УДК 519.7

А. Ю. Брила (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ОДНУ УМОВУ ІСНУВАННЯ КРАЙНІХ ТОЧОК ДОПУСТИМОЇ МНОЖИНИ ПАРЕТО-ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ, ЯКІ Є ЇЇ ОПТИМАЛЬНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

It is known, if pareto-lexicographic linear task of multicriterial optimization has the optimum solutions then there is at least one extreme point, which is the vertex of allowable set among them. In paper the possibility of search the optimal solutions, which are the vertexes of this set for pareto-lexicographical linear task of multicriterial optimization by reduction it to a pareto-lexicographical task with criterial function of less dimension is offered.

Відомо [1], якщо парето-лексикографічна лінійна задача багатокритеріальної оптимізації має оптимальні розв'язки то серед них є принаймні одна крайня точка допустимої множини. В даній статті запропонована можливість відшукання оптимальних крайніх точок цієї множини для парето-лексикографічної лінійної задачі багатокритеріальної оптимізації шляхом зведення її до парето-лексикографічної задачі з критеріальною функцією меншої розмірності.

Наперед зауважимо, що робота оформлена мовою, викладеною в книзі [1].

Нехай множина допустимих розв'язків $X \subset \mathbf{R}^n$ парето-лексикографічної задачі визначається системою лінійних обмежень.

Альтернативи порівнюються за допомогою числових оцінок. (Альтернатива $x \in X$ вважається кращою за альтернативу $y \in X$ за кожною з цих оцінок, якщо і тільки якщо значення оцінки в альтернативи x більше за значення цієї оцінки в альтернативи y. Якщо значення оцінки в альтернатив рівні, тоді ці альтернативи вважаються рівноцінними).

Цільова функція $\overline{c}(x)$ в цій задачі визначена так: $\overline{c}(x) = (c_1(x), c_2(x), \ldots, c_q(x))$, де $c_k(x) = (c_{k1}(x), c_{k2}(x), \ldots, c_{kq_k}(x))\,, k = 1, 2, \ldots, q$; c_{ki} — лінійна скалярна функція залежна від n змінних, яка є функцією однієї з числових оцінок. $\widehat{x} \in X$ є оптимальним розв'язком цієї задачі, якщо і тільки якщо не існує допустимого розв'язку $x \in X$, що $\overline{c}(x) >^{PL} \overline{c}(\widehat{x})$ ($>^{PL}$ — знак відношення "парето-лексикографічно більше"). Множину оптимальних розв'язків цієї парето-лексикографічної задачі позначимо через $\widehat{X}(PL)$. Задачу цю коротко записуватимемо так:

$$\max{}^{PL}\overline{c}(x), \quad x \in X. \tag{1}$$

Відомо, якщо X має крайні точки, то серед них існує хоча би одна, яка є оптимальним розв'язком задачі (1). Множину оптимальних розв'язків задачі (1), кожен з яких є крайньою точкою множини X позначатимемо $\widehat{X}^V(PL)$. Для простоти викладу, не порушуючи загальності міркувань, надалі будемо припускати, що $q_1 = q_2 = \ldots = q_q = p$.

Розглянемо наступну паретівську задачу оптимізації:

$$\max{}^{P} f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_d(x)), \quad x \in X, \tag{2}$$

де f_k — лінійні скалярні функції, залежні від n змінних. Припустимо, що задача (2) має оптимальні розв'язки, множину яких позначимо $\widehat{X}$. Нехай $\widehat{X}^V$ — множина оптимальних розв'язків задачі (2), які є крайніми точками допустимої множини X. Тоді має місце наступне твердження, яке легко довести.

Лема 1. *Нехай $d \geqslant n$. Якщо серед функцій $f_k, k = 1, 2, \ldots, d$, є n лінійно незалежних, то для всякого $\widehat{x} \in \widehat{X}^V$ існують додатні числа $\alpha'_k, k = 1, 2, \ldots, d$, такі, що $\widehat{x}$ є єдиним оптимальним розв'язком задачі максимізації функції $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{d} \alpha'_k f_k(x)$ на X.*

Розглянемо наступну задачу лексикографічно-паретівської оптимізації:

$$\max{}^{LP} \overline{c}'(x), \quad x \in X, \tag{3}$$

де $\overline{c}'(x) = \left(c'_1(x), c'_2(x), \ldots, c'_p(x)\right)$, $c'_k(x) = \left(c_{1k}(x), c_{2k}(x), \ldots, c_{qk}(x)\right), k = 1, 2, \ldots, p$. $\widehat{x} \in X$ є оптимальним розв'язком задачі (3), якщо і тільки якщо не існує допустимого розв'язку $x \in X$, що $\overline{c}'(x) >^{LP} \overline{c}'(\widehat{x})$ ($>^{LP}$ — знак відношення "лексикографічно-паретівськи більше"). Нехай $\widehat{X}'(LP)$ — множина оптимальних розв'язків задачі (3), $\widehat{X}'^V(LP)$ — множина оптимальних розв'язків задачі (3), які є крайніми точками допустимої множини.

Розглянемо наступну задачу лексикографічно-паретівської оптимізації:

$$\max{}^{LP} \overline{c}'^r(x), \quad x \in X, \tag{4}$$

де $\overline{c}'^r(x) = (c'_1(x), c'_2(x), \ldots, c'_r(x))$, $c'_k(x) = \left(c_{1k}(x), c_{2k}(x), \ldots, c_{qk}(x)\right), k = 1, 2, \ldots, r$, $1 \leqslant r \leqslant p$. Нехай $\widehat{X}'^r(LP)$ — множина оптимальних розв'язків задачі (4), $\widehat{X}'^{rV}(LP)$ — множина оптимальних розв'язків задачі (4), які є крайніми точками допустимої множини.

Теорема 1. *Нехай $r \cdot q \geqslant n$ $(1 \leqslant r \leqslant p)$. Якщо серед функцій $c_{kj}, k = 1, 2, \ldots, q$, $j = 1, 2, \ldots, r$, є n лінійно незалежних, то $\widehat{X}'^V(LP) = \widehat{X}'^{rV}(LP)$.*

Доведення. Нехай $\widehat{x} \in \widehat{X}'^{rV}(LP)$. Це означає, що не існує такого $y \in X$, що $c'_r(y) >^P c'_r(\widehat{x})$ і $c'_j(y) = c'_j(\widehat{x}), j = 1, 2, \ldots, r-1$ тобто $\widehat{x}$ є оптимальним розв'язком задачі паретівської оптимізації $\max{}^P c'_r(x), x \in X \cap X^{r-1}$, де $X^{r-1} = \{x \in X | c'_1(x) = c'_1(\widehat{x}),$ $c'_2(x) = c'_2(\widehat{x}), \ldots, c'_{r-1}(x) = c'_{r-1}(\widehat{x})\}$. $\widehat{x}$ є також оптимальним розв'язком наступної задачі паретівської оптимізації

$$\max{}^P g(x) = (c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{q1}, c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{q2}, \ldots, c_{1r}, c_{2r}, \ldots, c_{qr}), \quad x \in X \cap X^{r-1}.$$

Оскільки серед функцій c_{kj}, $k = 1, 2, \ldots, q$, $j = 1, 2, \ldots, r$ є n лінійно незалежних то згідно леми 1 існують такі додатні числа α'_{kj}, $k = 1, 2, \ldots, q$, $j = 1, 2, \ldots, r$, при яких $\widehat{x}$ є єдиним оптимальним розв'язком задачі максимізації $\max(\sum\limits_{j=1}^{r-1} \sum\limits_{k=1}^{q} \alpha'_{kj} c_{kj}(x) + $ $+ \sum\limits_{k=1}^{q} \alpha'_{kr} c_{kr}(x))$, $x \in X \cap X^{r-1}$. Отже, $\widehat{x}$ є єдиним оптимальним розв'язком задачі максимізації $\max(\sum\limits_{k=1}^{q} \alpha'_{kr} c_{kr}(x))$, $x \in X \cap X^{r-1}$. Звідси слідує, що не існує такого $y \in X \cap X^{r-1}$ $(y \neq \widehat{x})$, що $c'_r(y) = c'_r(\widehat{x})$ а отже, не існують такі $y \in X$ і l $(r < l \leqslant p)$, що $c'_l(y) >^P c'_l(\widehat{x})$ і $c'_j(y) = c'_j(\widehat{x})$, $j = 1, 2, \ldots, l-1$, тобто $\widehat{x} \in \widehat{X}'^V(LP)$. Отже,

$$\widehat{X}'^{rV}(LP) \subset \widehat{X}'^V(LP) \tag{5}$$

Нехай $\widehat{x} \in \widehat{X}'^V(LP)$. Це означає, що не існують такі $y \in X$ і l $(1 \leqslant l \leqslant p)$, що $\overline{c}'(y) >^{LP} \overline{c}'(\widehat{x})$ а отже, не існують такі $y \in X$ і $l (1 \leqslant l \leqslant r \leqslant p)$, що $\overline{c}'^r(y) >^{LP} \overline{c}'^r(\widehat{x})$, тобто $\widehat{x} \in \widehat{X}'^{rV}(LP)$. Отже,

$$\widehat{X}'^V(LP) \subset \widehat{X}'^{rV}(LP) \tag{6}$$

Тоді, з (5) і (6) слідує $\widehat{X}'^{V}(LP) = \widehat{X}'^{rV}(LP)$. Теорема доведена.

Лема 2. $\widehat{X}'(LP) \subset \widehat{X}(PL)$.

Доведення. Відомо ([1]), що для доведення цієї леми достатньо показати, що порядок, який задається за допомогою відношення $>^{PL}$ для значень векторної функції $\overline{c}(x)$ є підпорядком на X, за правилом віддачі переваги, порядку, який задається відношенням $>^{LP}$ для значень векторної функції $\overline{c}'(x)$.

Нехай $x, y \in X$ — будь-які альтернативи; $\overline{c}(x) >^{PL} \overline{c}(y)$ тобто $c_k(x) \geq^L c_k(y)$, $k = 1, 2, \ldots, q$, і існує t, $1 \leqslant t \leqslant q$, такий, що $c_t(x) >^L c_t(y)$. Нехай $I = \{i | 1 \leqslant i \leqslant q,$ $c_i(x) >^L c_i(y)\}$ а $t_l = \min\{t_i | 1 \leqslant t_i \leqslant p,\ i \in I,\ c_{it_i}(x) > c_{it_i}(y)\}$. В цьому випадку отримаємо, що $c'_{t_l}(x) >^P c'_{t_l}(y)$ і, якщо $t_l > 1$, то $c'_j(x) = c'_j(y)$, $j = 1, 2, \ldots, t_l - 1$, отже, $\overline{c}'(x) >^{LP} \overline{c}'(y)$. Лема доведена.

Розглянемо наступну задачу парето-лексикографічної оптимізації:

$$\max{}^{PL} \overline{c}^r(x), \quad x \in X, \tag{7}$$

де $\overline{c}^r(x) = \left(c_1^r(x), c_2^r(x), \ldots, c_q^r(x)\right)$, $c_k^r(x) = \left(c_{k1}(x), c_{k2}(x), \ldots, c_{kr}(x)\right), k = 1, 2, \ldots, q$, $1 \leqslant r \leqslant p$. Нехай задача (7) має оптимальні розв'язки і $\widehat{X}^{rV}(PL)$ є множиною крайніх точок допустимої множини, які є розв'язками задачі (7). Тоді справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай $r \cdot q \geqslant n$ $(1 \leqslant r \leqslant p)$. Якщо серед функцій c_{kj}, $k = 1, 2, \ldots, q$, $j = 1, 2, \ldots, r$, є n лінійно незалежних, то $\widehat{X}^{rV}(PL) \subset \widehat{X}^{V}(PL)$.*

Доведення. Нехай $\widehat{x} \in \widehat{X}^{rV}(PL)$. Це означає, що $\widehat{x}$ є оптимальним розв'язком наступної задачі паретівської оптимізації:

$$\max{}^{P} g(x) = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1r}, c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2r}, \ldots, c_{q1}, c_{q2}, \ldots, c_{qr}), \quad x \in X.$$

Оскільки серед функцій c_{kj}, $k = 1, 2, \ldots, q$, $j = 1, 2, \ldots, r$, є n лінійно незалежних, то згідно леми 1, існують такі додатні числа α'_{kj}, $k = 1, 2, \ldots, q$, $j = 1, 2, \ldots, r$, при яких $\widehat{x}$ є єдиним оптимальним розв'язком наступної задачі максимізації:

$$\max \left(\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} \alpha'_{kj} c_{kj}(x) \right), \quad x \in X.$$

Отже, не існує такого $y \in X$ $(y \neq \widehat{x})$, що $\overline{c}^r(x) = \overline{c}^r(y)$.

Стосовно $\widehat{x}$ всі альтернативи в задачі (7) можна розбити на такі множини: $X^{\text{н}}$ — множина альтернатив непорівняльних з $\widehat{x}$, $X^{\text{м}}$ — множина альтернатив, які парето-лексикографічно менші за $\widehat{x}$, $X^{\text{р}}$ — множина альтернатив, які рівні з $\widehat{x}$. Всі альтернативи, які належать до множини $X^{\text{н}}$ також будуть непорівняльними альтернативами з $\widehat{x}$ в задачі (1). Всі альтернативи, які належать до множини $X^{\text{м}}$ або будуть парето-лексикографічно меншими за $\widehat{x}$ в задачі (1), або будуть непорівняльними альтернативами з $\widehat{x}$ в задачі (1). Отже, парето-лексикографічно більші альтернативи за $\widehat{x}$ в задачі (1) можуть бути тільки серед альтернатив, які належать до множини $X^{\text{р}}$. Але ж множина $X^{\text{р}}$ складається з однієї альтернативи $\widehat{x}$. Отже, $\widehat{x} \in \widehat{X}^{V}$. Таким чином, $\widehat{X}^{rV}(PL) \subset \widehat{X}^{V}(PL)$. Теорема доведена.

1. *Червак Ю. Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. – 312 с.
2. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

Одержано 26.10.2005