що задана параметризована крайова задача така, що підмножина

$$D_\beta = \{y \in \mathbb{R}^n : B(y, \beta(y)) \subset G\} \neq \varnothing, \tag{13}$$

де

$$\beta(y) = \frac{T}{2}\delta_G(f) + \left|(B^{-1}A + I_n)y\right|, \tag{14}$$

$$\delta_G(f) = \frac{1}{2}\left[\max_{(t,y,\lambda_1,\lambda_2)\in[0,T]\times G\times I_1\times I_2} f(t,y,\lambda_1,\lambda_2) - \min_{(t,y,\lambda_1,\lambda_2)\in[0,T]\times G\times I_1\times I_2} f(t,y,\lambda_1,\lambda_2)\right],$$

I_n — n-вимірна одинична матриця, $B(y,\beta(y))$ — куля радіуса $\beta(y)$ з центром в точці y.

Крім того, припускаємо, що спектральний радіус $r(K)$ матриці K в (4) задовольняє нерівність

$$r(K) < \frac{10}{3T}. \tag{15}$$

Визначимо множину $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ наступним чином

$$U = \left\{u = (u_2, u_3, ..., u_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : z \in D_\beta\right\},$$

де

$$z = (h(\lambda_1, \lambda_2,\ u_2 + w_2, u_3 + w_3, ..., u_n + w_n) - w_1, u_2, u_3, ..., u_n). \tag{16}$$

Розглянемо наступну послідовність функцій

$$\begin{gathered} x_{m+1}(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2) = z + \int_0^t f(s, x_m(s,w,u,\lambda_1,\lambda_2) + w, \lambda_1,\lambda_2)\, ds - \\ -\tfrac{t}{T}\int_0^T f(s, x_m(s,w,u,\lambda_1,\lambda_2) + w, \lambda_1,\lambda_2)\, ds - \tfrac{t}{T}\left[B^{-1}A + I_n\right] z, \\ m = 0,1,2,...,\quad x_0(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2) = z \in D_\beta, \end{gathered} \tag{17}$$

де $w \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda_k \in I_k$ $(k = 1,2)$, вектор z визначається рівністю (16).

Відзначимо, що

$$x_m(0,w,u,\lambda_1,\lambda_2) = z \tag{18}$$

для всіх $m = 0,1,2,...$, та довільних $w \in \Omega$, $u \in U$, $\lambda_k \in I_k$ $(k = 1,2)$. Можна перевірити, що послідовність (17) для всіх $m = 0,1,2,...$, $u \in U$, $w \in \Omega$, $\lambda_k \in I_k$ $(k = = 1,2)$ задовольняє крайові умови (10), (11).

Спочатку розв'яжемо (9)–(11), а потім шукатимемо значення параметрів $w \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda_k \in I_k$ $(k = 1,2)$, які одночасно задовольняють(12).

4. Дослідження розв'язків трансформованої задачі (9)–(11).

Теорема 1. *Припустимо, що функції* $f : [0,T] \times G \times I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}^n$, $g : G \times G \times \times I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}^{n+1}$, $h : I_1 \times I_2 \times G_1 \to \mathbb{R}$ *є неперервними та задовольняють умови* (4), (13) – (16).

Тоді:

1) *послідовність функцій* (17), *які задовольняють крайові умови* (10), (11) *для довільних* $u \in U$, $w \in \Omega$ *і* $\lambda_k \in I_k$ $(k = 1,2)$, *рівномірно збігається при* $m \to \infty$ *в області*

$$(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2) \in [0,T] \times \Omega \times U \times I_1 \times I_2 \tag{19}$$

до граничної функції

$$x^*(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2); \tag{20}$$

2) *гранична функція* $x^*(\cdot,w,u,\lambda_1,\lambda_2)$ *з початковим значенням* $x^*(0,w,u,\lambda_1,\lambda_2) =$

$= z$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\begin{gathered} x(t) = z + \int\limits_0^t f\left(s, x(s) + w, \lambda_1, \lambda_2\right) ds - \\ -\tfrac{t}{T}\left[\int\limits_0^T f\left(s, x(s) + w, \lambda_1, \lambda_2\right) ds + \left(B^{-1}A + I_n\right) z\right], \end{gathered} \tag{21}$$

тобто, що те ж саме, розв'язком модифікованого (відносно (9) *) інтегро-диференціального рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t) + w, \lambda_1, \lambda_2) + \Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2), \tag{22}$$

де

$$\Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2) = -\tfrac{1}{T}\left[\left(B^{-1}A + I_n\right) z + \int\limits_0^T f\left(s, x(s) + w, \lambda_1, \lambda_2\right) ds\right], \tag{23}$$

та задовольняє крайові умови (10), (11)*;*

3) *для відхилення наближеного розв'язку від точного має місце наступна оцінка:*

$$|x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) - x_m(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)| \le e(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2), \tag{24}$$

де

$$e(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) = \tfrac{20}{9} t\left(1 - \tfrac{t}{T}\right) Q^{m-1}\left(I_n - Q\right)^{-1}\left[Q\delta_G(f) + K\left|\left(B^{-1}A + I_n\right) z\right|\right],$$

вектор $\delta_G(f)$ визначається рівнянням (14)*, а матриця $Q = \frac{3T}{10}K$.*

Доведення. Покажемо, що послідовність (17) є фундаментальною в банаховому просторі $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ із звичайною нормою. Доведемо спочатку, що при $(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) \in [0, T] \times \Omega \times U \times I_1 \times I_2$ та $m \in \mathbb{N}$ значення всіх функцій (17) містяться в D. Дійсно, використовуючи оцінку леми 2.3 (див. [2]), або її узагальнення в лемі 4 (див. [9])

$$\left|\int\limits_0^t \left[f(\tau) - \tfrac{1}{T}\int\limits_0^T f(s) ds\right] d\tau\right| \le \tfrac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{t\in[0,T]} f(t) - \min_{t\in[0,T]} f(t)\right], \tag{25}$$

з (17) для $m = 0$ отримаємо

$$\begin{gathered} |x_1(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) - z| \le \\ \le \left|\int\limits_0^t \left[f(t, z + w, \lambda_1, \lambda_2) - \tfrac{1}{T}\int\limits_0^T f(s, z + w, \lambda_1, \lambda_2) ds\right] dt\right| + \\ + \left|\left[\left(B^{-1}A + I_n\right) z\right]\right| \le \alpha_1(t)\delta_G(f) + \beta_1(z) \le \beta(z), \end{gathered} \tag{26}$$

де

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \tfrac{t}{T}\right),\ |\alpha_1(t)| \le \tfrac{T}{2}, \tag{27}$$

$$\beta_1(z) = \left|\left[B^{-1}A + I_n\right] z\right|. \tag{28}$$

Тому, виходячи з (13), (14), (26), бачимо, що $x_1(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) \in D$ для всіх $(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) \in [0, T] \times \Omega \times U \times I_1 \times I_2$. Згідно методу математичної індукції, легко встановити, що всі функції (17) також містяться в області D, при $m = 1, 2, ...,$ $t \in \in [0, T],$ $w \in \Omega,$ $u \in U,$ $\lambda_k \in I_k$ $(k = 1, 2)$.

Розглянемо наступну різницю функцій

$$x_{m+1}(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) - x_m(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) =$$
$$= \int_0^t [f(s, x_m(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2) - f(s, x_{m-1}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2)]\, ds -$$
$$- \tfrac{t}{T}\int_0^T [f(s, x_m(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2) - f(s, x_{m-1}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2)]\, ds$$

Позначимо

$$d_m(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) = |x_m(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) - x_{m-1}(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)|\,, \; m = 1, 2, ... \; . \tag{29}$$

Виходячи з (29) і умови Ліпшіца (4), матимемо

$$\begin{gathered} d_{m+1}(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) \le \\ \le K \left[\left(1 - \tfrac{t}{T}\right) \int_0^t d_m(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) ds + \tfrac{t}{T} \int_t^T d_m(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) ds \right] \end{gathered} \tag{30}$$

для всіх $m = 0, 1, 2, ...$. Згідно (26)

$$d_1(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) = |x_1(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) - z| \le \alpha_1(t)\delta_G(f) + \beta_1(z), \tag{31}$$

де $\alpha_1(t)$ задається формулою (27), а $\beta_1(z)$ — (28).

Використаємо оцінки леми 2.4 з [2]

$$\alpha_{m+1}(t) \le \left(\frac{3}{10}T\right) \alpha_m(t), \qquad \alpha_{m+1}(t) \le \left(\frac{3}{10}T\right)^m \overline{\alpha}_1(t), \tag{32}$$

одержані для послідовності функцій

$$\begin{gathered} \alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \tfrac{t}{T}\right) \int_0^t \alpha_m(s) ds + \tfrac{t}{T} \int_t^T \alpha_m(s) ds, \quad m = 0, 1, 2, ... \\ \alpha_0(t) = 1, \quad \alpha_1(t) = 2t\left(1 - \tfrac{t}{T}\right), \end{gathered} \tag{33}$$

де $\overline{\alpha_1}(t) = \frac{10}{9}\alpha_1(t)$.

Використовуючи (31), (33), при $m = 1$ з (30) випливає

$$d_2(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) \le$$
$$\le K\delta_G(f) \left[\left(1 - \tfrac{t}{T}\right) \int_0^t \alpha_1(s) ds + \tfrac{t}{T} \int_t^T \alpha_1(s) ds \right] + K\beta_1(z) \left[\left(1 - \tfrac{t}{T}\right) \int_0^t ds + \tfrac{t}{T} \int_t^T ds \right] \le$$
$$\le K \left[\alpha_2(t)\delta_G(f) + \alpha_1(t)\beta_1(z)\right].$$

За індукцією можемо легко отримати

$$d_{m+1}(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) \le K^m [\alpha_{m+1}(t)\delta_G(f) + \alpha_m(t)\beta_1(z)], \quad m = 0, 1, 2, ... \,, \tag{34}$$

де $\alpha_{m+1}(t),$ $\alpha_m(t)$ обчислюються згідно (33), $\delta_G(f),$ $\beta_1(z)$ задані (14) і (28). Взявши до уваги другу оцінку (32), матимемо з (34)

$$d_{m+1}(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2) \le \overline{\alpha}_1(t)\left[\left(\tfrac{3}{10}TK\right)^m \delta_G(f) + K\left(\tfrac{3}{10}TK\right)^{m-1}\beta_1(z)\right] =$$

$$= \overline{\alpha}_1(t)\left[Q^m\delta_G(f) + KQ^{m-1}\beta_1(z)\right],$$

для всіх $m = 1, 2, ...$, де матриця

$$Q = \tfrac{3}{10}TK. \tag{35}$$

Тому, використавши (35),

$$\begin{gathered}
|x_{m+j}(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2) - x_m(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2)| \le \\
\le |x_{m+j}(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2) - x_{m+j-1}(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2)| + \\
+ |x_{m+j-1}(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2) - x_{m+j-2}(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2)| + ... + \\
+ |x_{m+1}(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2) - x_m(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2)| = \sum_{i=1}^{j} d_{m+i}(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2) \le \\
\le \overline{\alpha}_1(t)\left[\sum_{i=1}^{j}\left(Q^{m+i}\delta_G(f) + KQ^{m+i-1}\beta_1(z)\right)\right] = \\
= \overline{\alpha}_1(t)\left[Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\delta_G(f) + KQ^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\beta_1(z)\right].
\end{gathered} \tag{36}$$

Оскільки, згідно (15), максимальне власне значення матриці Q, заданої (35), не перевищує одиниці, то $\sum\limits_{i=0}^{j-1}Q^i \le (I_n - Q)^{-1}$ та $\lim\limits_{m\to\infty} Q^m = [0]$. Отже, з (36) можемо зробити висновок, що послідовність $x_m(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2)$, вигляду (17), є фундаментальною, а тому, і рівномірно збіжною в області (19). Таким чином, твердження (20) є вірним.

Оскільки, всі функції $x_m(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2)$ послідовності (17) задовольняють крайовим умовам (10), (11), гранична функція $x^*(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2)$ також задовольняє цим умовам. Спрямувавши в (17) m до ∞, отримаємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (21). Також з (21) очевидно, що

$$x^*(T,w,u,\lambda_1,\lambda_2) = -B^{-1}Az, \tag{37}$$

а тому, $x^*(t,w,u,\lambda_1,\lambda_2)$ є як розв'язком інтегрального рівняння (21), так і розв'язком інтегро-диференціального рівняння (22). Оцінка (24) випливає безпосередньо з (36).

Крайова задача з параметром (9)–(11) може бути інтерпретована як сім'я початкових задач для рівнянь зі "збуреною" правою частиною. А саме, розглянемо наступну задачу Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t) + w, \lambda_1, \lambda_2) + \mu,\ t \in [0,T], \tag{38}$$

$$x(0) = z = (h(\lambda_1, \lambda_2,\ x_2(0) + w_2, ..., x_n(0) + w_n) - w_1, u_2, u_3, ..., u_n), \tag{39}$$

де $\mu \in \mathbb{R}^n,\ z \in D_\beta,\ w \in \Omega,\ \lambda_k \in I_k\ (k = 1, 2)$ — параметри.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Розв'язок* $x = x(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ *задачі Коші* (38), (39) *задовольняє крайові умови* (10), (11) *тоді і тільки тоді, коли*

$$\mu = \Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2), \tag{40}$$

де відображення $\Delta : \Omega \times U \times I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}^n$ *визначене в* (23).

Доведення. Згідно теореми Пікара-Ліндельофа легко показати, що умова Ліпшіца (4) означає, що початкова задача (38), (39) має єдиний розв'язок для всіх

$$(\mu, w, u, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^n \times \Omega \times U \times I_1 \times I_2.$$

Як випливає з доведення теореми 1, для кожного фіксованого

$$(w, u, \lambda_1, \lambda_2) \in \Omega \times U \times I_1 \times I_2 \tag{41}$$

гранична функція (20) послідовності (17) задовольняє інтегральне рівняння (21) та, крім того, $x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ задовольняє крайовим умовам (10), (11). Тобто, функція $x = x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ вигляду (20) є розв'язком задачі

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t) + w, \lambda_1, \lambda_2) + \Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2),\ t \in [0, T], \tag{42}$$

$$x(0) = (h(\lambda_1, \lambda_2,\ x_2(0) + w_2, ..., x_n(0) + w_n) - w_1, u_2, u_3, ..., u_n), \tag{43}$$

де $\Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ задане в (23). Отже, (42), (43) співпадає з (38), (39) при умові

$$\mu = \Delta(w, u, \lambda_1, \lambda_2) = -\tfrac{1}{T}\left[\left(B^{-1}A + I_n\right) z + \int\limits_0^T f\left(s, x(s) + w, \lambda_1, \lambda_2\right) ds\right]. \tag{44}$$

Той факт, що функція (20) не є розв'язком (38), (39) ні при яких інших значеннях μ, що не дорівнюють (44), є очевидним, наприклад, з (40).

Вияснимо зв'язок розв'язку $x = x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ модифікованої задачі (21), (10), (11) з розв'язком задачі (9)–(11).

Теорема 3. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *тоді функція* $x^*(t, w, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2)$ *є розв'язком крайової задачі з параметром* (9) – (11) *тоді і тільки тоді, коли четвірка*

$$\{w, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2\} \in \Omega \times U \times I_1 \times I_2 \tag{45}$$

задовольняє систему визначальних рівнянь

$$\left[B^{-1}A + I_n\right] z + \int\limits_0^T f\left(s, x^*(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2\right) ds = 0, \tag{46}$$

де z *задане* (43), *а* w *і* λ_2 *розглядаються як параметри.*

Доведення. Достатньо застосувати теорему 2 і відмітити, що диференціальне рівняння (42) співпадає з (9) тоді і тільки тоді, коли четвірка (45) задовольняє рівняння

$$\Delta(w, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2) = 0, \tag{47}$$

тобто, коли виконується рівність (46), де w і λ_2 розглядаються як параметри.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді для того, щоб функція*

$$y^*(t) = x^*(t, w^*, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) + w^* \tag{48}$$

була розв'язком параметризованої крайової задачі (1) − (3) *необхідно і достатньо, щоб четвірка*

$$\{w^*, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*\} \tag{49}$$

задовольняла систему визначальних алгебраїчних рівнянь

$$g(z + w, -B^{-1}Az + w, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \tag{50}$$

де

$$z = (h(\lambda_1^*, \lambda_2^*,\ u_2^* + w_2^*, ..., u_n^* + w_n^*) - w_1^*, u_2^*, u_3^*, ..., u_n^*), \tag{51}$$

а пара $\{u^*, \lambda_1^*\}$ *є розв'язком системи* (46) *з параметрами* w *і* λ_2.

Доведення. Як було встановлено в третьому параграфі, задача (1)–(3) еквівалентна сім'ї крайових задач (9)–(11), яка розглядається разом з визначальним рівнянням (12). Векторний параметр z в (51) може бути інтерпретований, як початкове значення при $t = 0$ можливого розв'язку задачі (9)–(11). Тому рівняння (12) допускає запис у вигляді (50). Взявши до уваги заміну змінних (5) та еквівалентність (1)–(3) до (9)–(11), (12), відмітимо, що функція $y^*(t)$ в (48) співпадає з розв'язком крайової задачі (1)–(3) тоді і тільки тоді, коли $w = w^*$, $\lambda_2 = \lambda_2^*$ задовольняють рівняння (50).

Наслідок 1. *При виконанні умов теореми* 1, *функція* $y^*(t)$ *вигляду* (48) *буде розв'язком параметризованої задачі* (1) − (3) *тоді і тільки тоді, коли четвірка* (49) *задовольняє систему визначальних рівнянь*

$$\begin{gathered}
[B^{-1}A + I_n]\, z + \int_0^T f\,(s, x^*(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2)\, ds = 0, \\
g(z + w, -B^{-1}Az + w, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \\
z = (h(\lambda_1, \lambda_2,\ u_2 + w_2, ..., u_n + w_n) - w_1, u_2, u_3, ..., u_n)),
\end{gathered} \tag{52}$$

яка містить $2n + 1$ *скалярних алгебраїчних рівнянь, де* $x^*(t, w, u, \lambda_1, \lambda_2)$ *задана* (20).

Доведення. Достатньо застосувати теорему 3 і теорему 4.

Зауваження 1. *На практиці зручно зафіксувати деякий номер ітерації* m *та замість* (52) *розглядати "наближену визначальну систему"*

$$\begin{gathered}
[B^{-1}A + I_n]\, z + \int_0^T f\,(s, x_m(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w, \lambda_1, \lambda_2)\, ds = 0, \\
g(z + w, -B^{-1}Az + w, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \\
z = (h(\lambda_1, \lambda_2,\ u_2 + w_2, ..., u_n + w_n) - w_1, u_2, u_3, ..., u_n).
\end{gathered} \tag{53}$$

У випадку, коли система (53) має відокремлені корені, наприклад,

$$w = w_m,\ u = u_m,\ \lambda_1 = \lambda_{m,1},\ \lambda_2 = \lambda_{m,2}$$

у деякій відкритій підобласті $\Omega \times U \times I_1 \times I_2$, можна довести, що з деякими додатковими умовами точна визначальна система (52) також має розв'язок

$$w = w^*,\ u = u^*,\ \lambda_1 = \lambda_1^*,\ \lambda_2 = \lambda_2^*.$$

Отже, задана нелінійна крайова задача з параметром (1)–(3) має розв'язок вигляду (48), такий, що

$$x^*(0) = (h(\lambda_1^*, \lambda_2^*,\ u_2^* + w_2^*, ..., u_n^* + w_n^*) - w_1^*, u_2^*, u_3^*, ..., u_n^*) \in D_\beta,$$

$$w^* \in \Omega,\ \lambda_k^* \in I_k\ (k = 1, 2),\ u^* \in U,\ y^* \in G.$$

До того ж, функція

$$y_m(t) = x_m(t, w_m, u_m, \lambda_{m,1}, \lambda_{m,2}) + w_m,\ t \in [0, T], \tag{54}$$

може бути розглянена як "m-те наближення" до точного розв'язку

$$y^*(t) = x^*(t, w^*, u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) + w^*.$$

Для того, щоб довести розв'язність системи (52), можна використати деякі топологічні методи (напр., див. теорему 3.1 в [2]), або методи, орієнтовні на розв'язання нелінійних рівнянь в банаховому просторі [13] (див, напр., теорему 19.2 в [13)]. Тут цю проблему більш детально не розглядаємо.

5. Приклад параметризованої двоточкової крайової задачі. Розглянемо параметризовану крайову задачу другого порядку

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{t}{8}\frac{dy}{dt} + \frac{\lambda_1^2}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \lambda_2 y(t) = \frac{9}{32} + \frac{t^2}{16},\ t \in [0, 1], \tag{55}$$

$$y(0) = \left[\frac{dy(1)}{dt}\right]^2, \tag{56}$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = \frac{dy(1)}{dt} - y(1) - \frac{\lambda_2^2}{4}, \tag{57}$$

$$y(1) = \left[\frac{dy(1)}{dt}\right]^2 + \frac{\lambda_2^2}{2}, \tag{58}$$

яка задовольняє додаткову умову

$$y(0) = \frac{1}{16} + \lambda_1 \left[\frac{dy(0)}{dt}\right]^2. \tag{59}$$

Поклавши $y_1 = y$ і $y_2 = \dfrac{dy}{dt}$ параметризована крайова задача (55)–(59) може бути переписана в вигляді системи (1)–(3) :

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \frac{dy_2}{dt} = \frac{9}{32} + \frac{t^2}{16} + \frac{t}{8}y_2 - \frac{\lambda_1^2}{2}y_2^2 - \lambda_2 y_1, \tag{60}$$

$$y_1(0) = [y_2(1)]^2, y_2(0) = y_2(1) - y_1(1) - \frac{\lambda_2^2}{4}, \tag{61}$$

$$y(1) = [y_2(1)]^2 + \frac{\lambda_2^2}{2}, \tag{62}$$

$$y_1(0) = \frac{1}{16} + \lambda_1 \left[y_2\left(0\right)\right]^2. \tag{63}$$

Припустимо, що задача (60)–(63) розглядається в області

$$\begin{gathered}(t,y,\lambda)\in[0,1]\times G\times[-1,1]\times\left[-\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\right],\\ G=\left\{(y_1,y_2):|y_1|\le 1,\ |y_2|\le\tfrac{3}{4}\right\}.\end{gathered}\tag{64}$$

Можна перевірити, що для задачі (60)–(63), умови (7), (13) і (15) є виконані в області (64) з матрицями

$$A=B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\qquad K=\begin{bmatrix}0&1\\\frac{2}{3}&\frac{7}{8}\end{bmatrix}.$$

Дійсно, згідно теореми Перрона відомо, що найбільше власне значення $\lambda_{\max}(K)$ матриці K, з невід'ємними елементами, є дійсним невід'ємним, і обчислення показують, що $\lambda_{\max}(K)\le\frac{22}{16}$. Крім того, вектори $\delta_G(f)$ і $\beta(y)$ в (14) мають вигляд:

$$\delta_G(f)\le\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{179}{192}\end{bmatrix},\quad \beta(y)=\frac{T}{2}\delta_G(f)+\left|\left(B^{-1}A+I_2\right)y\right|\le\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\\\frac{179}{384}\end{bmatrix}+2\,|y|\,.$$

Заміна (5) приведе задану систему диференціальних рівнянь (60) з додатковою умовою (63) до наступної форми:

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t)+w_2,$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=\frac{9}{32}+\frac{t^2}{16}+\frac{t}{8}(x_2(t)+w_2)-\frac{\lambda_1^2}{2}(x_2(t)+w_2)^2-\lambda_2(x_1(t)+w_1),\tag{65}$$

і

$$x_1(0)=\frac{1}{16}+\lambda_1\left[x_2(0)+w_2\right]^2-w_1.\tag{66}$$

Таким чином, ми звели нелінійну параметризовану крайову задачу (60)–(63) до сім'ї двоточкових параметризованих крайових задач вигляду (9)–(11), тобто, до системи (65), яка розглядається з лінійною умовою

$$x(0)+x(1)=0,\tag{67}$$

а також, з додатковою умовою (66) і алгебраїчною визначальною системою типу (12)

$$x_1(0)+w_1=(x_2(1)+w_2)^2,$$

$$x_2(0)+w_2=(x_2(1)+w_2)-(x_1(1)+w_1)-\frac{\lambda_2^2}{4},$$

$$x_1(1)+w_2=(x_2(1)+w_2)^2+\frac{\lambda_2^2}{2}.$$

Беручи до уваги, згідно умови (10),

$$x(1)=(x_1(1),x_2(1))=-B^{-1}Ax(0)=(-x_1(0),-x_2(0)),$$

визначальна система, отримана вище, запишеться наступним чином:

$$x_1(0)=(-x_2(0)+w_2)^2-w_1,$$

$$2x_2(0) = x_1(0) - w_1 - \frac{\lambda_2^2}{4}, \tag{68}$$
$$-x_1(0) = (-x_2(0) + w_2)^2 + \frac{\lambda_2^2}{2} - w_1.$$

В нашому випадку, внаслідок рівності (16),

$$z = (z_1, z_2) = \left(\frac{1}{16} + \lambda_1 (u_2 + w_2)^2 - w_1, u_2\right), \tag{69}$$

і компоненти рекурентної послідовності (17) для задачі (65) при лінійних крайових умовах (66) матимуть вигляд

$$\begin{gathered} x_{m+1,1}(t, w_1, w_2, u, \lambda_1, \lambda_2) = \left[\tfrac{1}{16} + \lambda_1 (u_2 + w_2)^2 - w_1\right] + \\ + \int_0^t \left[x_{m,2}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_2\right] ds - \\ - t\int_0^1 \left[x_{m,2}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_2\right] ds - 2t\left[\tfrac{1}{16} + \lambda_1 (u_2 + w_2)^2 - w_1\right], \end{gathered} \tag{70}$$

$$\begin{gathered} x_{m+1,2}(t, w_1, w_2, u, \lambda_1, \lambda_2) = u_2 + \int_0^t \left[\tfrac{9}{32} + \tfrac{s^2}{16} + \tfrac{s}{8}\left(x_{m,2}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_2\right) - \right. \\ \left. - \tfrac{\lambda_1^2}{2}\left(x_{m,2}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_2\right)^2 - \lambda_2\left(x_{m,1}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_1\right)\right] ds - \\ - t\int_0^1 \left[\tfrac{9}{32} + \tfrac{s^2}{16} + \tfrac{s}{8}\left(x_{m,2}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_2\right) - \right. \\ \left. - \tfrac{\lambda_1^2}{2}\left(x_{m,2}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_2\right)^2 - \lambda_2\left(x_{m,1}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_1\right)\right] ds - 2tu_2, \end{gathered} \tag{71}$$

де $m = 0, 1, 2, ...,$ і

$$x_0(t, w_1, w_2, u, \lambda) = z = \left(\tfrac{1}{16} + \lambda_1 (u_2 + w_2)^2 - w_1, u_2\right). \tag{72}$$

На основі рівностей (18) і (69) визначальні рівняння (68), які не залежать від кількості ітерацій, можуть бути записані таким чином:

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{16} + \lambda_1 (u_2 + w_2)^2 = (w_2 - u_2)^2, \\ 2u_2 = \tfrac{1}{16} + \lambda_1 (u_2 + w_2)^2 - 2w_1 - \tfrac{\lambda_2^2}{4}, \\ \tfrac{1}{16} + \lambda_1 (u_2 + w_2)^2 = 2w_1 - (w_2 - u_2)^2 - \tfrac{\lambda_2^2}{2}. \end{gathered} \tag{73}$$

Система наближених визначальних рівнянь, залежна від кількості ітерацій, яка отримується з першого рівняння системи (53) разом з (69), запишеться в компонентному вигляді

$$\begin{gathered} 2\left[\tfrac{1}{16} + \lambda_1 (u_2 + w_2)^2 - w_1\right] + \int_0^1 \left[x_{m,2}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_2\right] ds = 0, \\ 2u_2 + \int_0^1 \left[\tfrac{9}{32} + \tfrac{s^2}{16} + \tfrac{s}{8}\left(x_{m,2}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_2\right) - \right. \\ \left. - \tfrac{\lambda_1^2}{2}\left(x_{m,2}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_2\right)^2 - \lambda_2\left(x_{m,1}(s, w, u, \lambda_1, \lambda_2) + w_1\right)\right] ds = 0. \end{gathered} \tag{74}$$

Таким чином, для кожного $m \geq 1$, маємо п'ять рівнянь (73), (74), розв'язуючи які, можемо знайти значення п'ятьох невідомих $w_1,\ w_2,\ u_2$ and $\lambda_1,\ \lambda_2$.

На основі (70) і (71), як результат першої ітерації, маємо

$$x_{1,1}(t,w_1,w_2,u,\lambda_1,\lambda_2) = \tfrac{1}{16} + \lambda_1 u_2^2 + 2\lambda_1 u_2 w_2 + \lambda_1 w_2^2 - w_1 - \tfrac{1}{8}t - 2\lambda_1 t u_2^2$$
$$-4\lambda_1 t u_2 w_2 - 2\lambda_1 t w_2^2 + 2tw_1, \tag{75}$$
$$x_{1,2}(t,w_1,w_2,u,\lambda_1,\lambda_2) = u_2 + \tfrac{1}{48}t^3 + \tfrac{1}{16}t^2 u_2 + \tfrac{1}{16}t^2 w_2 - \tfrac{1}{48}t - \tfrac{33}{16}u_2 t - \tfrac{1}{16}w_2 t.$$

Розв'язуючи систему, відповідну (73), (74), на основі першої ітерації (75), отримаємо в заданій області наступні розв'язки :

$$\begin{gathered} w_{1,1} \approx 0.1321789121, \quad w_{1,2} \approx 0.1921525404 \quad u_{1,2} \approx -0.1081104842, \\ \lambda_{1,1} \approx 3.915846059, \quad \lambda_{1,2} \approx 0.4099806246. \end{gathered} \tag{76}$$

Зауважимо, що є й інші розв'язки в інших областях.

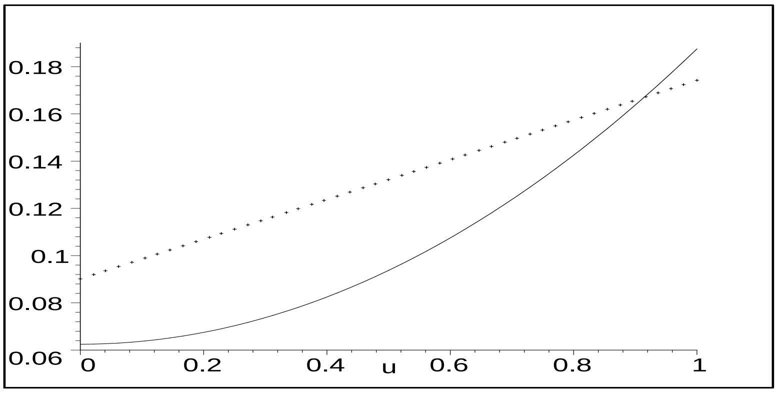
Таким чином, перша та друга компоненти першої апроксимації розв'язку, згідно (54), запишуться таким чином

$$\begin{gathered} y_{1,1}(t) \approx x_{1,1}(t, w_{1,1}, w_{1,2}, u_{1,2}, \lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}) + w_{1,1} \approx \\ \approx 0.09015788390 + 0.08404205646t, \\ y_{1,2}(t) \approx x_{1,2}(t, w_{1,1}, w_{1,2}, u_{1,2}, \lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}) + w_{1,2} \approx \\ \approx 0.02083333333t^3 + .5252628518 \cdot 10^{-2} t^2 + 0.1901350066t + 0.08404205620. \end{gathered} \tag{77}$$

Відмітимо, що задана параметризована крайова задача має точний розв'язок

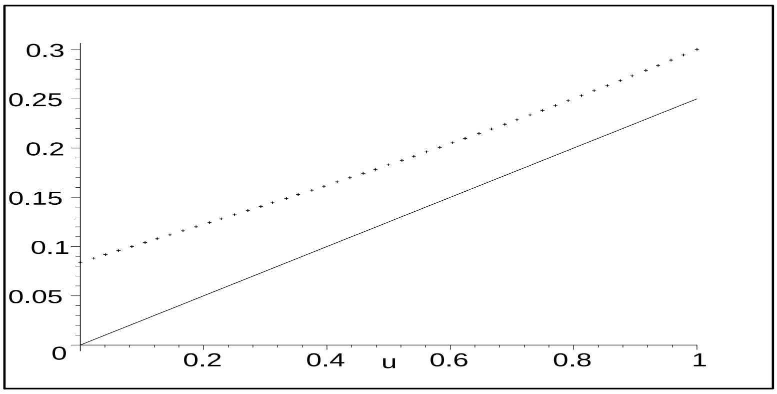
$$\left\{ y^*(t) = \tfrac{t^2}{8} + \tfrac{1}{16}, \quad \lambda_1 = \lambda_1^* = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_2^* = \tfrac{1}{2} \right\}. \tag{78}$$

На рисунках 1 і 2 зображені графіки, відповідно, першої та другої компонент точного розв'язку (78) (суцільна лінія) і їх „першого наближення"(77) (пунктир). Компоненти відхилення „першого наближення" (77) від розв'язку (78), тобто функції $y_{1,1}(t) - y_1^*(t),\ \ y_{1,2}(t) - y_2^*(t)$, показані, відповідно, на рисунках 3 і 4.

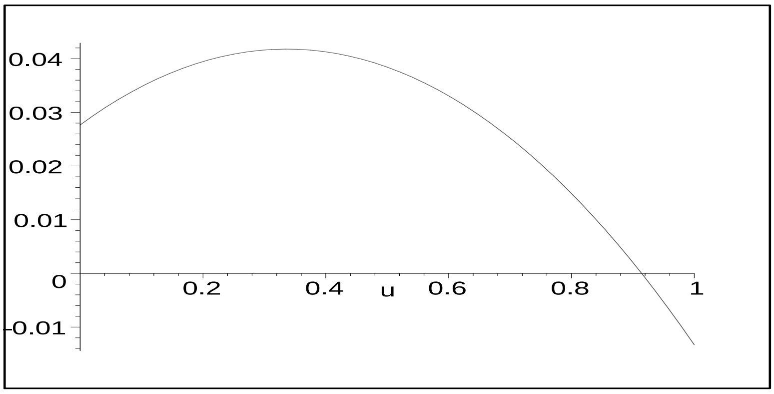


Мал. 1. Перша компонента точного розв'язку і її „перше наближення".

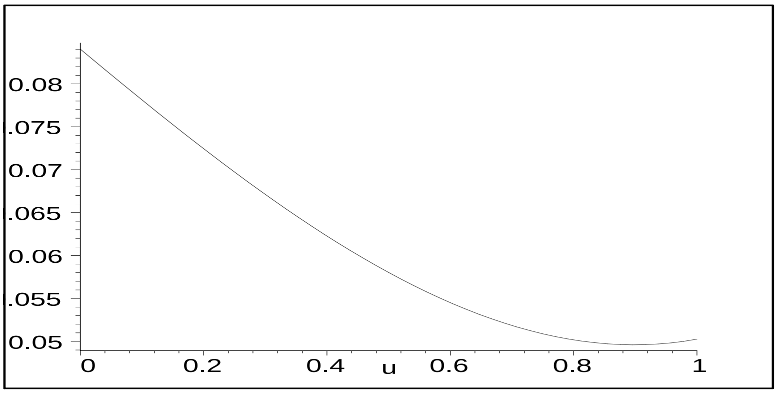
Використовуючи знайдені раніше формули (75), для першої ітерації можна аналогічно побудувати другу ітерацію $x_2(t, w_1, w_2, u, \lambda_1, \lambda_2)$ ($m = 1$ в (70)), на її основі записати відповідну систему рівнянь (73), (74) для знаходження значень $w_1,\ w_2,\ u,\ \lambda_1, \lambda_2$.



Мал. 2. Друга компонента точного розв'язку і її „перше наближення".)



Мал. 3. Похибка першої компоненти „першого наближення" по відношенню до точного розв'язку



Мал. 4. Похибка другої компоненти „першого наближення" по відношенню до точного розв'язку

Остання система, як показують обчислення, має наближений розв'язок

$$w_{2,1} \approx 0.1235204398, \quad w_{2,2} \approx 0.1272653886 \quad u_{2,2} \approx -0.1227653096,$$
$$\lambda_{2,1} \approx 0.7580010453, \quad \lambda_{2,2} \approx 0.4939841687. \tag{79}$$

Підставляючи (79) в $x_2(t, w_1, w_2, u, \lambda_1, \lambda_2)$, отримаємо, згідно (54), „друге наближення", компоненти якого мають вигляд

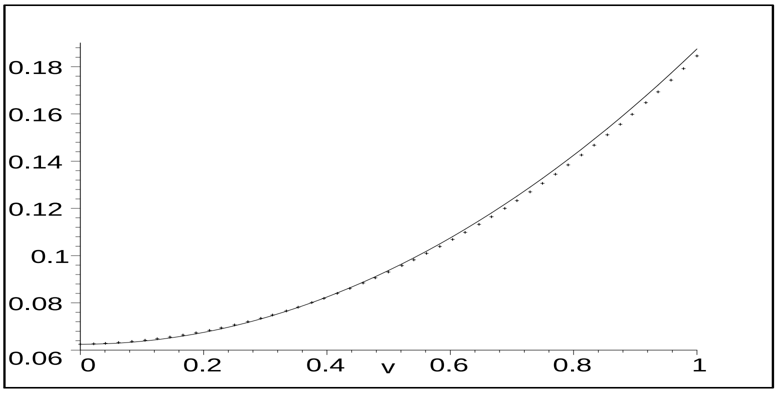
$$\begin{gathered} y_{2,1}(t) \approx x_{2,1}(t, w_{2,1}, w_{2,2}, u_{2,2}, \lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}) + w_{2,1} \approx \\ \approx 0.5208333333 \cdot 10^{-2} t^4 + 0.9375164500 \cdot 10^{-4} t^3 + \\ +0.1122080154 t^2 + 0.4500079031 \cdot 10^{-2} t + 0.06251535007 \end{gathered} \tag{80}$$

і

$$\begin{gathered} y_{2,2}(t) \approx x_{2,2}(t, w_{2,1}, w_{2,2}, u_{2,2}, \lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}) + w_{2,2} \approx \\ \approx -0.1781267314 \cdot 10^{-4} t^7 - 0.5611090500 \cdot 10^{-6} t^6 - \\ -0.1642841178 \cdot 10^{-4} t^5 - 0.1374377495 \cdot 10^{-4} t^4 + 0.2536099376 \cdot 10^{-1} t^3 - \\ -0.3014441759 \cdot 10^{-1} t^2 + 0.2503625892 t + 0.4500079000 \cdot 10^{-2} \end{gathered} \tag{81}$$

відповідно.

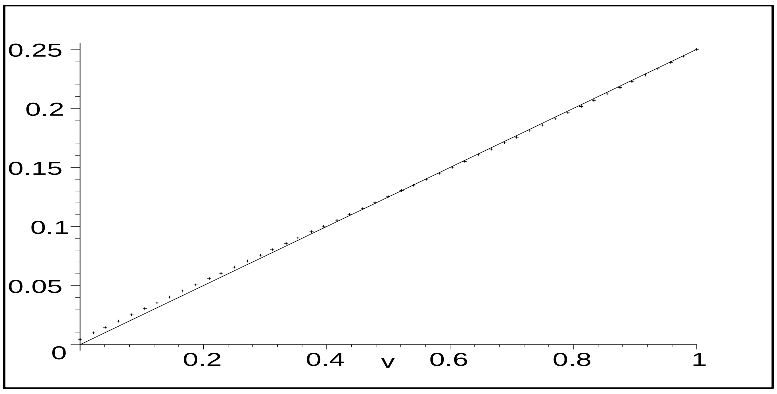
На рисунку 5 показаний графік першої компоненти роз'язку (78) (суцільна лінія) та її „другого наближення" (80) (пунктир). Рисунок 6 містить графік другої компоненти роз'язку (78) (суцільна лінія) та її „другого наближення" (81) (пунктир). Абсолютна похибка для першої компоненти другого наближення не перевищує 0.003 та для другої — 0.0046.



Мал. 5. Перша компонента точного розв'язку і її „друге наближення".

Обчислення показують, що абсолютна похибка побудованих по вказаній схемі третього та четвертого наближень складає 0.0003 та $3.5 \cdot 10^{-5}$, відповідно, для їхніх перших компонент і $9.5 \cdot 10^{-5}$ та $5.2 \cdot 10^{-5}$, відповідно, для других компонент.

1. *Самойленко А. М., Ронто М. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1992. – 279 с.
2. *Ronto M., Samoilenko A. M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. – Singapore.: World Scientific, 2000. – 455 p.
3. *Ронто Н. И., Король И. И.* Исследование и решение краевых задач с параметрами численно-аналитическим методом // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, №8. – С. 1031–1043.



Мал. 6. Друга компонента точного розв'язку і її „друге наближення“.

4. *Ronto M.* On numerical-analytic method for BVPs with parameters // Publ. Univ. of Miskolc. Series D. Natural Sciences. – 1996. – **36**, №2. – P. 125–132.
5. *Ronto M.* On some existence results for parametrized boundary-value problems // Publ.Univ. of Miskolc. Series D. Natural Sciences. – 1997. –**37**. – P. 95–103.
6. *Ronto M., Tégen M.* Numerical-analytic methods for investigating three point boundary-value problems with parameters // Publ. Univ. of Miskolc. Series D. Natural Sciences. – 1999. – **40**.– P. 67–77.
7. *Самойленко А. М., Ле Лыонг Тай.* Об одном методе исследования краевых задач с нелинейными краевыми условиями // Укр. мат. журн. – 1990. **42**, №7. – С. 951–957.
8. *Ronto A. and Rontó M.* On the investigation of some boundary-value problems with non-linear conditions // Mathematical Notes. Miskolc. – 2000. **1**, №1. – P. 43-45.
9. *Ronto A. and Rontó M.* A note on the numerical-analytic method for non-linear two-point boundary-value problems // Nonlinear Oscillations. – 2001. **4**, №1. – P. 112-128.
10. *Rontó M.* On non-linear boundary-value problems containing parameters // Archivum Mathematicum. – Brno, 2000. – Tomus 36. – P. 585–593.
11. *Rontó M.* On the investigation of parametrized non-linear boundary-value problems // Nonlinear Analysis. – 2001. – **47**. – P. 4409–4420.
12. *Ronto M., Shchobak N.* On the numerical-analytic investigation of parametrized problems with nonlinear boundary conditions // Nonlinear Oscillations. – 2003.- **6**, №4. – P. 482-510.
13. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с. English translation: Noordhoff. Groningen, 1972.

Одержано 14.12.2004