УДК 519.8

М. М. Маляр, О. Ю. Швалагін (Ужгородський нац. ун-т)

ПОБУДОВА ФУНКЦІЇ НАЛЕЖНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ВИБОРУ

In this paper we study multicriterion task and describe it by fuzzy sets. The modality of construction fuzzy sets are offered.

Розглядається задача багатокритеріального вибору, яка описується на мові розмитих множин. Пропонуються методи побудови функції належності.

Кожного дня сучасна людина вимушена приймати складні рішення. Якщо проблеми побутового рівня вирішуються нами без особливих труднощів, то серйозні політико-економічні, соціальні, екологічні питання нависають над державами, науково- дослідними центрами на довгий час. Багатокритеріальні задачі вибору на сучасному етапі займають центральне місце в теорії прийняття рішень. Вважається, що врахування багатьох критеріїв наближає задачу вибору до реального життя. Для широкого загалу доступно багато методів розв'язування таких задач (метод ідеальної точки, послідовних поступок, послідовного вводу обмежень тощо). Але майже всі вони дають результат у випадку, коли альтернативи є порівнянними.

Вирішальну роль в багатокритеріальних задачах вибору грає особа, що приймає рішення. В загальному випадку вибір залежить від її особистих властивостей (рівень оптимізму, схильність до ризику тощо), які важко описати математично. Тому методи прийняття рішень, які враховують ці фактори є наближеними за своєю природою.

1. Розмиті множини. Один з таких наближених підходів був запропонований Л. Заде [1]. Він пов'язаний з введенням лінгвістичних змінних, які описують нечітке відображення людиною оточуючого світу, та нечітких множин, що включають в себе звичайні як частинний випадок. Ключовим поняттям теорії нечітких множин є функція належності:

Нехай X — універсальна множина. Нечіткою підмножиною A множини X називається сукупність пар $\{x, \mu_A(x)\},\ x \in X,\ \mu_A(x) : X \to [0, 1]$ – функція належності [1—3].

Використовуючи апарат нечітких множин, можна оцінити кількісно ті явища, які раніше могли бути враховані тільки на якісному рівні. Цей факт говорить про те, що, якщо б існував спосіб представлення задачі багатокритеріального вибору в термінах нечітких множин, то її можна було б досить ефективно розв'язувати.

Основною проблемою при описанні нечітких множин є побудова функції належності.

Приведемо деякі способи побудови функції належності [1,2]:

$$\mu_1(x,a,b) = \begin{cases} 0 & , \text{ якщо } x \le a; \\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2} & , \text{ якщо } a < x \le \dfrac{a+b}{2}; \\ 1 - \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & \text{ якщо } \dfrac{a+b}{2} < x \le b; \\ 1 & , \text{ якщо } x > b. \end{cases}$$

$$\mu_2(x,a,b,c) = \begin{cases} \mu_1(x,a,b) & , \text{ якщо } x < b; \\ 1 & , \text{ якщо } b \le x \le c; \\ 1 - \mu_1(x,c,c+b-a), & \text{ якщо } x > c. \end{cases}$$

$$\mu_3(x,a,b,c)=\begin{cases} \quad 1 \quad , & \text{якщо } x\le c;\\ \{1+[a(x-c)]^b\}^{-1}, & \text{якщо } x>c.\end{cases}$$

$$\mu_4(x,a,b,c)=\begin{cases} 0 \quad , & \text{якщо } x\le a;\\ \dfrac{x-a}{c-a}, & \text{якщо } a<x\le c;\\ \dfrac{b-x}{b-c}, & \text{якщо } c<x<b;\\ 0 \quad , & \text{якщо } x\ge b.\end{cases}$$

$$\mu_5(x,a,b,c,d)=\begin{cases} 0 \quad , & \text{якщо } x\le a;\\ \dfrac{x-a}{c-a}, & \text{якщо } a<x<c;\\ 1 \quad , & \text{якщо } c\le x\le d;\\ \dfrac{b-x}{b-d}, & \text{якщо } d<x<b;\\ 0 \quad , & \text{якщо } x\ge b.\end{cases}$$

$$\mu_6(x,a,b)=exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right].$$

$$\mu_7(x,a,b)=\{1+exp[-a(x-b)]\}^{-1}.$$

Використання однієї із цих функцій не завжди є можливим і залежить від конкретної задачі.

2. Постановка задачі вибору. Розглянемо задачу вибору у широкому розумінні. Нехай задано множину альтернатив особі, яка приймає рішення (ОПР). Необхідно вибрати найкращу. Вирішення цієї проблеми веде за собою задачу оцінювання, тобто кожну альтернативу потрібно було б якимось чином оцінити. Якщо є можливість задати якимось чином одну оцінку, то така задача вибору є тривіальною. Але у реальному житті це практично неможливо, а тому кожна альтернатива оцінюється декількома оцінками. У такому випадку задача вибору є вже більш складною. Ще більш складною є проблема, коли необхідно прийняти колективне рішення. Це означає, що кожна особа із колективу може мати множину своїх оцінок, які необов'язково співпадають із множинами інших членів колективу. Таким чином, задача вибору у реальному житті є дуже складною проблемою, що потребує її вивчення.

Для проведення досліджень над задачею вибору опишемо її за допомогою деякого математичного апарату. Множину альтернатив позначимо через X, ця множина може бути як неперервною — заданою умовами-обмеженнями, так і дискретною, тобто допустимі альтернативи можна перерахувати $X=\{x^1,x^2,\dots,x^n\}$. Позначимо критерії ефективності (мірило оцінки), за допомогою яких проводиться оцінка кожної альтернативи із множини X через $\{\mathrm{K}^i,\ i=\overline{1,m}\}$. Таким чином, задачу вибору можна сформулювати наступним чином: вибрати найкращу альтернативу із множини X, коли відомі на цій множині оцінки $\mathrm{K}^i(x)$, $i=\overline{1,m}$, де m — кількість оцінок.

Далі будемо розглядати задачі вибору, у яких множина допустимих альтернатив дискретна і скінчена. Тоді модель такої задачі може бути представлена у вигляді таблиці:

	x^1	x^2	x^3	$\ldots$	x^n
K^1	K_{11}	K_{12}	K_{13}	$\cdots$	K_{1m}
K^2	K_{21}	K_{22}	K_{23}	$\cdots$	K_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
K^m	K_{m1}	K_{m2}	K_{m3}	$\cdots$	K_{mn}

або матриці рішень:

$$K = (K_{ij})\ i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Виходячи із загальності міркувань припустимо, що всі альтернативи належать множині Парето, а найкращою вважається альтернатива, для якої всі оцінки досягають свого максимального значення і є додатніми величинами, тобто

$$K_{ij} \in\ R_+, \quad i =\ \overline{1,m}, \quad j =\ \overline{1,n}.$$

Оцінки критеріїв для яких кращими вважаються мінімальні значення можна перетворити наступним чином:

$$K_{ij} = (\max_j K_{ij} + \min_j K_{ij}) - K_{ij}.$$

Таким чином, множина альтернатив X являє собою деяку підмножину евклідового простору R_+^m, тобто кожна альтернатива розглядається як точка

$$x^j =\ (K_{1j}, K_{2j}, \ldots, K_{mj}), \quad j = \overline{1,n}$$

з простору R_+^m. У випадку колективного прийняття рішень таких таблиць може бути декілька, і вони можуть відрізнятися наборами і кількостями критеріїв ефективності. На даний момент часу існує багато різних підходів і методів для розв'язання задачі вибору сформульованої у такому вигляді, які дозволяють визначити свою множину найкращих (ефективних) альтернатив.

3. Точка задоволення та функція належності. Представимо задачу вибору через розмиті множини [4, 5]. Введемо в розгляд точку $T = (t_1, \ldots, t_m)$ з простору R_+^m і спробуємо описати нечітку множину точок близьких до цієї точки. Нечітка множина описується множиною самих точок і функцією належності. Візьмемо за множину точок множину альтернатив X, а функцію належності позначимо через $\mu_T(x)$. Тоді задачу вибору можна описати за допомогою розмитої моделі: вибрати найкращу (ефективну) альтернативу із нечіткої множини:

$$\{X, \mu_T(x)\},\ \forall x \in X \subset R_+^m,$$

де $\mu_T(x)$ характеризує "степінь належності" елементів $x \in X$ точці $T \in R_+^m$, тобто це функція належності твердження "точка x близька до точки T". Оскільки T це точка з простору R_+^m , то в подальшому ми будемо називати її "точкою задоволення" ОПР. Наприклад, це може бути ідеальна точка ($t_i = \max_j K_{ij}$, для задачі на максимум). "Точка задоволення" може бути як реальною, коли ОПР визначає значення оцінок по кожному критерію, так само і абстрактною (ідеальною).

Розглянемо множину точок $T = \{T^1, T^2, T^3, T^4, T^5, T^6\}$, яку ОПР може використати як точки задоволення з координатами:

$$t_i^1 = \min_j K_{ij}; \qquad t_i^2 = \frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{K_{ij}}}; \qquad t_i^3 = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} K_{ij}}; \tag{2}$$

$$t_i^4 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} K_{ij}}{n}; \qquad t_i^5 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} K_{ij}^2}{n}}; \qquad t_i^6 = \max_j K_{ij}. \tag{3}$$

Як відомо, між цими точками, координати яких визначені згідно вказаних формул, існує субординація:

$$T^1 \leq T^2 \leq T^3 \leq T^4 \leq T^5 \leq T^6.$$

Вибір точки з цієї множини залежить від психологічного стану ОПР, настрою, мети та інших факторів. Кожна особа може задавати свою множину точок задоволення, хоча можливе і використання формул (2), (3) для окремих її компонент.

Опишемо підхід побудови функції належності $\mu_{T(x)}$. Припустимо, що нам відома матриця рішень (1) для ОПР і задана "точка задоволення". Оскільки кожна альтернатива $x \in X$ є точкою простору R_+^m, то визначимо для неї координати наступним чином [4]:

$$x_i^j = 1 - \frac{|t_i - K_{ij}|}{\max\{t_i - \min\limits_j K_{ij}, \max\limits_j K_{ij} - t_i\}}, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Дана числова оцінка характеризує відносну оцінку досягнення конкретної цілі (критерію) і автоматично знімає питання різних шкал оцінювання по критеріям.

Наступним етапом є побудова функції належності, як згортки даних числових оцінок. Розглянеми наступну групу згорток при рівно важливих критеріях ефективності.

$$\mu_T^2(x^j) = \frac{m}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i^j}}; \quad \mu_T^3(x^j) = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} x_i^j}; \tag{5}$$

$$\mu_T^4(x^j) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^j}{m}; \quad \mu_T^5(x^j) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (x_i^j)^2}{m}}. \tag{6}$$

Як відомо, між цими згортками існує субординація:

$$\mu_T^2(x) \leq \mu_T^3(x) \leq \mu_T^4(x) \leq \mu_T^5(x).$$

Нехай задані згортки і "точка задоволення" T, тоді розмита множина залежить від важливості результату. Якщо для позитивного результату досить обрати альтернативи оцінки яких "не гірші" за "точку задоволеннято функція належності для такої розмитої множини буде мати вид:

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_T(x), & \text{якщо альтернатива x гірша за T;} \\ \;\;1 \;\;, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Якщо ж для розв'язку треба альтернатви, які є "на багато кращі" за "точку задоволення то для такої розмитої множини отримаємо таку функцію належності:

$$\mu(x) = \begin{cases} \quad 0 \quad , & \text{якщо альтернатива x гірша за T;} \\ 1 - \mu_T(x), & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

де $\mu_T(x)$ знаходиться за однієї за однією з формул (5), (6).

4. Алгоритм розв'язування задачі вибору.

Крок 1. Маючи множину альтернатив і вибравши сукупність критеріїв ефективності по яких будуть ці альтернативи оцінені, будуємо матрицю рішень (1).

Крок 2. Задаємо "точку задоволення" T, виходячи із проблемної ситуації при якій розв'язується задача.

Крок 3. Обчислюємо множину оцінок за допомогою формули (4).

Крок 4. Вибираємо одну із згорток (5), (6) і будуємо функцію належності.

Крок 5. Описуємо розмиту можину відносно "точки здоволення".

5. Висновки. Використання математичного апарату нечітких множин для розв'язування багатокритеріальних задач дає можливість не тільки розв'язати найзагальніші задачі вибору, а й врахувати різні психологічні якості ОПР. В залежності від того чи ця особа є оптимістом чи песимістом, при побудові функцій належності, вона обере ту чи іншу формулу для згорток. При виборі точки задоволення береться до уваги важливість проблеми, яку потрібно розв'язати, тому можна використати як ідеальну так і дещо гірші точки. Після побудови функції належності, в залежності від вимог до розв'язку, ОПР може вибрати альтернативу, наприклад, керуючись такою шкалою бажаності:

Бажаність	Відмітки на шкалі бажаності
Дуже добре	1.00-0.80
Добре	0.80-0.63
Задовільно	0.63-0.37
Погано	0.37-0.20
Дуже погано	0.20-0.00

Виходячи з вище сказаного, задача багатокритеріального вибору зводиться до наступних кроків:

– знайти кількісні оцінки відносної корисності альтернатив;

– проранжувати альтернативи;

– вибрати найкращу альтернативу.

1. *Заде Л. А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
2. *Борисов А. Н.* и др. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной. – Рига: Зинатне, 1982. – 256 с.
3. Нечеткие множества. Под редакцией Р. Р. Ягера. – М.: Мир, 1986. – 248 с.
4. *Маляр М. М., Швалагін О. Ю.* Моделювання задач вибору за допомогою розмитих множин. // Thesis of conference reports "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2005. – P. 82.
5. *Волошин А. Ф., Маляр Н. Н.* Нечеткие модели многокритериального коллективного выбора. // Proceedings XI-th International Conference "Knowledge – Dialogue – Solution". – Sofia, 2005. – Vol. 1. – P. 247–250.

Одержано 20.10.2005