УДК 517.3

В. Я. Рибак (Ужгородський нац. ун-т)

ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ПОХІДНИХ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

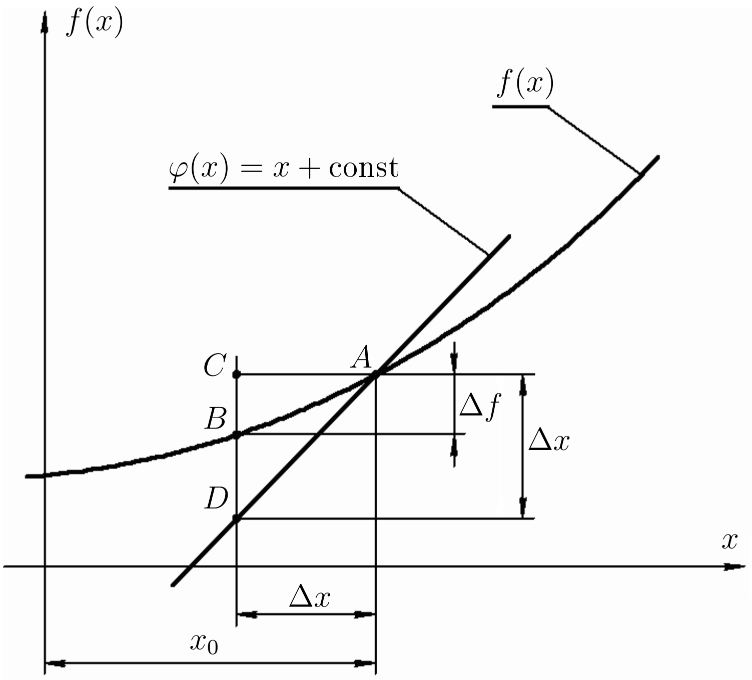
Geometrical interpretation for the derivates of fractional order and some cases of its application are given in the paper.

У статті подається геометрична інтерпретація похідних дробового порядку і можливі випадки її застосування.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то значення лівобічної першої похідної у цій точці описується виразом:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}\bigg|_{x=x_0}, \tag{1}$$

який трактують як відношення приросту функції до приросту аргументу. Покажемо картину приростів графічно (мал. 1). Проведемо через точку A із координатами x_0, $f(x_0)$ пряму під кутом 45° до осі абсцис. Приріст функції зображується відрізком BC, приріст незалежної змінної — CD. При такому зображенні Δx можна говорити, що перша похідна показує, наскільки графік функції $f(x)$ у точці x_0 деформований відносно графіка функції $\varphi(x) = x + const$.



Мал. 1

Замість $\varphi(x) = x + const$ може бути вибрана інша довільна гладка функція, яку назвемо диференціюючою, і стосовно якої можна визначати міру деформованості (або швидкість приросту) досліджуваної функції $f(x)$. Границю відношення приростів досліджуваної і диференціюючої функцій

$$\frac{df}{d\varphi} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\varphi(x) - \varphi(x - \Delta x)}\bigg|_{x = x_0} \tag{2}$$

назвемо узагальненою похідною.

При певному підборі $\varphi(x)$ за допомогою (2) можна отримати значення дробової похідної r-го порядку $D^r f(x)|_a^x$ [1]. Таким чином, вважаємо, що для заданої обмеженої функції $f(x)$ та числа $r \in R$, $r \geq 0$, на певному проміжку існує така функція $\varphi(x)$, що

$$D^r f(x)|_a^x \stackrel{def}{=} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \quad \varphi'(x) \neq 0. \tag{3}$$

Тоді диференціююча функція $\varphi(x)$ має вигляд

$$\varphi(x) = \int \frac{f'(x)dx}{D^r f(x)|_a^x} + C, \quad C = const. \tag{4}$$

Для існування $\varphi(x)$ похідна $D^r f(x)|_a^x$ на проміжку (a, b) не повинна змінювати знак. Ця умова відразу виключає із розгляду знакозмінні похідні $D^r f(x)|_a^x$ або примушує звужувати розглядуваний проміжок до значень, при яких $D^r f(x)|_a^x \neq 0$ $(r \neq 1)$.

А тепер здійснимо перехід у систему координат η, ξ, для якої $\xi = \varphi(x) + C$, $f(x)$ трансформується у $\eta(\xi)$, а $D^r f(x)|_a^x$ — у $\eta'(\xi) = d\eta(\xi)/d\xi$. Очевидно, що $\varphi(x)$ при цьому повинна бути однозначною та обмеженою функцією x. Дотична пряма до кривої $\eta(\xi)$ у точці ξ_0 описується рівнянням

$$H(\xi) = \eta(\xi_0) + \eta'(\xi_0)(\xi - \xi_0). \tag{5}$$

У початковій системі координат y, x дотична пряма $H(\xi)$ перетворюється у дотичну криву до функції $f(x)$, причому "викривлення" її та щільність дотику залежать як від вигляду $f(x)$, так і порядку r її похідної $D^r f(x)|_a^x$. Відповідно до (3), (4) та (5) дотична крива $Y(x)$ до $f(x)$ задається таким виразом:

$$Y(x) = f(x_0) + D^r f(x)|_a^{x_0} \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)dt}{D^r f(t)|_a^t}. \tag{6}$$

Для $r = 1$ формула (6) збігається із рівнянням дотичної прямої до графіка функції $f(x)$.

У загальному випадку інтегрування (6) пов'язане із деякими труднощами, тому для ілюстрації поведінки дотичних кривих обмежимося степеневою функцією $f(x) = Ax^p$, $p > -1$. Проведемо перетворення, означені виразами (3)–(6), на скінченному проміжку $[0, x]$.

$$D^r \left(Ax^p\right)|_0^x = A\frac{\Gamma(p+1)x^{p-r}}{\Gamma(p+1-r)}; \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1-r)}{r\Gamma(p)}x^r + C, & r \neq 0; \\ \ln\left(Ax^p\right) + C, & r = 0; \end{cases}$$

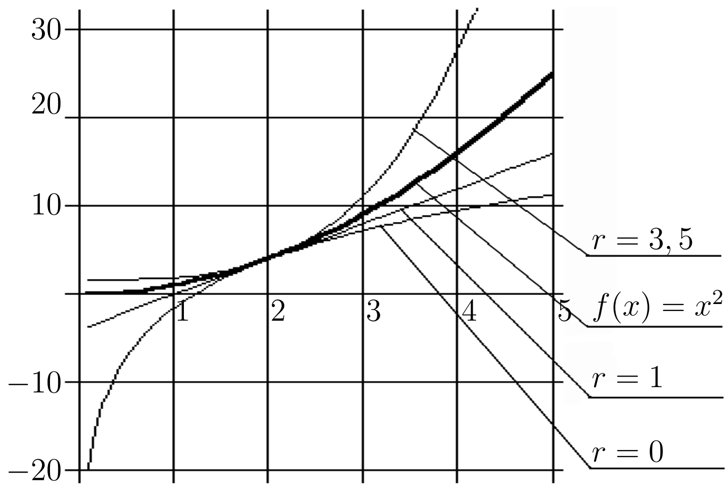
$$\mathrm{H}(\xi) = \begin{cases} A\left(\frac{r\Gamma(p)}{\Gamma(p+1-r)}\left(\xi_0 - C\right)\right)^{p/r}\left(1 + \frac{p}{r}\frac{\xi - \xi_0}{\xi_0 - C}\right), & r \neq 0; \\ e^{\xi_0 - C}\left(1 + \xi - \xi_0\right), & r = 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$Y(x) = \begin{cases} Ax_0^p\left(1 + \frac{p}{r}\frac{x^r - x_0^r}{x_0^r}\right), & r \neq 0; \\ Ax_0^p\left(1 + \ln\frac{x^p}{x_0^p}\right), & r = 0. \end{cases}$$

Тут через $\Gamma(s)$ позначено гамма-функцію числа s.

Можна помітити, що при $p = r$ дотична крива $Y(x)$ збігається із параболою $f(x) = Ax^p$. Так само дотична першого порядку до прямої $f(x) = ax + b$ зливається із самою прямою.

Картина дотичних кривих $Y(x)$ до функції $f(x) = x^2$, побудованих за (7), показана на мал. 2. Таким чином, поняття дотичної прямої, яка асоціюється із похідною



Мал. 2

першого порядку, узагальнюється до дотичної кривої. Геометрична інтерпретація полягає у тому, що похідній довільного порядку $D^r f(x)|_a^x$ ставиться у відповідність певна дотична крива. Для $r < 1$ та $r > 1$ кривина дотичних ліній має різні знаки.

Впровадження диференціюючої функції дозволяє подати дробові похідні у вигляді звичайних похідних першого порядку. Отже, можна переносити всі властивості, а також всі випадки застосування $\eta'(\xi)$ на їх дробові аналоги.

Процес дробового диференціювання можна уявляти як накладання певної нелінійності на диференційовану функцію, а перехід у систему координат η, ξ — як лінеаризацію операції дробового диференціювання.

У системі координат η, ξ проінтегруємо функцію $\eta(\xi)$ у межах ξ_0, ξ.

$$I(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \eta(\tau) d\tau. \tag{8}$$

При переході до y, x знаходимо:

$$I(x) = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)\varphi'(t) dt. \tag{9}$$

Результат інтегрування виражається через інтеграл Стілтьєса із змінною верхньою межею. Умови, яким повинні відповідати $f(x)$ та $\varphi(x)$ для існування (9), детально описані в [2].

Дробовий інтеграл s-го порядку у системі η, ξ для інтегровної функції $\eta(\xi)$ має вигляд

$$D^{-s}\eta(\xi)\big|_{\xi_0}^{\xi} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\eta(\tau)\,(\xi-\tau)^{s-1}\,d\tau. \tag{10}$$

Відповідно до визначених перетворень можемо записати його аналог для системи y, x :

$$D^{-s}f(x)\left|\begin{array}{l}\varphi(x)\\ \varphi(x_0)\end{array}\right. = \frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)\,(\varphi(x)-\varphi(t))^{s-1}\,\varphi'(t)dt. \tag{11}$$

При $\varphi(x)=x$ вираз (11) збігається з інтегралом Рімана-Ліувілля.

Цікавим є процес трансформації звичайних диференціальних рівнянь, записаних у η, ξ, при переході їх до системи координат y, x. Нижче подаємо декілька похідних $\eta(\xi)$ та їх відповідників (для спрощення записів опускаємо значок $|_a^x$ біля похідних дробового порядку).

$$\begin{array}{lll}\frac{d\eta}{d\xi} & \Leftrightarrow & D^r f(x);\\ \frac{d^2\eta}{d\xi^2} & \Leftrightarrow & D^r f(x)\frac{D^{r+1}f(x)}{f'(x)};\\ \frac{d^3\eta}{d\xi^3} & \Leftrightarrow & \frac{D^r f(x)}{f'(x)}\frac{D^{r+1}f(x)}{f'(x)}\left(D^{r+1}f(x)+D^r f(x)\frac{D^{r+2}f(x)}{D^{r+1}f(x)}-D^r f(x)\frac{f''(x)}{f'(x)}\right).\end{array} \tag{12}$$

Коментар до (4) залишається слушним і для цих співвідношень.

Якщо $y(x)\Leftrightarrow\Psi(\xi)$, $g(x)\Leftrightarrow g(\xi)$, $r>0$, то для лінійних диференціальних рівнянь першого і другого порядків, записаних у η, ξ, маємо таку відповідність в y, x:

$$\begin{array}{lll}\Psi'+g(\xi)\Psi=0 & \Leftrightarrow & D^r y+g(x)y=0;\\ \Psi''+g(\xi)\Psi=0 & \Leftrightarrow & D^r y\cdot D^{r+1}y+g(x)yy'=0.\end{array} \tag{13}$$

Очевидно, що можуть бути й інші підходи до задачі інтерпретації дробових похідних та інші результати її розв'язання. Викладене тут слід розглядати лише як першу спробу.

1. *Рибак В. Я.* Про означення і деякі властивості похідних та інтегралів дробового порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2004. – Вип. 9. – С. 45–57.
2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Том 1. – М.: Наука, 1965. – 479 с.

Одержано 16.11.2005