УДК 519.624.3

В. В. Маринець (Ужгородський нац. ун-т)
О. Ю. Питьовка (Мукачівський технолог. ін-т)

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ З ПАРАМЕТРОМ В КРАЙОВИХ УМОВАХ

The problem on the occasion of quasylinear second order differential equation, with indivisiables boundary value conditions that depend of parameter, is invertigated by the two-sides method.

В роботі двостороннім методом досліджується задача у випадку квазілінійного диференціального рівняння другого порядку з нерозділеними крайовими умовами, які залежать від параметру.

Дана робота є продовженням досліджень, приведених в [1].

Розглянемо задачу: в просторі функцій $C_1[0,1] = C^{(2)}(0,1) \bigcap C^1[0,1]$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)) \equiv f[y(x)], \tag{1}$$

який задовольняє умови

$$\begin{cases} \alpha_{10}\lambda y(0) + \beta_{10} y(1) = d_1, \\ \alpha_{21} y'(0) + \beta_{21} y'(1) = d_2\lambda, \end{cases} \tag{2}$$

$$y(0) = y_0, \tag{3}$$

та визначити параметр $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $\alpha_{10}, \beta_{10}, \alpha_{21}, \beta_{21}, d_1, d_2, y_0$ — задані сталі. Вважаємо, що $\rho = \alpha_{10} y_0 (\alpha_{21} + \beta_{21}) + d_2 \beta_{10} \neq 0$. Якщо $f[y(x)] \in C(\bar{B})$, $f : B \to R_1$, то задачу (1)–(3) можна подати в еквівалентній інтегральній формі

$$y(x) = \Omega(x) + \int\limits_0^1 G(x,\xi) f[y(\xi)] d\xi, \tag{4}$$

$$\lambda = \frac{d_1 - \beta_{10} y_0}{\rho(\alpha_{21} + \beta_{21})^{-1}} + \frac{1}{\rho} \int\limits_0^1 [\beta_{10}(\alpha_{21} + \beta_{21})\xi - \beta_{10}\alpha_{21}] f[y(\xi)] d\xi, \tag{5}$$

де

$$\Omega = y_0 + \tfrac{(d_1 - \beta_{10} y_0) d_2}{\rho} x,$$
$$G(x,\xi) = \begin{cases} (\frac{d_2 \beta_{10}}{\rho} x - 1)\xi + \frac{\alpha_{10} y_0 \alpha_{21}}{\rho} x, \xi \in [0, x], \\ (\frac{d_2 \beta_{10}}{\rho} \xi - 1)x + \frac{\alpha_{10} y_0 \alpha_{21}}{\rho} x, \xi \in (x, 1]. \end{cases}$$

Надалі будемо вважати, що права частина рівняння (1) $f[y(x)] \in C_1(\bar{B})$, де $C_1(\bar{B})$ — простір функцій, які задовольняють наступним умовам:

1) для всіх $(x, y(x), y'(x)) \in \overline{B}$ функція $f[y(x)] \in C^1(\bar{B})$;

2) в області $\overline{B}$ функцію $f[y(x)]$ можна подати у вигляді $f[y(x)] \equiv f(x, y, y'; y, y') \equiv \equiv f[y^+(x) \ ; y^-(x)]$ таким чином, для довільних пар функцій $(z_0(x), v_0(x))$,$(z_1(x), v_1(x))$ з простору $C_1[0,1]$, які належать області визначення $\overline{B}_1$ функції $f\ [y^+(x) \ ; y^-(x)]$ і при $x \in [0,1]$ задовольняють нерівності $z_0^k(x) \leq z_1^k(x), v_0^k(x) \geq v_1^k(x)$, $k = 0, 1$, виконується умова

$$f[z_1(x); v_1(x)] - f[z_0(x); v_0(x)] \geq 0; \tag{6}$$

3) функція $f[y^+(x); y^-(x)]$ в області $\overline{B}_1$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто

$$|f[z_1(x); v_1(x)] - f[z_0(x); v_0(x)]| \le \tfrac{1}{4}L\left(|z_1(x) - z_0(x)| + \right.$$
$$\left. + |z_1'(x) - z_0'(x)| + |v_1(x) - v_0(x)| + |v_1'(x) - v_0'(x)|\right),$$

де L — стала Ліпшіца.

Не зменшуючи загальності подальших міркувань, покладемо $\alpha_{10} = d_2 = 1$, $\alpha_{21}y_0 \neq 0$ (якщо $\alpha_{21}y_0 = 0$, то задача (1)–(3) значно спрощується).
I. Нехай $1 + \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \le 0$, $\frac{\beta_{10}}{\alpha_{21}y_0} \le 0$. Подамо функцію Гріна задачі (1)–(3) у вигляді

$$G(x,\xi) = G_1(x,\xi) + G_2(x,\xi), \tag{7}$$

де

$$G_1(x,\xi) = \tfrac{\beta_{10}}{\rho}x\xi, \rho \in [0,1],$$
$$G_2(x,\xi) = \begin{cases} -\xi + \frac{y_0\alpha_{21}}{\rho}x, \xi \in [0,x), \\ -x + \frac{y_0\alpha_{21}}{\rho}x, \xi \in [x,1]. \end{cases}$$

Приймаючи до уваги, що $\frac{\beta_{10}}{\rho} \ge 0$, $\frac{y_0\alpha_{21}}{\rho} \le 0$, то

$$G_1(x,\xi) \ge 0, \quad G'_{1_x}(x,\xi) \ge 0, \quad G_2(x,\xi) \le 0, \quad G'_{2_x}(x,\xi) \le 0 \tag{8}$$

при $(x,\xi) \in \overline{D} = \{(x,\xi) | x \in [0,1], \xi \in [0,1]\}$.
Позначимо

$$\begin{gathered} f^n(x) = f[z_n(x); v_n(x)], f_n(x) = f[v_n(x); z_n(x)], \\ \alpha_n(x) = z_n(x) - \Omega(x) - \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)f^n(\xi)d\xi - \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)f_n(\xi)d\xi, \\ \beta_n(x) = v_n(x) - \Omega(x) - \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)f_n(\xi)d\xi - \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)f^n(\xi)d\xi, \\ w_n^{(k)}(x) = z_n^{(k)}(x) - v_n^{(k)}(x), k = 0,1 \end{gathered} \tag{9}$$

і побудуємо послідовності функцій $\left\{z_n^{(k)}(x)\right\}$ та $\left\{v_n^{(k)}(x)\right\}$ згідно закону

$$\begin{gathered} z_{n+1}(x) = \Omega(x) + \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\overline{f}^n(\xi)d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi)\overline{f}_n(\xi)d\xi, \\ v_{n+1}(x) = \Omega(x) + \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\overline{f}_n(\xi)d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi)\overline{f}^n(\xi)d\xi, \\ \overline{f}^n(x) = f^n(x) - c_n(x)(f^n(x) - f_n(x)), \\ \overline{f}_n(x) = f_n(x) + q_n(x)(f^n(x) - f_n(x)), \end{gathered} \tag{10}$$

де за нульове наближення вибираємо довільні з простору $C_1[0,1]$ функції $z_0(x), v_0(x) \in \in \overline{B}_1$, які задовольняють умовам

$$w_0^{(k)}(x) \ge 0, \quad \alpha_0^{(k)}(x) \ge 0, \quad \beta_0^{(k)}(x) \le 0, \quad x \in [0,1], \tag{11}$$

а $c_n(x), q_n(x) \in C[0,1]$ і

$$0 \le c_n(x) < \frac{1}{2}, \quad 0 \le q_n < \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Із (9) та (10)маємо:

$$
\begin{aligned}
z_{n+1}(x) - z_n(x) &= -\alpha_n(x) + \int_0^1 [G_2(x,\xi)q_n(\xi) - G_1(x,\xi)c_n(\xi)](f^n(\xi) - f_n)(\xi))d\xi, \\
v_{n+1}(x) - v_n(x) &= -\beta_n(x) + \int_0^1 [G_1(x,\xi)q_n(\xi) - G_2(x,\xi)c_n(\xi)](f^n(\xi) - f_n)(\xi))d\xi,
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
w_{n+1}(x) = \int_0^1 [G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)](1 - c_n(\xi) - q_n(\xi))(f^n(\xi) - f_n(\xi))d\xi, \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n+1}(x) &= \int_0^1 G_1(x,\xi)(\overline{f^n}(\xi) - f^{n+1}(\xi))d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi)(\overline{f_n}(\xi) - f_{n+1}(\xi))d\xi, \\
\beta_{n+1}(x) &= \int_0^1 G_1(x,\xi)(\overline{f_n}(\xi) - f_{n+1}(\xi))d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi)(\overline{f^n}(\xi) - f^{n+1}(\xi))d\xi.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Із (13)–(14)при $n = 0$, враховуючи (6), (8), (11), (12) випливає

$$
z_0^{(k)}(x) - z_1^{(k)}(x) \geq 0, \quad v_0^{(k)}(x) - v_1^{(k)}(x) \leq 0, \quad w_1^{(k)}(x) \geq 0, \quad k = 0, 1,
$$

тобто в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності

$$
v_0^{(k)}(x) \leq v_1^{(k)}(x) \leq z_1^{(k)}(x) \leq z_0^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, \quad x \in [0, 1],
$$

а це означає, що $z_1(x), v_1(x) \in \overline{B}_1$. Приймаючи останні нерівності до уваги, одержуємо

$$
\begin{aligned}
\overline{f}^0(x) - f^1(x) &= f^0(x) - f^1(x) - c_0(x)(f^0(x) - f_0(x)), \\
\overline{f}_0(x) - f_1(x) &= f_0(x) - f_1(x) + q_0(x)(f^0(x) - f_0(x)),
\end{aligned}
$$

де $f^0(x) - f^1(x) \geq 0, f_0(x) - f_1(x) \leq 0, f^0(x) - f_0(x) \geq 0$. Отже, вибираючи $c_0(x)$і $q_0(x)$ таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$ $\overline{f}^0(x) - f^1(x) \geq 0, \overline{f}_0(x) - f_1(x) \leq 0$, із (15) при $n = 0$ випливає при $x \in [0, 1]$ справедливість нерівностей $\alpha_1^{(k)}(x) \geq 0, \beta_1^{(k)}(x) \leq 0, k = 0, 1$. Беручи функції $z_1(x), v_1(x)$ за вихідні і повторюючи вище наведені міркування, методом математичної індукції легко показати, що якщо на кожному кроці ітерації (10) функції $c_n(x)$, $q_n(x)$ вибирати таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$ виконувались умови

$$
\begin{aligned}
f^n(x) - f^{n+1}(x) - c_n(x)(f^n(x) - f_n(x)) &\geq 0, \\
f_n(x) - f_{n+1}(x) + q_n(x)(f^n(x) - f_n(x)) &\leq 0,
\end{aligned} \tag{16}
$$

то при $x \in [0, 1]$ для довільного $n \in N$ справедливі нерівності

$$
\begin{gathered}
v_n^{(k)}(x) \leq v_{n+1}^{(k)}(x) \leq z_{n+1}^{(k)}(x) \leq z_n^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, \quad x \in [0, 1], \\
\alpha_n(x) \geq 0, \quad \beta_n(x) \leq 0.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Покажемо, що побудовані послідовності функцій $\{z_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$ абсолютно та рівномірно збігаються до єдиного в просторі функцій $C_1[0, 1]$ розв'язку рівняння (4). Дійсно, позначимо $q = \max\limits_n \sup\limits_{[0,1]}(1 - c_n(x) - q_n(x))$, $d = \sup\limits_{[0,1]}[w_0(x), w_0'(x)]$. Тоді із (14) методом математичної індукції одержуємо оцінки

$$
\sup_{[0,1]}[w_n(x), w_n'(x)] \leq d(Lq\frac{y_0\alpha_{21}\beta_{21} + 1,5\beta_{10}}{\rho})^n.
$$

Якщо
$$Lq\frac{y_0\alpha_{21}\beta_{21}+1,5\beta_{10}}{\rho}<1, \tag{18}$$
то з останніх оцінок та нерівностей (17) випливає, що
$$\lim_{n\to\infty} z_n^{(k)}(x)=\lim_{n\to\infty} v_n^{(k)}(x)=y^{(k)}(x), \quad k=0,1,$$
де y(x) — єдиний розв'язок рівняння (4) (єдиність доводиться методом від супротивного).

Покажемо, що збіжність ітераційного процесу (10), (16) не повільніша збіжності звичайного методу послідовних наближень Пікара. З цією метою припустимо, що $z_n(x)$ та $v_n(x)$ — двосторонні наближення до розв'язку рівняння (4), які задовольняють умови (17).
Нехай
$$z^*_{n+1}(x)=\Omega(x)+\int_0^1 G_1(x,\xi)f^n(\xi)d\xi+\int_0^1 G_2(x,\xi)f_n(\xi)d\xi,$$
$$v^*_{n+1}(x)=\Omega(x)+\int_0^1 G_1(x,\xi)f_n(\xi)d\xi+\int_0^1 G_2(x,\xi)f^n(\xi)d\xi,$$
тоді
$$z_{n+1}(x)-z^*_{n+1}(x)=\int_0^1 \left(G_2(x,\xi)q_n(\xi)-G_1(x,\xi)c_n(\xi)\right)(f^n(\xi)-f_n(\xi))d\xi\le 0,$$
$$v_{n+1}(x)-v^*_{n+1}(x)=\int_0^1 \left(G_1(x,\xi)q_n-G_2(x,\xi)c_n(\xi)\right)(\xi)(f^n(\xi)-f_n(\xi))d\xi\ge 0,$$
тобто при $x\in[0,1]$ справедливі нерівності $v^*_{n+1}(x)\le v_{n+1}(x)\le z_{n+1}(x)\le z^*_{n+1}(x)$, що і треба було показати. Таким чином справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай права частина рівняння* (1) $f[y(x)]\in C^1(\bar B)$ *і в області* $\overline{B}_1$ *існують функції нульового наближення* $z_0(x), v_0(x)\in C_1[0,1])$, *які задовольняють умови* (11). *Якщо* $1+\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}}\le 0$, $\frac{\beta_{10}}{\alpha_{21}y_0}\le 0$, *то послідовності функцій* $\{z_n(x)\}$ *та* $\{v_n(x)\}$, *побудовані згідно закону* (10), (16) *при виконанні умови* (18) *збігаються абсолютно і рівномірно в області* $\overline{B}$ *до єдиного в просторі* $C_1([0,1])$ *розв'язку рівняння* (4), *мають місце нерівності*
$$v_n^{(k)}(x)\le v_{n+1}^{(k)}(x)\le y^k(x)\le z_{n+1}^{(k)}(x)\le z_n^{(k)}(x), \quad k=0,1, \quad x\in[0,1], \tag{19}$$
а збіжність методу (10), (16) *не повільніша збіжності методу Пікара.*

Перейдемо до рівняння (4). Зауважимо, що якщо $-\alpha_{21}\ge(\le)0$, то
$$\omega(\xi)=\frac{1}{\rho}[\beta_{10}(\alpha_{21}+\beta_{21})\xi-\alpha_{21}\beta_{10}]\ge(\le)0. \tag{20}$$
Позначимо
$$\begin{aligned}\lambda_n^+&=\tfrac{d_1-\beta_{10}y_0}{\rho}[\beta_{10}(\alpha_{21}+\beta_{21})+\int_0^1\omega(\xi)f^n(\xi)d\xi,\\ \lambda_n^-&=\tfrac{d_1-\beta_{10}y_0}{\rho}[\beta_{10}(\alpha_{21}+\beta_{21})+\int_0^1\omega(\xi)f_n(\xi)d\xi.\end{aligned} \tag{21}$$

Тоді, приймаючи до уваги нерівності (6), (19), (20), маємо

$$\lambda_n^+ - \lambda = \int\limits_0^1 \omega(\xi)(f^n(\xi) - f[y(\xi)])d\xi \geq (\leq)0,$$
$$\lambda_n^- - \lambda = \int\limits_0^1 \omega(\xi)(f_n(\xi) - f[y(\xi)])d\xi \leq (\geq)0$$

при $-\alpha_{21} \geq (\leq)0$, тобто

$$\lambda_n^- \leq (\geq)\lambda \leq (\geq)\lambda_n^+, \quad -\alpha_{21} \geq (\leq)0. \tag{22}$$

Якщо $\lambda_n^-, \lambda_n^+ \in [\lambda_1, \lambda_2]$, то їх можна вважати за n-ве двостороннє наближення до параметру λ, який визначається згідно формули (5).

Теорема 2. *Нехай $f[y(x)] \in C^1(\bar{B})$, $1 + \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \leq 0, \frac{\beta_{10}}{\alpha_{21}y_0} \leq 0$, а $z_n(x)$ та $v_n(x)$ — n-ве двостороннє наближення до розв'язку рівняння* (4)*, яке визначається згідно* (10), (16)*. Тоді при виконанні умови* (18)*, двосторонні наближення до параметру λ, який задається згідно рівності* (5)*, визначається формулами* (21) *і мають місце нерівності* (22)*.*

Зауважимо, що побудовані згідно закону (10), (16) функції $z_{n+1}(x)$ та $v_{n+1}(x)$ не задовольняють всім крайовим умовам (2), (3), оскільки

$$\begin{gathered}\alpha_{21}z'_{n+1}(0) + \beta_{21}z'_{n+1}(1) + \tfrac{\beta_{10}}{y_0}z_{n+1}(1) - \tfrac{d_1}{y_0} = \tfrac{d_1}{y_0} - \alpha_{21}v'_{n+1}(0) - \\ -\beta_{21}v'_{n+1}(1) - \tfrac{\beta_{10}}{y_0}v_{n+1}(1) = \tfrac{\beta_{10}}{y_0}\int\limits_0^1 \xi(1 - c_n(\xi) - q_n(\xi))(f^n(\xi) - f_n(\xi))d\xi,\end{gathered} \tag{23}$$

але функція $y_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(z_{n+1}(x) + v_{n+1}(x))$ задовольняє всім крайовим умовам (2), (3) і її беремо за $n+1$-ше наближення задачі (1)-(3). Аналогічно $\lambda_n = \frac{1}{2}(\lambda_n^+ + \lambda_n^-)$.
II. Нехай

$$1 + \frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \geq 0, \quad \frac{\beta_{10}}{\alpha_{21}y_0} \geq 0. \tag{24}$$

Тоді покладемо

$$\begin{gathered}G_1(x,\xi) = \tfrac{x}{\rho}(\xi\beta_{10} + y_0\alpha_{21}, \xi \in [0,1], \\ G_2 = \begin{cases} -\xi, \xi \in [0,x), \\ -x, \xi \in [x,1]. \end{cases}\end{gathered} \tag{25}$$

Очевидно $G(x,\xi) = G_1(x,\xi) + G_2(x,\xi)$ і $G_1(x,\xi)$ та $G_2(x,\xi)$ при $(x,\xi) \in \overline{D}$ задовольняють умови (8).
У цьому випадку двосторонні наближення до розв'язку рівняння (4) будуємо згідно закону (10), (11), (16) і переконуємося в справедливості нерівностей (17).
Якщо ж

$$Lq\left(1 + \frac{y_0\alpha_{21} + 0,5\beta_{10}}{\rho}\right) < 1, \tag{26}$$

то як і в попередньому випадку легко показати, що послідовності функцій $\{z_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$ абсолютно і рівномірно збігаються до єдиного розв'язку рівняння (4) і мають місце нерівності (19) тобто, якщо виконуються умови (26), то і у випадку (24)

справедливі твердження теореми 1.
Позначимо

$$\begin{aligned}\lambda_n^+ &= \tfrac{d_1-\beta_{10}y_0}{\rho}(\alpha_{21}+\beta_{21}) + \int\limits_0^1 \tfrac{\alpha_{21}\beta_{10}}{\rho}[(1+\tfrac{\beta_{21}}{\alpha_{21}})\xi f^n(\xi) - f_n(\xi)]d\xi,\\ \lambda_n^- &= \tfrac{d_1-\beta_{10}y_0}{\rho}(\alpha_{21}+\beta_{21}) + \int\limits_0^1 \tfrac{\alpha_{21}\beta_{10}}{\rho}[(1+\tfrac{\beta_{21}}{\alpha_{21}})\xi f_n(\xi) - f^n(\xi)]d\xi.\end{aligned} \tag{27}$$

Тоді, якщо $-\alpha_{21} \geq (\leq) 0$, то справедливі нерівності (22).

Теорема 3. *Нехай права частина рівняння* (1) $f[y(x)] \in C_1(\bar{B})$, *виконуються умови* (24), (26) *і в* $\bar{B}_1$ *існують функції нульового наближення* $z_0(x), v_0(x) \in C_1[0,1]$, *які задовольняють нерівності* (11), *де в* (9) $G_1(x,\xi)$ *та* $G_2(x,\xi)$ *визначаються згідно* (25). *Тоді n-вим наближенням до розв'язку задачі* (1)–(3) *є пара* $(y_n(x), \lambda_n)$, $\lambda_n = \frac{1}{2}(\lambda_n^+ + \lambda_n^-)$, $y_n = \frac{1}{2}(z_n(x) + v_n(x))$, *де* $z_n(x), v_n(x)$ *є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння* (4), *які визначається згідно закону* (10), (11), (16), (25) *і задовольняють нерівності* (19), *а* λ_n^-, λ_n^+ — *n-ве двостороннє наближення до шуканого параметру* λ, *визначене на підставі нерівностей* (27), *і задовольняє умови* (22).

III. Припустимо, що

a)

$$1+\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \geq 0, \quad \frac{\beta_{10}}{\alpha_{21}y_0} \leq 0, \quad \rho_1 = 1+\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} + \frac{\beta_{10}}{y_0\alpha_{21}} \geq 0. \tag{28}$$

Тоді $\frac{\beta_{10}}{\rho} \leq 0, \frac{y_0\alpha_{21}}{\rho} \geq 0$. Будуємо двосторонні наближення до розв'язку рівняння (4) згідно закону (10), (11), (16), де

$$\begin{aligned} G_1(x,\xi) &= \tfrac{y_0\alpha_{21}}{\rho}x, \xi \in [0,1],\\ G_2 &= \begin{cases} (\frac{\beta_{10}}{\rho}x - 1)\xi, \xi \in [0,x],\\ (\frac{\beta_{10}}{\rho}\xi - 1)x, \xi \in [x,1].\end{cases}\end{aligned} \tag{29}$$

Очевидно функції $G_1(x,\xi)$ та $G_2(x,\xi)$, визначені згідно (29), задовольняють умовам (8) при $(x,\xi) \in \overline{D}$.

Легко показати, що якщо $Lq\left(1+\frac{y_0\alpha_{21}-0{,}5\beta_{10}}{\rho}\right) < 1$, то послідовності функцій $\{z_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$, побудовані згідно закону (10), (11), (16), абсолютно і рівномірно збігаються до єдиного розв'язку рівняння (4) в просторі $C_1[0,1]$ та мають місце нерівності (19). Оскільки $\frac{\beta_{10}(\alpha_{21}+\beta_{21})}{\rho} \geq (\leq) 0, \frac{\alpha_{21}\beta_{10}}{\rho} \geq (\leq) 0$ при $\alpha_{21} \leq (\geq) 0$, то двосторонні наближення до шуканого параметру λ в цьому випадку також будуємо згідно формул (27), причому справедливими є нерівності (22).

Зауважимо, що якщо $\rho_1 \leq 0$, то $\frac{\beta_{10}}{\rho} \geq 0$, а $\frac{y_0\alpha_{21}}{\rho} \leq 0$, тобто ми маємо випадок, розглянутий в пункті I, лише враховуючи, що $\frac{\beta_{10}(\alpha_{21}+\beta_{21})}{\rho} \leq (\geq) 0, \frac{\alpha_{21}\beta_{10}}{\rho} \leq (\geq) 0$ при $\alpha_{21} \leq (\geq) 0$, λ_n^-, λ_n^+ визначаємо згідно формул

$$\begin{aligned}\lambda_n^+ &= \tfrac{d_1-\beta_{10}y_0}{\rho}(\alpha_{21}+\beta_{21}) + \int\limits_0^1 \tfrac{1}{\rho}[\beta_{10}(\alpha_{21}+\beta_{21})\xi f_n(\xi) - \alpha_{21}\beta_{10}f^n(\xi)]d\xi,\\ \lambda_n^- &= \tfrac{d_1-\beta_{10}y_0}{\rho}(\alpha_{21}+\beta_{21}) + \int\limits_0^1 \tfrac{1}{\rho}[\beta_{10}(\alpha_{21}+\beta_{21})\xi f^n(\xi) - \alpha_{21}\beta_{10}f_n(\xi)]d\xi.\end{aligned}$$

b) Якщо ж $1+\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \leq 0, \frac{\beta_{10}}{\alpha_{21}y_0} \geq 0$, $\rho_1 \geq 0$, то $\frac{\beta_{10}}{\rho} \geq 0$, а $\frac{y_0\alpha_{21}}{\rho} \geq 0$, а, отже, двосторонні наближення до розв'язку рівняння (4) в просторі функцій $C_1[0,1]$ будуємо як і у випадку, розглянутому у пункті II, а оскільки $\omega(\xi) \geq (\leq) 0$ при $\alpha_{21} \leq (\geq) 0$, то λ_n^-, λ_n^+ визначаємо згідно формул (22). Коли ρ_1 0, то $\frac{\beta_{10}}{\rho} \leq 0$, а $\frac{y_0 \alpha_{21}}{\rho} \leq 0, \frac{\beta_{10}(\beta_{21}+\alpha_{21})}{\rho} \leq (\geq) 0, \frac{\alpha_{21}\beta_{10}}{\rho} \geq (\leq) 0$ при $\alpha_{21} \leq (\geq) 0$, отже, $G(x,\xi) \leq 0, G'_x(x,\xi) \leq 0$ при $(x,\xi) \in \overline{D}$, а $\omega(\xi) \leq (\geq) 0$ коли $\alpha_{21} \leq (\geq) 0$. У цьому випадку двосторонні наближення до розв'язку рівняння (4), які б задовольняли умови (19), будуємо згідно закону (10), (11), (16), де $G_1(x,\xi) \equiv 0$, $G_2(x,\xi) \equiv G(x,\xi)$, а збіжність побудованих послідовностей функцій $\{z_n(x)\}$ та $\{v_n(x)\}$ до єдиного розв'язку рівняння (4) в просторі $C_1[0,1]$ буде забезпечено при виконанні умови $Lq\frac{y_0\alpha_{21}-0{,}5\beta_{10}}{\rho} < 1$.

Двосторонні наближення до шуканого λ, які б задовольняли умови (22) обчислюємо згідно формул

$$\lambda_n^+ = \frac{d_1-\beta_{10}y_0}{\rho}(\alpha_{21}+\beta_{21}) + \int_0^1 \omega(\xi) f_n(\xi) d\xi,$$

$$\lambda_n^- = \frac{d_1-\beta_{10}y_0}{\rho}(\alpha_{21}+\beta_{21}) + \int_0^1 \omega(\xi) f^n(\xi) d\xi.$$

1. *Маринець В. В., Маринець Т. В., Питьовка О. Ю.* Двосторонній метод наближеного інтегрування крайових задач з параметром // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2004. – Вип. 9. – С. 32–44.
2. *Маринец В. В.* Об одном подходе постороения итерационных методов приближенного интегрирования краевых задач теории пластин и оболочек // Материалы VIII всесоюзной конф. "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности Новосибирск, 1984. – С. 194–198.

Одержано 20.10.2005