УДК 512. 86

Н. В. Юрченко (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО СИЛОВСЬКІ 2-ПІДГРУПИ ГРУПИ $GL(2,\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$

The irreducible Sylow 2-subgrups of the general linear group $GL(n,\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ over some principle ideal domains $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ have been described up to isomorphism.

Описуються з точністю до ізоморфізму незвідні силовські 2-підгрупи групи $GL(2,\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ над деякими кільцями головних ідеалів $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

П. М. Гудивок і В. П. Рудько [1] вияснили, коли силовські p-підгрупи групи $GL(n,\mathbb{Z})$ ізоморфні ($\mathbb{Z}$ — кільце цілих раціональних чисел). В роботі [2] розв'язана задача про спряженість силовських p-підгруп повної лінійної групи $GL(n,R)$ над кільцем головних ідеалів R. В цій роботі одержано також ряд, залежних від p і R, достатніх умов ізоморфізму силовських p-підгруп групи $GL(n,R)$. Ми доповнюємо ці результати для випадку $p=2$ і R — квадратичне кільце.

Нехай просте число d має вигляд

$$d = 16s - 1, \tag{1}$$

де $s > 1$. Кільце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ має $\mathbb{Z}$-базис 1, $\sqrt{d}$.

Група

$$D_4 = \left\langle a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{2}$$

діедра порядку 8 є силовською 2-підгрупою в групах $GL(2,\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$, $GL(2,\mathbb{Q}(\sqrt{d}))$, єдиною, з точністю до спряженості, в останій з цих груп.

Лема 1. *Циклічна порядку 4 група H, що породжена матрицею*

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{d} & -4s \\ 4 & -\sqrt{d} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

буде силовською 2-підгрупою групи $GL(2,Z[\sqrt{d}])$.

Доведення. Нехай це не так і B така матриця із групи $GL(2,\mathbb{Z}[\sqrt{d}])$, що

$$B^2 = E, \quad BA = -AB \tag{4}$$

(це співвідношення в групі D_4 (2)). Тоді

$$\operatorname{tr} B = 0, \quad \det B = -1. \tag{5}$$

Із (5) слідує, що

$$B = \begin{pmatrix} x & u \\ v & -x \end{pmatrix} \quad x, u, v \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]. \tag{6}$$

Із 2-го співвідношення в (4) (див. також (3)) витікає, що $4u = 4sv - 2\sqrt{d}x$, звідки слідує, що $x = 2y$ ($y \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$) і тоді матриця (6) має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 2y & sv - \sqrt{d}y \\ v & -2y \end{pmatrix} \tag{7}$$

Із 2-го співвідношення в (5) витікає, що

$$4y^2 + sv^2 - \sqrt{d}yv = 1 \quad (y, v \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}])). \tag{8}$$

Нехай

$$y = y_1 + y_2\sqrt{d}, \quad v = v_1 + v_2\sqrt{d} \quad (y_j, v_j \in Z). \tag{9}$$

Підставивши (9) в (8) одержимо

$$(4y_1^2 + sdv_2^2 - dy_1v_2) + (4dy_2^2 + sv_1^2 - dv_1y_2) = 1, \tag{10}$$

$$8y_1y_2 + 2sv_1v_2 - y_1v_1 - dy_2v_2 = 0. \tag{11}$$

Ліва частина в (10) — це сума двох квадратичних форм $f_1(y_1, v_2) + f_2(y_2, v_1)$ з матрицями

$$F_1 = \begin{pmatrix} 4 & -d/2 \\ -d/2 & sd \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} s & -d/2 \\ -d/2 & 4d \end{pmatrix}$$

відповідно. Так як $\det F_1 = \det F_2 = d/4$, то обидві ці форми є додатньо визначені і тоді в (10) або

$$f_1(y_1, v_2) = 1, \quad f_2(y_2, v_1) = 0, \tag{12}$$

або

$$f_1(y_2, v_1) = 1, \quad f_2(y_1, v_2) = 0. \tag{13}$$

Із (12) слідує, що $y_2 = v_1 = 0$, а з (13): $y_1 = v_2 = 0$. В обох випадках (11) виконується.

Розглянемо розв'язки рівняння (12):

$$4y_1^2 - dy_1v_2 + s\,d\,v_2^2 = 1 \tag{14}$$

в цілих числах y_1, v_2. Переходячи в (14) до конгруенції по модулю d і враховуючи, що d — просте непарне число, одержимо

$$y_1 = \pm(\frac{d-1}{2} + z\,d) \quad (z \in Z) \quad . \tag{15}$$

Рівняння (14) в декартових координатах y_1, v_2 є рівнянням еліпса, симетричного відносно початку координат і цілком розташованого в крузі $S(O, r)$ з центром в початку координат і радіуса $r = \sqrt{\lambda^{-1}}$, де λ менше із власних значень матриці F_1 . Маємо $\lambda = \frac{4+sd-\sqrt{(4+sd)^2-d}}{2}$. Тоді

$$r = \sqrt{\lambda^{-1}} \leq \sqrt{\frac{2(8+2sd)}{d}} < 1 + \frac{\sqrt{d+1}}{2} < \frac{d-1}{2} \leq |y_1|, \tag{16}$$

де y_1 — будь-яке із чисел в (15). Із (16) витікає, що в крузі $S(O, r)$ нема жодної точки, одна із координат якої співпадала би з y_1 (див. (15)). Отже, рівняння (14) не має розв'язків в цілих числах y_1, v_2.

Розглянемо тепер перше рівняння

$$4dy_2^2 + sv_1^2 - dy_2v_1 = 1 \tag{17}$$

в (13) і покажемо, що воно також не має розв'язків в цілих числах y_2, v_1. Так як d — непарне і $s = \frac{d+1}{16}$, то із (17) слідує, що

$$v_1 = \pm(4 + td) \quad (t \in Z). \tag{18}$$

Менше із власних значень матриці F_2 це $\gamma = \frac{4d+s-\sqrt{(4d+s)^2-d}}{2}$. Враховуючи, що $s = \frac{d+1}{16}$, неважко показати, що $\gamma^{-1} \leq 17$, звідки буде слідувати, що круг $S(O, r_1)$ $(r_1 = \sqrt{\gamma^{-1}})$ містить лише ті точки з координатою v_1 (див. (18)), для яких $v_1 = \pm 4$. Рівняння (17) не має цілочислових розв'язків з $v_1 = \pm 4$. Отже, (12)–(13) в цілих числах v_j, y_i $(1 \leq j, i \leq 2)$ неможливо, тобто матриці B, що задовільняє умови (4), не існує. Лема доведена.

Лема 2. *В умовах леми* 1 *група* H *є незвідною підгрупою в* $GL(2, \mathbb{Z}[\sqrt{d}])$.

Доведення. Матриця А і незвідна над полем $Q(\sqrt{d})$ матриця $a \in D_4$ подібні над полем $Q(\sqrt{d})$.

Теорема 1. *Група* $GL(2, \mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ *містить неізоморфні незвідні силовські* 2*-підгрупи* D_4 *і* H.

Теорема 2. *Нехай* $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ *— кільце головних ідеалів. З точністю до ізоморфізму група* $GL(2, \mathbb{Z}[\sqrt{d}])$ *має точно дві незвідні силовські* 2*-підгрупи — це групи* D_4 *і* H.

Доведення випливає із лем 1–2. Відмітимо при цьому, що в умовах теореми 2 незвідність над кільцем $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ тягне за собою незвідність над полем $Q(\sqrt{d})$.

Прикладами кілець $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, що задовільняють умові теореми 2, є кільця з $d = 31, 47, 127$ (див. [3]). Згідно теореми Діріхле про арифметичні прогресії, існує нескінчено багато простих чисел d виду (1).

1. *Gudivok P. M., Rudko V. P.* On isomorphism of sylow subgroups of the general linear group over the ring of integers // Jornal of Mathematical Sciences. – 2000. – **102**, №3. – P. 20–30.
2. *Гудивок П. М., Рудько В. П., Юрченко Н. В.* О силовских p-подгруппах полной линейной группы над областями главных идеалов // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2001. – Вип. 6. – С. 31–47.
3. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1985. – 504 с.

Одержано 11.10.2004