УДК 519.7

Ю. Ю. Червак (Ужгородський нац. ун-т)

ДИЗ'ЮНКТИВНІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНІ ЗАДАЧІ У ЗВ'ЯЗКУ З ПАРЕТІВСЬКОЮ ЗАДАЧЕЮ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

The multicriterion choice in set of alternatives of any nature witch be compared using numerical estimates is done in this article. The Lagrange vector-function is build for DL-problem.

В роботі йдеться про багатокритеріальний вибір на множині альтернатив будь-якої природи, які порівнюються за допомогою числових оцінок. Для DL-задачі побудована векторна функція Лагранжа.

Йдеться про багатокритеріальний вибір на множині альтернатив будь – якої природи [1], які порівнюються між собою за допомогою числових оцінок. Нехай $c_k(x)$, $k = 1, 2, ..., q$, — функції оцінок (скалярні критеріальні функції). Задачі формулюються як задачі векторної оптимізації, транзитивні порядки віддачі переваги в яких визначаються за допомогою опуклих конусів в просторі скалярних критеріїв R^q; $c(x) = (c_1(x), c_2(x), ..., c_q(x))^T$ — векторна критеріальна функція. Як основна розв'язується узагальнена паретівська задача (UP-задача) [1, 2] з допустимою множиною альтернатив X, визначеної будь-яким способом. Порядок віддачі переваги в цій задачі (UP-порядок) визначається опуклим конусом UP в R^q як множиною точок (векторів) $u = (u_1, u_2, ..., u_q)^T$, що задовольняють паретівській нерівності $\pi u >^P 0$, де $\pi = \{\pi_{ij}\}$ — невироджена $q \times q$ матриця, така що UP-порядок є підпорядком лексикографічного порядку (L-порядку), визначеного опуклим конусом L в R^q як множиною лексикографічно додатних точок ($u >^L 0$). В загальному, UP-порядок є підпорядком L-порядку за правилом віддачі переваги, якщо і тільки якщо $UP \subset L$ [1]. З попереднього припущення випливає, що оптимальний розв'язок лексикографічної задачі (L-задачі) є й оптимальним розв'язком UP-задачі, якщо ці задачі визначені однією і тією критеріальною функцією та однією і тією допустимою множиною альтернатив [1].

Перелік оптимальних розв'язків UP-задачі здійснюється за схемою подібною тій, яка описана в статті [3]. За цією схемою, на кожному кроці розв'язується кон'юнктивна лексикографічна задача (KL-задача) — задача, допустима множина в якій визначена як перетин множин. При цьому, може бути, що оптимальний розв'язок не кожної з KL-задач є й оптимальним розв'язком паретівської задачі (P-задачі), що призводить до повного перебору множини допустимих значень функції $c(x)$ — до перебору точок множини $C = \{c(x) \,|\, x \in X\}$.

На кожному кроці схеми переліку оптимальних значень функції $c(x)$ в UP-задачі, схеми, яка пропонується тут, розв'язується диз'юнктивна лексикографічна задача (DL-задача) —- задача, допустима множина в якій визначена як об'єднання множин. Оптимальні розв'язки кожної з DL-задач являються оптимальними розв'язками UP-задачі.

Стосовно DL-задачі в загальній постановці, допустима множина в якій визначена за допомогою обмежень–нерівностей на X, побудована векторна функція Лагранжа — узагальнення скалярної функції Лагранжа диз'юнктивної задачі математичного програмування [4]. Встановлено зв'язок між існуванням сідлової точки (або "сідла", якщо альтернативи не є елементами абстрактного простору) і оптимальним розв'язком цієї задачі.

Нехай $\hat{c}$ — будь-яке оптимальне значення функції $c(x)$ в UP-задачі, $\hat{C}$ — множина оптимальних значень ($\hat{C} \subset C$). Верхній переріз цього значення, який складається з точок c, які задовольняють паретівську нерівність $\pi c >^P \pi\hat{c}$, не містить жодної точки множини C, а множина $S(\hat{c})$, яка складається з точок, що задовольняють паретівську нерівність $\pi c \leqslant^P \pi\hat{c}$, тобто множина розв'язків системи лінійних нерівностей

$$\pi_i c \leqslant \pi_i \hat{c},\ i = 1, 2, ..., q, \tag{1}$$

де π_i — i-й вектор – рядок матриці π, не містить жодного оптимального значення, відмінного від $\hat{c}$. Отже, якщо існує $c \in \hat{C},\ c \neq \hat{c}$, то c належить доповненню $\overline{S}(\hat{c})$ множини $S(\hat{c})$ до R^q, точніше, c належить $C \bigcap \overline{S}(\hat{c})$. За умови невиродженості матриці π, $S(\hat{c})$ є об'єднанням значення $\hat{c}$ як одноелементної множини і його нижнього перерізу. Зазначимо, якщо $S_i(\hat{c})(i = 1, 2, ..., q)$ — множина точок, що задовольняють i–ву нерівність системи (1), то доповненням $\overline{S}_i(\hat{c})$ множини $S_i(\hat{c})$ до R^q є множина точок, що задовольняють нерівність

$$\pi_i c > \pi_i \hat{c}. \tag{2}$$

Таким чином, за правилом де Моргана стосовно операцій об'єднання і перетину [5], $\overline{S}(\hat{c}) = \bigcup\limits_{i=1}^{q} \overline{S}_i(\hat{c})$, так як $S(\hat{c}) = \bigcap\limits_{i=1}^{q} S_i(\hat{c})$.

Нехай $B \subset \hat{C}$ — скінчена підмножина множини $\hat{C}$; $\overline{B}$ – доповнення множини B до множини $\hat{C}$; $S_B = \bigcup\limits_{c \in B} S(c) = \bigcup\limits_{c \in B} \left(\bigcap\limits_{i=1}^{q} S_i(c) \right)$. За правилом де Моргана, доповнення $\overline{S}_B$ множини S_B до R^q визначається за формулою

$$\overline{S}_B = \bigcap_{c \in B} \overline{S}(c) = \bigcap_{c \in B} \left(\bigcup_{i=1}^{q} \overline{S}_i(c) \right). \tag{3}$$

Так як $\overline{B} \bigcap S(c) = \emptyset$, якщо $c \in B$, то $\overline{B} \bigcap S_B = \emptyset$. Отже, $\overline{B} \subset \overline{S}_B$, точніше,

$$\overline{B} \subset \overline{C}_B, \tag{4}$$

де $\overline{C}_B = C \bigcap \overline{S}_B$. Зазначимо, якщо $C_B = C \bigcap S_B$, то $B \subset C_B$, $C = C_B \bigcup \overline{C}_B$.

Нехай $\overset{\vartriangle}{C}_B$ — множина значень функції $C(x)$, оптимальних на $\overline{C}_B$ в UP-порядку. За умови (4), природньо, постає питання, чи точки множини $\overline{B}$ належать також множині $\overset{\vartriangle}{C}_B$? Виявляється, що множини $\overline{B}$ і $\overset{\vartriangle}{C}_B$ співпадають, отже, якщо $\overset{\vartriangle}{C}_B = \emptyset$, то $\overline{B} = \emptyset$, тобто $B = \hat{C}$. Доведемо це твердження.

Теорема 1.

$$\overline{B} = \overset{\vartriangle}{C}_B \tag{5}$$

Доведення. Нехай $b \in \overline{B}$ — будь-яка точка ($\overline{B} \neq \emptyset$). За умови (4), $b \in \overline{C}_B$. Покажемо, що $b \in \overset{\vartriangle}{C}_B$. Припустимо супротивне. Тоді існує вектор $c \in \overline{C}$, такий що $\pi c >^P \pi b$. Так як $\overline{C}_B \subset C$, то це суперечить оптимальності b на C в UP-порядку. Таким чином, якщо $\overline{B} \neq \emptyset$, то виконується умова включення

$$\overline{B} \subset \overset{\vartriangle}{C}_B. \tag{6}$$

Ця умова виконується також, формально, якщо $\overline{B} = \emptyset$.

З другого боку, нехай $b \in \overset{\triangle}{C}_B$ — будь-яка точка. Покажемо, що $b \in \overline{B}$, тобто $b \in \hat{C}$. Припустимо супротивне, тобто що $b \notin \overline{B}$. Це означає, що $b \notin \hat{C}$, так як $\hat{C} = B \bigcup \overline{B}$, $B \bigcap \overset{\triangle}{C}_B = \emptyset$. Тоді існує $c \in C$, таке що

$$\pi c >^P \pi b. \tag{7}$$

Так як $b \in \overset{\triangle}{C}_B$, то $c \notin \overline{C}_B$, тобто $c \notin \overline{S}_B$. Отже, $c \in S_B$, так як $S_B \bigcup \overline{S}_B = R^q$, $S_B \bigcap \overline{S}_B = \emptyset$. Тоді існує $\hat{c} \in B$, таке що

$$\pi \hat{c} \geqslant^P \pi c. \tag{8}$$

За транзитивністю UP-порядку, з відношень (7) і (8) випливає відношення $\pi \hat{c} \geqslant^P \pi b$. Це означає, що $b \in S_B$, тобто $b \notin \overline{S}_B$. Так як $\overset{\triangle}{C}_B \subset \overline{S}_B$, то маємо протиріччя. Отже виконується умова включення

$$\overline{B} \supset \overset{\triangle}{C}_B. \tag{9}$$

Таким чином, з умов (6) і (9) випливає рівність (5). Теорема доведена.

Зазначимо, перелік оптимальних розв'язків UP-задачі зводиться до переліку оптимальних значень функції $c(x)$, тобто до переліку точок множини $\hat{C}$. Він може здійснюватися за схемою, на початковому (нульовому) кроці якої знаходиться лексикографічний максимум $\hat{c}^1$ цієї множини, тобто розв'язується L-задача, яку в просторі критеріїв або в множині альтернатив запишемо, коротко, так:

$$max^L c, \ c \in C, \tag{10}$$

або $max^L c(x), x \in X$. При цьому, нагадаємо, що UP-порядок є підпорядком L-порядку на R^q за правилом віддачі переваги і, по-друге множина C має лексикографічний максимум. Отже, на першому кроці схеми множина оптимальних значень B містить одну точку $\hat{c}^1$.

Розглянемо r-ий крок ($r \geqslant 1$), на якому множина $B \subset \hat{C}$ складається з r точок $\hat{c}^l, \ l = 1, 2, ..., r$, знайдених на 0-му, 1-му, ..., $(r-1)$-му кроках. На цьому кроці знаходиться лексикографічний максимум $\hat{c}^{r+1}$ множини $\overline{C}_B$ $(= C \bigcap \overline{S}_B)$, тобто розв'язується L-задача:

$$max^L c, \ c \in \overline{C}_B. \tag{11}$$

При цьому, за формулою (3), множина $\overline{S}_B$ визначається так:

$$\overline{S}_B = \bigcap_{l=1}^{r} \left(\bigcup_{i=1}^{q} \overline{S}_i(\hat{c}^l) \right) = \bigcup_{v \in Q^r} \left(\bigcap_{l=1}^{r} \overline{S}_{v_l}(\hat{c}^l) \right), \tag{12}$$

де Q^r — r-ва декартова степінь множини індексів $Q = \{1, 2, ..., q\}$, $v = \{v_1, v_2, ..., v_q\}^T$. Отже, за формулою (12), $\overline{S}_B$ є об'єднанням q^r множин, відповідних векторам множини Q^r. Вектору $v \in Q^r$ відповідає перетин множин $\overline{S}_{v_l}(\hat{c}^l), \ l = 1, 2, ..., r$. Так як кожна з цих множин задається нерівністю вигляду (2), то їх перетин задається системою нерівностей

$$\pi_{v_l} c > \pi_{v_l} \hat{c}^l, \ l = 1, 2, ..., r. \tag{13}$$

Зазначимо, точка c належить множині $\overline{C}_B$, якщо і тільки якщо $c \in C$ і існує вектор $v \in Q^r$, такий, що точка c задовольняє відповідну йому систему нерівностей

(13). Таким чином, задача (11) є DL–задачею. В множині альтернатив запишемо її так:

$$max^L c(x),\ x \in X \tag{14}$$

$$\exists v \in Q^r, \pi_{v_l} c(x) > \pi_{v_l} \hat{c}^l,\ l = 1, 2, ..., r. \tag{15}$$

Якщо задача (14) – (15) має оптимальний розв‘язок, з відповідним йому оптимальним значенням $\hat{c}^{r+1}$, то за теоремою 1, він є оптимальним розв'язком UP-задачі, $\hat{c}^{r+1} \in \hat{C}$. Якщо ж вона недопустима, тобто $\overline{C}_B = \emptyset$, то $B = \hat{C}$.

Наявність в обмеженнях (15) DL–задачі строгих нерівностей може спричинити незамкненість її допустимої множини, отже, допустима задача може не мати оптимального розв‘язку, якщо, навіть, її допустима множина обмежена. Але, якщо, наприклад, виконуються або накладаються відповідні умови цілочисловості (дискретності), то системи строгих нерівностей в умові (15) можуть бути замінені системами нестрогих нерівностей.

Серед нерівностей (13) можуть бути дві або більше однакові нерівності, бо вектор $v \in Q^r$, який відповідає їх системі, може мати дві або більше рівні компоненти.

Якщо система нерівностей (13) має однакові нерівності то, очевидно, замість них в системі доцільно залишити тільки одну, інші вилучити. Отже, враховуючи це зауваження, допустимою множиною DL-задачі (14) – (15) є об‘єднання q^r підмножин множини X, кожна з яких задається на X за допомогою не більше ніж r нерівностей. Допустимою множиною L-задачі (10), яка розв‘язується на 0-му кроці є допустима множина X UP-задачі.

Отже, в загальному, допустима множина G DL-задачі

$$max^L c(x),\ x \in G, \tag{16}$$

є об‘єднанням деякого числа n заданих множин $G_j,\ j = 1, 2, ..., n$ $(n > 1)$. (В задачі (14) – (15), нагадаємо, число цих множин рівне q^r. Кожна з них відповідає певному вектору $v \in Q^r$ і є перетином множини X з множиною альтернатив, які задовольняють нерівності системи r нерівностей в умові (15).)

Розглянемо n KL-задач:

$$max^L c(x),\ x \in G_j,\ j \in N, \tag{17}$$

$N = \{1, 2, ..., n\}$. Нехай $\overline{N} = \{j \in N |\ G_j \neq \emptyset\}$. Очевидно, $\hat{x}$ є оптимальним розв‘язком задачі (16), якщо і тільки якщо $\hat{x}$ є оптимальним розв‘язком однієї із задач (17) і для всіх $x \in G$ виконується нестрога лексикографічна нерівність $c(\hat{x}) \geqslant^L c(x)$. Зокрема, нехай $\hat{G}_j,\ j \in \overline{N}$ — множини оптимальних розв‘язків відповідних (допустимих) задач (17); $\hat{c}^t = max^L\{\hat{c}^j |\ j \in \overline{N}\}$, де $\hat{c}^j$ — оптимальне значення функції $c(x)$ в j-ій задачі (17); $\overset{\vartriangle}{N} = \{j \in \overline{N} |\ \hat{c}^j = \hat{c}^t\}$. Тоді $\hat{G} = \bigcup\limits_{j \in \overset{\vartriangle}{N}} \hat{G}_j$ є множиною оптимальних розв‘язків задачі (16).

Нехай множина G_j $(j \in N)$ в множині альтернатив A задана системою нерівностей $g_i^j(x) \geqslant b_i,\ i = 1, 2, ..., m_j$ $(m_j \geqslant 1)$; g_i^j — скалярна функція, визначена на A, b_i — задане число. Розглянемо DL-задачу

$$\begin{gathered} max^L c(x), \\ \exists j \in N,\ g_i^j(x) \geqslant b_i,\ i = 1, 2, ..., m_j, \end{gathered} \tag{18}$$

і для неї побудуємо векторну функцію $Z(x,y) = c(x) + \max\limits_{j\in N}{}^{L} \sum\limits_{i=1}^{m_j} (g_i^j - b_i)y_i,\ x \in A$, $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ — кортеж (вектор-вектор [1]), компонентами якого є вектори $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{iq}) \in R^q,\ i = 1, 2, ..., m,\ m = \max\limits_{j\in N} m_j$. Цю функцію називаємо функцією Лагранжа задачі (18); $y_i,\ i = 1, 2, ..., m$ — векторними множниками Лагранжа. Вона залежить від альтернативи $x \in A$ і $m\times q$ дійсних змінних, які складають кортеж y, і приймає значення в R^q. Пару $(\hat{x}, \hat{y})$, $\hat{x} \in A$, $\hat{y} \in R^{m\times q}$, називаємо сідлом функції Z (або сідловою точкою функції Z, якщо x є точкою абстрактного простору), якщо і тільки якщо

$$Z(\hat{x}, y) \geqslant^L Z(\hat{x}, \hat{y}) \geqslant^L Z(x, \hat{y}) \tag{19}$$

для всіх $x \in A$, $y_i \geqslant^L 0, i = 1, 2, ..., m$.

Теорема 2. *Якщо $(\hat{x}, \hat{y})$ сідло функції Z, то виконується лексикографічна нерівність*

$$\max_{j\in N}{}^{L} \sum_{i=1}^{m_j} (g_i^j(\hat{x}) - b_i)\hat{y}_i \leqslant^L 0 \tag{20}$$

Доведення. Розглянемо ліву з лексикографічних нерівностей (19): $Z(\hat{x}, y) \geqslant^L Z(\hat{x}, \hat{y})$, для всіх $y_i \geqslant^L 0, i = 1, 2, ..., m$. Враховуючи вигляд функції Z, з цієї нерівності випливає, що

$$\max_{j\in N}{}^{L} \sum_{i=1}^{m_j} (g_i^j(\hat{x}) - b_i)y_i \geqslant^L \max_{j\in N}{}^{L} \sum_{i=1}^{m_j} (g_i^j(\hat{x}) - b_i)\hat{y}_i \tag{21}$$

для всіх $y_i \geqslant^L 0, i = 1, 2, ..., m$. Так як ліва частина в лексикографічній нерівності (21) дорівнює нульовому вектору, якщо $y_i = 0,\ i = 1, 2, ..., m$, то з неї випливає лексикографічна нерівність (20). Теорема доведена.

Теорема 3. *Якщо лексикографічна нерівність* (20) *виконується, як строга нерівність, тоді $\hat{x}$ є недопустимою альтернативою в задачі* (18) *($\hat{x} \notin G$), отже $\hat{x}$ не є оптимальним розв'язком цієї задачі.*

Доведення. Нехай $\max\limits_{j\in N}{}^{L} \sum\limits_{i=1}^{m_j} (g_i^j(\hat{x}) - b_i)\hat{y}_i = \sum\limits_{i=1}^{m_t} (g_i^t(\hat{x}) - b_i)\hat{y}_i$ ($<^L 0$). Отже, строга лексикографічна нерівність $\sum\limits_{i=1}^{m_j} (g_i^j(\hat{x}) - b_i)\hat{y}_i <^L 0$ виконується і для $j \in N,\ j \neq t$. Тоді, очевидно, це означає, що для кожного $j \in N$ існує $t_j \in N,\ 1 \leqslant t_j \leqslant m_j$, таке, що $g_{t_j}^j(\hat{x}) < b_{t_j}$, тобто $\hat{x} \notin G_j,\ j \in N$. Теорема доведена.

Теорема 4. *Якщо $\hat{x}$ в сідлі функції Z є допустимим розв'язком задачі* (18) *($\hat{x} \in G$), тоді лексикографічна нерівність* (20) *виконується як рівність.*

Доведення. За умови теореми, існує $t_j \in N$, такий що $g_i^{t_j}(\hat{x}) \geqslant b_i,\ i = 1, 2, ..., m_{t_j}$. Отже, за означенням функції Z, виконується лексикографічна нерівність

$$\max_{j\in N}{}^{L} \sum_{i=1}^{m_j} (g_i^j(\hat{x}) - b_i)\hat{y}_i \geqslant^L 0. \tag{22}$$

Тоді з лексикографічних нерівностей (20) і (22) випливає рівність

$$\max_{j\in N}{}^{L} \sum_{i=1}^{m_j} (g_i^j(\hat{x}) - b_i)\hat{y}_i = 0. \tag{23}$$

Теорема доведена.

Теорема 5. *Якщо* $\hat{x}$ *в сідлі функції* Z *є допустимим розв'язком задачі* (18), *тоді* $\hat{x}$ *є оптимальним розв'язком цієї задачі.*

Доведення. За теоремою 4 виконується рівність (23). Тоді, за означенням сідла функції Z, з правої з лексикографічних нерівностей (19) випливає, що

$$c(\hat{x}) \geqslant^L c(x) + \underset{j\in N}{max}^L \sum_{i=1}^{m_j} (g_i^j(x) - b_i)\hat{y}_i \tag{24}$$

для всіх $x \in G$, так як $G \subset A$. Отже, існує $t_j \in N$, такий, що $g_i^{t_j}(x) \geqslant b_i$, $i = 1, 2, ..., m_{t_j}$, для всіх G_{t_j}, тобто

$$\underset{j\in N}{max}^L \sum_{i=1}^{m_j} (g_i^j(x) - b_i)\hat{y}_i \geqslant^L 0 \tag{25}$$

для всіх $x \in G$. Враховуючи умову (25), з умови (24) маємо, що $c(\hat{x}) \geqslant^L c(x)$ для всіх $x \in G$. Теорема доведена.

1. *Червак Ю. Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. – 312 с.
2. *Червак О. Ю., Червак Ю. Ю.* Узагальнені лексикографічна і паретівська задачі багатокритеріальної оптимізації // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2004. – Вип. 9. – С. 107–109.
3. *Червак О.Ю., Червак Ю.Ю.* Умова оптимальності в підпорядку повного порядку віддачі переваги // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 7. – С. 115–119.
4. *Еремин И. И.* Теория линейной оптимизации. – Екатеринбург: УроРАН, 1999. – 312 с.
5. *Фор Р., Кофман А., Дени–Папен Н.* Современная математика. – Москва: Мир, 1966. – 271 с.

Одержано 16.10.2005