УДК 517.946

А. В. Добриден (Ужгородський нац. ун-т)

МІШАНА ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНОЮ КРАЙОВОЮ УМОВОЮ А. М. НАХУШЕВА

The mix problem with nonlocal boundary condition of A. M. Nakhushev for quazilinear differential equation has been researched and one two-sided method's modification of the approximate integration of this problem has been constructed.

За допомогою монотонного двостороннього методу Зейделя досліджено мішану задачу з нелокальною крайовою умовою А.М. Нахушева для квазілінійного диференціального рівняння, доведено теорему існування та єдиності розв'язку, отримано достатню умову існування знакосталих розв'язків та теорему порівняння.

Розглянемо мішану задачу [1]: в області $B_0 = \{(x,y)|x \in (0,a), y \in (0,b), a,b > 0\}$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\begin{gathered} D^{(2.1)}U(x,y) = F(x,y,U(x,y),D^{(1.0)}U(x,y),D^{(0.1)}U(x,y),D^{(1.1)}U(x,y), \\ D^{(2.0)}U(x,y),U(x,\theta_{(0.0)}(x,y)),D^{(1.0)}U(x,\theta_{(1.0)}(x,y)),D^{(0.1)}U(x,\theta_{(0.1)}(x,y)), \\ D^{(1.1)}U(x,\theta_{(1.1)}(x,y)),D^{(2.0)}U(x,\theta_{(2.0)}(x,y))), \end{gathered} \tag{1}$$

який задовольняє умови

$$\begin{gathered} U(x,0) = T(x),\ x \in [0,a], \quad D^{(1.0)}U(a,y) = \Psi(y), \\ \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{a} U(\xi,y)d\xi = \Omega(y),\ y \in [0,b],\ 0 \le x_0 \le x < a, \end{gathered} \tag{2}$$

де $D^{(k_1,k_2)}U : B_0 \to B_{(k_1,k_2)} \subset R$, $F : D \to R$, $k_1 = \overline{0,2}$, $k_2 = 0,1$, $D = B_0 \times \prod\limits_{k_1,k_2} B_{(k_1,k_2)} \times \times \prod\limits_{k_1,k_2} B_{(k_1,k_2)}$, $D \subset R^{12}$, $\theta_{(k_1,k_2)}(x,y) = y - \mu_{(k_1,k_2)}(x,y)$, $\mu_{(k_1,k_2)}(x,y) \ge 0$ — відомі неперервні функції в області $\overline{B}_0$, які визначають початкові множини

$$\overline{E}_{(k_1,k_2)} = \{(\bar{x},\bar{y})|\bar{x} \in [0,a], y - \mu_{(k_1,k_2)}(x,y) \le \bar{y} \le 0, (x,y) \in \overline{B}_0\}.$$

Нехай $\overline{E} = \bigcup\limits_{k_1,k_2} \overline{E}_{(k_1,k_2)}$ і

$$U(x,y)|_{\overline{E}} = H(x,y), \tag{3}$$

де $H(x,y)$ — відома функція з простору $C^{(2.1)}(\overline{E})$, яка задовольняє умову $H(x,0) = = T(x), x \in [0,a]$.

Розв'язок мішаної задачі (1)–(3), який належить простору $C^{(2.1)}(B_0) \bigcap C^{(1.1)}(\overline{B}_0)$, будемо називати регулярним.

Надалі будемо вважати, що $T(x) \in C^2[0,a]$, $\Psi(y) \in C^1[0,b]$, $\Omega(y) \in C[0,b]$, виконуються умови узгодженості $T'(a) = \Psi(0)$, а $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$ (див. [2]), де $C_1(\overline{D})$ — простір функцій, які задовольняють наступні умови:

1) $F[U(x,y)] \in C(\bar{D})$;

2) функцію $F[U(x,y)]$ можна подати у вигляді $F[U(x,y)] \equiv f[U^+(x,y);\ U^-(x,y)]$, $f : D_1 \to R$, $D_1 \subset R^{22}$, таким чином, що для довільних функцій $Z(x,y)$, $V(x,y)$, $Z^*(x,y)$, $V^*(x,y)$, які належать області $\overline{D}_1$ і задовольняють нерівності

$$D^{(k_1,k_2)}(Z^*(x,y) - Z(x,y)) \ge (\le)0, \quad D^{(k_1,k_2)}(V^*(x,y) - V(x,y)) \le (\ge)0, \\ k_1 = 0,2,\ (k_1 = 1),\ k_2 = 0,1, \tag{4}$$

виконується умова

$$f[Z^*(x,y); V^*(x,y)] \ge f[Z(x,y); V(x,y)]; \tag{5}$$

3) для довільних функцій $Z(x,y)$, $V(x,y)$, $Z^*(x,y)$, $V^*(x,y)$, , які належать області $\overline{D}_1$, $f[U^+(x,y);\ U^-(x,y)]$ задовольняє умову Ліпшіца зі сталою K:

$$|f[Z^*(x,y); V^*(x,y)] - f[Z(x,y); V(x,y)]| \le \\ \le K \sum_{k_1,k_2} (D^{(k_1,k_2)}|Z(x,y) - Z^*(x,y)| + D^{(k_1,k_2)}|V(x,y) - V^*(x,y)| + \\ + D^{(k_1,k_2)}|Z(x,\theta_{(k_1,k_2)}(x,y)) - Z^*(x,\theta_{(k_1,k_2)}(x,y))| + \\ + D^{(k_1,k_2)}|V(x,\theta_{(k_1,k_2)}(x,y)) - V^*(x,\theta_{(k_1,k_2)}(x,y))|).$$

Подамо мішану задачу (1)–(3) в еквівалентній інтегральній формі. Для цього проінтегруємо рівняння (1) два рази по x від x до a, по y від 0 до y та врахуємо умови (2), (3), отримаємо

$$U(x,y) = \begin{cases} H(x,y),\ (x,y) \in \overline{E}, \\ S(x,y) + T_1F[U(t,\eta)] - T_2[U(t,\eta)],\ (x,y) \in \overline{B}_0, \end{cases}$$

де

$$S(x,y) = T(x) + \tfrac{1}{a-x_0} \int_0^y \Omega(\eta)d\eta + (\tfrac{a-x_0}{2} - a + x)(\Psi(y) - \Psi(0)),$$
$$T_1F[U(t,\eta)] = \int_0^y \int_x^a (t-x)F[U(t,\eta)]dtd\eta,$$
$$T_2F[U(t,\eta)] = \tfrac{1}{a-x_0} \int_0^y \int_{x_0}^a \int_\xi^a (t-\xi)F[U(\xi,\eta)]d\xi dtd\eta.$$

Відмітимо, що підстановкою

$$U^*(x,y) = \begin{cases} U(x,y) - H(x,y),\ (x,y) \in \overline{E}, \\ U(x,y) - S(x,y),\ (x,y) \in \overline{B}_0 \end{cases}$$

задача (1)–(3) зводиться до задачі з однорідними умовами (2), (3). Тому надалі, не зменшуючи загальності міркувань, будемо вважати, що $T(x) = \Psi(y) = \Omega(y) = H(x,y) = 0$.

Позначимо

$$\overline{Z}_p(x,y) = Z_p(x,y) - d_p(x,y)W_p(x,y),$$
$$\overline{V}_p(x,y) = V_p(x,y) + d_p(x,y)W_p(x,y),$$
$$f^{*,p} = f[Z_p(x,y); V_p(x,y)], \quad f_p^* = f[V_p(x,y); Z_p(x,y)],$$
$$\overline{f}^p = f[Z_{p+1}(x,y); \overline{V}_p(x,y)], \quad \overline{f}^{*,p} = f[\overline{Z}_p(x,y); \overline{V}_p(x,y)],$$
$$\overline{f}_p = f[\overline{V}_p(x,y); Z_{p+1}], \quad \overline{f}_p^* = f[\overline{V}_p(x,y); \overline{Z}_p(x,y)]$$

$$\begin{gathered}\alpha_p(x,y) = D^{(2.1)}Z_p(x,y) - f^{*,p}, \quad \beta_p(x,y) = D^{(2.1)}V_p(x,y) - f_p^*, \\ \Sigma_p(x,y) = Z_p(x,y) - T_1 f^{*,p} + T_2 f_p^*, \quad \Omega_p(x,y) = V_p(x,y) - T_1 f_p^* + T_2 f^{*,p},\end{gathered} \tag{6}$$

$p = 0, 1, 2, ...,$ $d_p(x,y)$ — довільні з простору $C^{(2.1)}(B_0) \bigcap C^{(1.1)}(\overline{B}_0)$ функції, що задовольняють умови

$$\begin{gathered}D^{(k_1,k_2)}d_p(x,y) \geq (\leq) 0, \quad k_1 = 0, 2 \ (k_1 = 1), \ k_2 = 0, 1, \\ \sup_{\overline{B_0}} |D^{(k_1,k_2)}d_p(x,y)| \leq 0.5.\end{gathered} \tag{7}$$

Означення 1. *Довільні з простору* $C^{(2.1)}(B_0) \cap C^{(1.1)}(\overline{B}_0)$ *функції* $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$, *які в області задовольняють умови* (2), (3) *і нерівності*

$$\begin{gathered}D^{(k_1,k_2)}W_0(x,y) \geq (\leq) 0, \quad D^{(k_1,k_2)} \textstyle\sum_0(x,y) \geq (\leq) 0, \\ D^{(k_1,k_2)}\Omega_0(x,y) \leq (\geq) 0, \quad k_1 = 0, 2 \ (k_1 = 1), \ k_2 = 0, 1,\end{gathered}$$

називаються функціями порівняння задачі (1)–(3).

Побудуємо послідовності функцій $Z_p(x,y)$, $V_p(x,y)$ згідно формул

$$\begin{gathered}Z_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, \ (x,y) \in \overline{E}, \\ T_1 \left(\overline{f}^{*,p} - c_p(t,\eta)\overline{\alpha}_p(t,\eta) \right) - \\ -T_2 \left(\overline{f}_p^* - c_p(t,\eta)\overline{\beta}_p(t,\eta) \right), \ (x,y) \in \overline{B}_0, \end{cases} \\ V_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, (x,y) \in \overline{E}, \\ T_1 \left(\overline{f}_p^* - c_p(t,\eta)\overline{\beta}_p(t,\eta) \right) - \\ -T_2 \left(\overline{f}^{*,p} - c_p(t,\eta)\overline{\alpha}_p(t,\eta) \right), \ (x,y) \in \overline{B}_0, \end{cases}\end{gathered} \tag{8}$$

де за нульове наближення вибираємо довільні функції порівняння задачі (1)–(3), а

$$\overline{\alpha}_p(x,y) = \overline{Z}_p(x,y) - f^{*,p}, \quad \overline{\beta}_p(x,y) = \overline{V}_p(x,y) - f_p^*,$$

$c_p(x,y)$ — довільні невід'ємні з простору $C(\overline{B}_0)$ функції, що задовольняють нерівності

$$\sup_{\overline{B}_0} c_p(x,y) \leq 1. \tag{9}$$

Покажемо, що множина функцій нульового наближення непорожня. Дійсно, оскільки $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$, то існують такі сталі M і m, що

$$M = \sup_{\overline{D}} f[U^+(x,y); U^-(x,y)], \quad m = \inf_{\overline{D}} f[U^-(x,y); U^+(x,y)],$$

Покладемо при $(x,y) \in \overline{B}_0$

$$\begin{gathered}Z_0(x,y) = T_1 M - T_2 m = \tfrac{y}{2} \left(M(a-x)^2 - m\tfrac{(a-x_0)^2}{3} \right), \\ V_0(x,y) = T_1 m - T_2 M = \tfrac{y}{2} \left(m(a-x)^2 - M\tfrac{(a-x_0)^2}{3} \right),\end{gathered} \tag{10}$$

Маємо

$$\begin{gathered}W_0(x,y) = (T_1 + T_2)(M - m) = \tfrac{y}{2} \left((a-x)^2 - \tfrac{(a-x_0)^2}{3} \right) (M - m) \geq 0, \\ \Sigma_0(x,y) = Z_0(x,y) - T_1 f^{*,0} + T_2 f_0^* = T_1(M - f^{*,0}) - T_2(m - f_0^*) \geq 0, \\ \Omega_0(x,y) = V_0(x,y) - T_1 f_0^* + T_2 f^{*,0} = T_1(m - f_0^*) - T_2(M - f^{*,0}) \leq 0,\end{gathered}$$

а, отже, $D^{(k_1,k_2)}\Sigma_0(x,y) \geq (\leq)0$, $D^{(k_1,k_2)}\Omega_0(x,y) \leq (\geq)0$, $D^{(k_1,k_2)}W_0(x,y) \geq (\leq)0$, $k_1 = 0,2$ ($k_1 = 1$), $k_2 = 0,1$, тобто функції (10) є функціями порівняння мішаної задачі (1)–(3), якщо вони належать області $\overline{D}_1$. З формул (6), (8) маємо

$$\overline{Z}_p(x,y) - Z_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, \ (x,y) \in \overline{E}, \\ \overline{\Sigma}_p(x,y) + T_1\left(c_p(t,\eta)\overline{\alpha}_p(t,\eta)\right) - \\ -T_2\left(c_p(t,\eta)\overline{\beta}_p(t,\eta)\right), \ (x,y) \in \overline{B}_0, \end{cases}$$
$$\overline{V}_p(x,y) - V_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, \ (x,y) \in \overline{E}, \\ \overline{\Omega}_p(x,y) + T_1\left(\overline{f}^{*,p} - \overline{f}_p + c_p(t,\eta)\overline{\beta}_p(t,\eta)\right) - \\ -T_2\left(\overline{f}_p^{*} - \overline{f}^{p} - c_p(t,\eta)\overline{\alpha}_p(t,\eta)\right), \ (x,y) \in \overline{B}_0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \alpha_{p+1}(x,y) = \overline{f}^{*,p} - f^{*,p+1} - c_p(x,y)\overline{\alpha}_p(x,y), \\ \beta_{p+1}(x,y) = \overline{f}_p^{*} - f_{p+1}^{*} - c_p(x,y)\overline{\beta}_p(x,y), \end{gathered} \tag{12}$$

$$\Sigma_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, \ (x,y) \in \overline{E}, \\ T_1\alpha_{p+1}(t,\eta) - T_2\left(\beta_{p+1}(t,\eta) + f_p^{*} - f_p\right), \ (x,y) \in \overline{B}_0, \end{cases}$$
$$\Omega_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, \ (x,y) \in \overline{E}, \\ T_1\beta_{p+1}(t,\eta) - T_2\left(\alpha_{p+1}(t,\eta) + f^{p} - f^{*,p}\right), \ (x,y) \in \overline{B}_0, \end{cases} \tag{13}$$

$$W_{p+1}(x,y) = \Sigma_{p+1}(x,y) - \Omega_{p+1}(x,y) + (T_1 + T_2)(f^{*,p+1} - f_{p+1}^{*}). \tag{14}$$

Нехай $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$ – довільні функції порівняння задачі (1)–(3). Виберемо функцію $d_0(x,y)$ таким чином, щоб в області $\overline{B}_0$ мали місце нерівності

$$\begin{gathered} D^{(k_1,k_2)}\overline{\Sigma}_0(x,y) = D^{(k_1,k_2)}\left(\overline{Z}_0(x,y) - T_1\overline{f}^{*,0} + T_2 f_0^{*}\right) \geq (\leq)0, \\ D^{(k_1,k_2)}\overline{\Omega}_0 = D^{(k_1,k_2)}\left(\overline{V}_0(x,y) - T_1\overline{f}_0^{*} + T_2 f^{*,0}\right) \leq (\geq)0, \\ k_1 = 0,2 \ (k_1 = 1), \ k_2 = 0,1. \end{gathered} \tag{15}$$

Тоді з (11) маємо

$$\begin{gathered} D^{(k_1,k_2)}\left(\overline{Z}_0(x,y) - Z_1(x,y)\right) = D^{(k_1,k_2)}\overline{\Sigma}_0(x,y) \geq (\leq)0, \\ D^{(k_1,k_2)}\left(\overline{V}_0(x,y) - V_1(x,y)\right) = \\ = D^{(k_1,k_2)}\left(\overline{\Omega}_0(x,y) + T_1\left(\overline{f}_0^{*} - \overline{f}_0\right) - T_2\left(\overline{f}^{*,0} - \overline{f}^{0}\right)\right) \geq (\leq)0, \\ k_1 = 0,2 \ (k_1 = 1), \ k_2 = 0,1, \end{gathered}$$

оскільки, враховуючи (4), (5), (7), $\overline{f}_0^{*} - \overline{f}_0 \leq 0$, $\overline{f}^{*,0} - \overline{f}^{0} \geq 0$. Виберемо функцію $c_0(x,y)$ так, щоб в області $\overline{B}_0$ виконувалися нерівності $\alpha_1(x,y) \geq 0$, $\beta_1(x,y) \leq 0$. Враховуючи (13), (14), отримаємо $D^{(k_1,k_2)}\Sigma_1(x,y) \geq (\leq)0$, $D^{(k_1,k_2)}W_1(x,y) \geq (\leq)0$, $D^{(k_1,k_2)}\Omega_1(x,y) \leq (\geq)0$, отже,

$$\begin{gathered} D^{(k_1,k_2)}V_0(x,y) \leq (\geq)D^{(k_1,k_2)}V_1(x,y) \leq (\geq) \\ \leq (\geq)D^{(k_1,k_2)}Z_1(x,y) \leq (\geq)D^{(k_1,k_2)}Z_0(x,y), \ k_1 = 0,2 \ (k_1 = 1), \ k_2 = 0,1. \end{gathered}$$

Приймаючи функції $Z_1(x,y)$ та $V_1(x,y)$ за вихідні та повторюючи попередні міркування, методом математичної індукції переконуємося, що якщо на кожному кроці ітерації функції $c_p(x,y)$ і $d_p(x,y)$ вибирати таким чином, щоб виконувалися умови (7), (9) і нерівності

$$\begin{gathered} D^{(k_1,k_2)}\overline{\Sigma}_p(x,y) \geq (\leq) 0, \quad D^{(k_1,k_2)}\overline{\Omega}_p(x,y) \leq (\geq) 0, \\ \overline{f}^{*,p} - f^{*,p+1} - c_p(x,y)\alpha_p(x,y) \geq 0, \quad \overline{f}_p - f^*_{p+1} - c_p(x,y)\beta_p(x,y) \leq 0, \end{gathered} \tag{16}$$

то в області $\overline{B}_0$ справедливі нерівності

$$\begin{gathered} D^{(k_1,k_2)}V_p(x,y) \leq (\geq) D^{(k_1,k_2)}V_{p+1}(x,y) \leq (\geq) D^{(k_1,k_2)}Z_{p+1}(x,y) \leq (\geq) D^{(k_1,k_2)}Z_p(x,y), \\ D^{(k_1,k_2)}\Sigma_p(x,y) \geq (\leq) 0, \quad D^{(k_1,k_2)}\Omega_p(x,y) \leq (\geq) 0, \quad k_1 = 0,2 \ (k_1 = 1), \ k_2 = 0,1, \end{gathered} \tag{17}$$

для довільних $p \in N$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай права частина рівняння* (1) $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$ *і існують функції порівняння мішаної задачі* (1)–(3) $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$. *Тоді якщо на кожному кроці ітерації функції* $d_p(x,y)$, $c_p(x,y)$, *які задовольняють умовам* (7), (9), *вибирати таким чином, щоб в області* $\overline{B}_0$ *виконувалися нерівності* (16), *то:*

1) *при* $2KRqN < 1$ *послідовності функцій* $\{Z_p(x,y)\}$, $\{V_p(x,y)\}$, *побудовані за законом* (8), *збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного регулярного розв'язку задачі* (1)–(3);
2) *в області* $\overline{D}$ *справедливі нерівності*

$$\begin{gathered} D^{(k_1,k_2)}V_{p-1}(x,y) \leq (\geq) D^{(k_1,k_2)}V_p(x,y) \leq (\geq) D^{(k_1,k_2)}U(x,y) \leq (\geq) \\ \leq (\geq) D^{(k_1,k_2)}Z_p(x,y) \leq (\geq) D^{(k_1,k_2)}Z_{p-1}(x,y), \ k_1 = 0,2 \ (k_1 = 1), \ k_2 = 0,1; \end{gathered} \tag{18}$$

3) *збіжність алгоритму* (8) *не повільніша збіжності методу Пікара.*

Доведення. Покажемо спочатку, що послідовності функцій $\{Z_p(x,y)\}$, $\{V_p(x,y)\}$, побудовані за законом (8), збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного регулярного розв'язку задачі (1)–(3). Враховуючи нерівності (17), для цього достатньо показати, що $\lim\limits_{p\to\infty} D^{(k_1,k_2)}W_p(x,y) = 0$, $(x,y) \in \overline{B}_0$.

Маємо

$$\begin{gathered} D^{(2.1)}W_{p+1}(x,y) = \overline{f}^{*,p} - \overline{f}_p - c_p(x,y)(\alpha_p(x,y) - beta_p(x,y)) \leq \overline{f}^{*,p} - \overline{f}^*_p \leq \\ \leq 2K \sum_{k_1,k_2} \left(|D^{(k_1,k_2)}\overline{W}_p(x,y)| + |D^{(k_1,k_2)}\overline{W}_p(x,\theta_{(k_1,k_2)}(x,y))| \right) \leq \\ \leq 2K \sum_{k_1,k_2} \sum_{r_1=0}^{k_1} \sum_{r_2=0}^{k_2} \left(|D^{(r_1,r_2)}(1 - 2d_p(x,y))| |D^{k_1-r_2,k_2-r_2}W_p(x,y)| + \right. \\ \left. + |D^{(r_1,r_2)}(1 - 2d_p(x,\theta_{r_1,r_2}(x,y)))| |D^{k_1-r_2,k_2-r_2}W_p(x,\theta_{r_1,r_2}(x,y))| \right). \end{gathered} \tag{19}$$

Позначимо $\max\limits_p \sup\limits_{\overline{B}_0} |D^{(k_1,k_2)}(1 - 2d_p(x,y))| = q$, $\max\limits_{k_1,k_2} \sup\limits_{\overline{B}_0} |D^{(k_1,k_2)}W_p(x,y)| = d$, отримаємо

$$D^{(2.1)}W_1(x,y) \leq 2KqdN,$$

де N — кількість доданків в правій частині нерівності (19). Інтегруючи останню нерівність двічі по x від x до a, по y від 0 до y та враховуючи умови (2), (3), отримаємо

$$|W_1(x,y)| \le 2KqNd\frac{y}{2}\left((a-x)^2 - \frac{(a-x_0)^2}{3}\right).$$

Позначивши $R = max\{a, b, ab, a^2 - \frac{(a-x_0)^2}{3}, \frac{b}{2}\left(a^2 - \frac{(a-x_0)^2}{3}\right)$, отримаємо

$$|D^{(k_1,k_2)}W_1(x,y)| \le 2KqNRd.$$

Припустимо, що при $(x,y) \in \overline{B}_0$ виконуються нерівності

$$|D^{(k_1,k_2)}W_p(x,y)| \le (2KqNR)^p d.$$

Тоді при $p+1$ маємо

$$|D^{(2.1)}W_{p+1}(x,y)| \le (2KqN)^{p+1}R^p d,$$

звідки

$$|D^{(k_1,k_2)}W_{p+1}(x,y)| \le (2KqNR)^{p+1}d.$$

Отримали геометричну прогресію, перший член якої d, а знаменник $2KqRN$. В силу умов теореми ця прогресія є нескінченно спадною, отже,

$$\lim_{p\to\infty} D^{(k_1,k_2)}W_p(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \overline{B}_0,$$

що й треба було довести.

Доведемо, що розв'язок $U(x,y)$ єдиний. Для цього припустимо, що існують два розв'язки задачі (1)–(3) $U(x,y)$ і Vx,y, $W(x,y) = U(x,y) - V(x,y)$. Аналогічно, як в попередньому випадку, отримуємо оцінки

$$|D^{(k_1,k_2)}W(x,y)| \le (2KqNR)^p d_1, \max_{k_1,k_2}\sup_{\overline{B}_0}|D^{(k_1,k_2)}W(x,y)| = d_1,$$

для довільних p, а це можливо тільки при $W(x,y) = 0$.

Доведемо справедливість в області $\overline{B}_0$ нерівностей (18). Припустимо, що для деякого номера p $Z_p(x,y) < U(x,y)$, тоді , враховуючи нерівності (17), $Z_p(x,y) < < Z_{p+q}(x,y)$, а отже, послідовність $\{Z_{p+q}(x,y)\}$ при $q \to \infty$ не збігається до розв'язку задачі (1)–(3), що суперечить доведеному вище.

Покажемо, що збіжність алгоритму (9) не повільніша збіжності методу Пікара. Нехай $Z^*_{p+1}(x,y)$, $V^*_{p+1}(x,y)$ — $p+1$-ше наближення, побудоване за допомогою методу Пікара

$$Z^*_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0,\ (x,y) \in \overline{E}, \\ T_1 f^{*,p} - T_2 f^*_p,\ (x,y) \in \overline{B}_0, \end{cases}$$
$$V^*_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0,\ (x,y) \in \overline{E}, \\ T_1 f^*_p - T_2 f^{*,p},\ (x,y) \in \overline{B}_0, \end{cases}$$

Маємо

$$Z_{p+1}(x,y) - Z^*_{p+1}(x,y) = -T_1 c_p(t,\eta)\alpha_p(t,\eta) + T_2 c_p(t,\eta)\beta_p(t,\eta) \le 0,$$
$$V_{p+1}(x,y) - V^*_{p+1}(x,y) = T_1\left(\overline{f}_p - f^*_p - c_p(t,\eta)\beta_p(t,\eta)\right) -$$
$$-T_2\left(\overline{f}^p - f^*{,}p - c_p(t,\eta)\alpha_p(t,\eta)\right) \ge 0,$$

отже,

$$D^{(k_1,k_2)}V^*_{p+1}(x,y) \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}V_{p+1}(x,y) \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}Z_{p+1}(x,y) \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}Z^*_{p+1}(x,y),$$

$k_1 = 0,2$ $(k_1 = 1)$, $k_2 = 0,1$, що й треба було довести.

Теорема 2. *Нехай права частина рівняння* (1) $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{D})$ *і в просторі* $C^{(2.1)}(B_0) \cap C^{(1.1)}(\overline{B}_0)$ *функція* $Z_0(x,y)(V_0(x,y))$ *задовольняє однорідні умови* (2), (3), *та нерівності*

$$\begin{gathered} D^{(k_1,k_2)}Z_0(x,y) \ge (\le) 0 \quad \left(D^{(k_1,k_2)}V_0(x,y) \le (\ge) 0\right), \\ D^{(2.1)}Z_0(x,y) - f[Z_0(x,y);0] \ge 0, \quad f[0;Z_0(x,y)] \ge 0 \\ \left(D^{(2.1)}V_0(x,y) - f[V_0(x,y);0] \le 0, \quad f[0,V_0(x,y)] \le 0\right), \\ k_1 = 0,2\ (k_1 = 1),\ k_2 = 0,1. \end{gathered} \tag{20}$$

Тоді розв'язок мішаної задачі (1)–(3) *задовольняє нерівності*

$$D^{(k_1,k_2)}U(x,y) \ge (\le) 0 \quad \left(D^{(k_1,k_2)}U(x,y) \le (\ge) 0\right). \tag{21}$$

Доведення. Функції $Z_0(x,y), V_0(x,y) \equiv 0$, $(Z_0(x,y) \equiv 0, V_0(x,y))$ є функціями порівняння задачі (1)–(3), оскільки вони задовольняють (2), (3), і з умови (20) випливає, що

$$\begin{gathered} D^{(k_1,k_2)}W_0(x,y) \ge (\le) 0, \quad \alpha_0(x,y) \ge 0, \quad \beta_0(x,y) \le 0, \\ D^{(k_1,k_2)}\Sigma_0(x,y) = D^{(k_1,k_2)}\left(T_1\alpha_0(t,\eta) - T_2\beta_0(t,\eta)\right) \ge (\le) 0, \\ D^{(k_1,k_2)}\Omega_0(x,y) = D^{(k_1,k_2)}\left(T_1\beta_0(t,\eta) - T_2\alpha_0(t,\eta)\right) \le (\ge) 0, \end{gathered}$$

$k_1 = 0,2$ $(k_1 = 1)$, $k_2 = 0,1$. В силу теореми 1 з нерівностей (18) при $p = 0$ отримаємо

$$\begin{gathered} 0 \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}U(x,y) \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}Z_0(x,y), \\ \left(D^{(k_1,k_2)}V_0(x,y) \le (\ge) D^{(k_1,k_2)}U(x,y) \le (\ge) 0\right), \end{gathered}$$

що й потрібно було довести.

Наслідок 1. *Якщо права частина рівняння* (1)

$$F[U(x,y)] \equiv F[U^+(x,y)] \quad \left(F[U(x,y)] \equiv F[U^-(x,y)]\right),$$

то для виконання нерівностей (21) *достатньо вимагати, щоб* $F[0] \ge 0$ $(F[0] \le 0)$.

Розглянемо два квазілінійні рівняння

$$D^{(2.1)}U(x,y) = F[U(x,y)] \tag{22}$$

та

$$D^{(2.1)}V(x,y) = G[V(x,y)], \tag{23}$$

де функції $U(x,y)$, $V(x,y)$ задовольняють умови (2), (3), а $F[U(x,y)]$, $G[V(x,y)]$ задовольняють наступним умовам:

1) $F[U(x,y)] \equiv F[U^+(x,y)]$, $G[V(x,y)] \equiv G[V^+(x,y)]$, вони належать простору $C(\overline{D})$ і принаймні одна з функцій $G[V(x,y)]$ $(F[U(x,y)])$ має знакосталі обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, починаючи з третього;

2) для довільної функції $Z(x,y) \in C^{(2.1)}(B_0) \cup C^{(1.1)}(\overline{B}_0)$ вони задовольняють нерівність
$$G[Z(x,y)] - F[Z(x,y)] \geq 0.$$

Позначимо $W(x,y) = V(x,y) - U(x,y)$, з (22), (23) маємо

$$D^{(2.1)}W(x,y) = G[V(x,y)] - F[U(x,y)] =$$
$$= \sum_{k_1,k_2} \frac{\partial G[\widetilde{V}(x,y)]}{\partial D^{(k_1,k_2)}W(x,y)} D^{(k_1,k_2)}W(x,y) + G[U(x,y)] - F[U(x,y)] \equiv A[W(x,y)]. \tag{24}$$

Враховуючи умови 1, 2, отримаємо $A[W(x,y)] \equiv A[W^+(x,y)]$ і $W(x,y)$ задовольняє однорідні умови (2), (3). В силу наслідку з теореми 2 маємо

$$D^{(k_1,k_2)}W(x,y) \geq (\leq) 0, \; k_1 = 0, 2 \; (k_1 = 1), \; k_2 = 0, 1.$$

Таким чином має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай праві частини рівнянь* (22), (23) *задовольняють умови* 1, 2. *Тоді розв'язки задач* (22), (2), (3) *і* (23), (2), (3) *задовольняють нерівності*

$$D^{(k_1,k_2)}V(x,y) \geq (\leq) D^{(k_1,k_2)}U(x,y), \; k_1 = 0, 2 \; (k_1 = 1), \; k_2 = 0, 1.$$

1. *Маринец В. В.* О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1293-1297.
2. *Маринець В. В., Добридень А. В.* Узагальнена задача Гурса // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2003. – Вип. 8. – С. 79-90.

Одержано 20.10.2005