Т. М. Антонова (Національний університет "Львівська політехніка")
О. М. Сусь (Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів)

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ДЕЯКИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ НАБЛИЖЕНЬ ПАРНОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

Sufficient conditions of monotonicite, boundedness and convergence for sequences of approximants of even order for twodimensional continued fractions with nonpositive partial numerators and partial denominators equal to one are established.

Встановлено достатні умови монотонності, обмеженості та збіжності послідовностей підхідних дробів парного порядку двовимірних неперервних дробів з недодатними частинними чисельниками та частинними знаменниками, рівними одиниці.

Вивчення властивостей послідовностей підхідних дробів, як неперервних дробів, так і їх багатовимірних узагальнень, є актуальною проблемою в теорії наближень, якій присвячено багато робіт. Найкраще вивченими є неперервні дроби з додатними елементами, характерною властивістю яких є властивість "вилки що задається системою нерівностей $f_{2k} < f_{2k+2} < f_{2j+1} < f_{2j-1}$, де k, j — довільні натуральні числа, (f_k — k)-е наближення неперервного дробу. Питання збіжності таких неперервних дробів повністю вирішується критерієм Зейделя-Штерна [1, 2].

Властивість "вилки"справджується і для наближень багатовимірних узагальнень неперервних дробів — гіллястих ланцюгових дробів загального вигляду [3], і для двовимірних неперервних дробів (ДНД) з додатними елементами [4]. Але, якщо f_k, $(k = 1, 2, \ldots)$, — фігурні наближення ДНД, то ця властивість не виконується. Є порівняно небагато робіт, присвячених вивченню інших класів багатовимірних узагальнень неперервних дробів з дійсними елементами, зокрема, дробів з недодатними і знакозмінними частинними чисельниками [5–7].

У даній роботі, використовуючи методику запропоновану в [5], досліджуються послідовності звичайних та фігурних наближень двовимірних неперервних дробів парного порядку [8].

Розглянемо двовимірний неперервний дріб вигляду

$$\Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i}, \quad \Phi_i = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Скінченні ДНД, що визначаються за формулою

$$f_{2n} = \Phi_0^{(2n)} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{2n} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i^{(2n-i)}}, \quad n = 1, 2 \ldots \tag{2}$$

називаються парними ($2n$-ми) наближеннями або підхідними дробами ДНД (1).

Скінченні ДНД, що задаються виразами вигляду

$$\tilde{f}_{2n} = \Phi_0^{(2n)} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i^{(2n-2i)}}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

називаються парними ($2n$-ми) фігурними наближеннями ДНД (1).

В наближеннях (2), (3)

$$\Phi_i^{(0)} = 0, \quad \Phi_i^{(k)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{k} \frac{a_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{k} \frac{a_{i,i+j}}{1}, \quad i = 0,1,\ldots, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{4}$$

Вирази вигляду

$$Q_i^{(p+1)} = 1 + \Phi_i^{(p+1)} + \frac{a_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(p)}}, \ \ Q_i^{(0)} = 1, \ \ i = 1,2,\ldots, \ p = 0,1,2,\ldots, \tag{5}$$

$$\tilde{Q}_i^{(p+2)} = 1 + \Phi_i^{(p+2)} + \frac{a_{i+1,i+1}}{\tilde{Q}_{i+1}^{(p)}}, \ \ \tilde{Q}_i^{(0)} = 1, \ \ \tilde{Q}_i^{(1)} = 1 + \Phi_i^{(1)}, \ i = 1,2,\ldots, \ p = 0,1,\ldots \tag{6}$$

називаються залишками ДНД (2) і (3) відповідно.

При дослідженні властивостей багатовимірних узагальнень неперервних дробів використовуються формули різниці між підхідними дробами різних порядків, які для різниць наближень $2m$-ого та $2n$-ого порядків ($m > n$), (у припущені, що всі залишки, які визначаються за формулами (5)–(6), відмінні від нуля) мають вигляд [3]

$$f_{2m} - f_{2n} = \Phi_0^{(2m)} - \Phi_0^{(2n)} + \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \prod_{j=1}^{i} \frac{a_{jj}}{Q_j^{(2m-j)} Q_j^{(2n-j)}} \cdot (\Phi_i^{(2m-i)} - \Phi_i^{(2n-i)}) +$$
$$+ (-1)^{2n} \frac{\prod\limits_{j=1}^{2n+1} a_{jj}}{\prod\limits_{j=1}^{2n+1} Q_j^{(2m-j)} \prod\limits_{j=1}^{2n} Q_j^{(n-j)}}, \tag{7}$$

$$\tilde{f}_{2m} - \tilde{f}_{2n} = \Phi_0^{(2m)} - \Phi_0^{(2n)} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \prod_{j=1}^{i} \frac{a_{jj}}{\tilde{Q}_j^{(2m-2j)} \tilde{Q}_j^{(2n-2j)}} (\Phi_i^{(2m-2i)} - \Phi_i^{(2n-2i)}) +$$
$$+ (-1)^n \frac{\prod\limits_{j=1}^{n+1} a_{jj}}{\prod\limits_{j=1}^{n+1} \tilde{Q}_j^{(2m-2j)} \prod\limits_{j=1}^{n} \tilde{Q}_j^{(2n-2j)}}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Нехай елементи ДНД* (1) *задовольняють умови*

$$a_{ii} \le 0, \quad i = 1,2,\ldots, \tag{9}$$

$$\Phi_i^{(2q+s)} \ge \Phi_i^{(s)}, \quad i = 0,1,\ldots, \quad q = 1,2,\ldots, \quad s = 0,1,2,\ldots, \tag{10}$$

$$\varphi_0 \ge \Phi_0^{(2r)}, \quad r = 1,2,\ldots, \tag{11}$$

$$|a_{2k,2k}| \ge (1 + \Phi_{2k}^{(2r)} + \frac{|a_{2k+1,2k+1}|}{g_{2k+1,2k+1}})(1 + \Phi_{2k-1}^{(2r+1)} + g_{2k-1,2k-1}), \tag{12}$$
$$|a_{2k,2k}| \ge (1 + \Phi_{2k-1}^{(1)} + g_{2k-1,2k-1}), \quad k = 1,2\ldots, r = 1,2,\ldots,$$

де φ_0, $g_{i,i}(i = 1, 2, \ldots)$ *— деякі додатні числа, величини* $\Phi_i^{(r)}, (r = 1, 2, \ldots)$ *визначаються за формулами* (4).

Тоді послідовність $\{f_{2k}\}, k = 1, 2, \ldots$ *наближень ДНД (1) є збіжною послідовністю для якої виконується нерівність*

$$0 \leq f_2 \leq f_4 \leq \ldots \leq f_{2m} \leq \ldots \leq \varphi_0 + \frac{|a_{11}|}{g_{11}}. \tag{13}$$

Доведення. Розглянемо формулу різниці (7) і покажемо, що за умов теореми $f_{2m} - f_{2n} \geq 0, \quad m > n, \quad (m, n = 1, 2, \ldots)$. Для цього оцінимо значення залишків $Q_i^{(2p-i)}$, $i = 1, \ldots, 2p$, $p = 1, \ldots$, використовуючи формули (5) та умови теореми (9), (10), (12). Очевидно, що

$$Q_{2p}^{(0)} = 1, \quad Q_{2p-1}^{(1)} = 1 + \Phi_{2p-1}^{(1)} - |a_{2p,2p}|,$$

$$-Q_{2p-1}^{(1)} = |a_{2p,2p}| - (1 + \Phi_{2p-1}^{(1)}) \geq g_{2p-1,2p-1},$$

$$Q_{2p-2}^{(2)} = 1 + \Phi_{2p-2}^{(2)} + \frac{|a_{2p-1,2p-1}|}{-Q_{2p-1}^{(1)}} \leq 1 + \Phi_{2p-2}^{(2)} + \frac{|a_{2p-1,2p-1}|}{g_{2p-1,2p-1}},$$

$$-Q_{2p-3}^{(3)} = \frac{|a_{2p-2,2p-2}|}{Q_{2p-2}^{(2)}} - (1 + \Phi_{2p-3}^{(3)}) \geq$$

$$\geq \frac{|a_{2p-2,2p-2}|}{1 + \Phi_{2p-2}^{(2)} + \dfrac{|a_{2p-1,2p-1}|}{g_{2p-1,2p-1}}} - (1 + \Phi_{2p-3}^{(3)}) \geq g_{2p-3,2p-3}.$$

Продовжуючи аналогічні міркування, одержимо нерівності

$$1 + \Phi_{2k}^{(2p-2k)} \leq Q_{2k}^{(2p-2k)} \leq 1 + \Phi_{2k}^{(2p-2k)} + \frac{|a_{2k+1,2k+1}|}{g_{2k+1,2k+1}}, \; k = 1, \ldots, 2p, \; p = 1, \ldots, \tag{14}$$

$$Q_{2k-1}^{(2p-2k+1)} \leq -g_{2k-1,2k-1}, \;\; k = 1, 2, \ldots, 2p, \;\; p = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

З нерівностей (14), (15) випливає, що

$$\prod_{j=1}^{i} Q_j^{(2n-j)} Q_j^{(2m-j)} = \prod_{j=1}^{i} |Q_j^{(2n-j)}||Q_j^{(2m-j)}|, \tag{16}$$

$$\prod_{j=1}^{2n+1} Q_j^{(2m-j)} = (-1)^{n+1} \prod_{j=1}^{2n+1} |Q_j^{(2m-j)}|, \quad \prod_{j=1}^{2n} Q_j^{(2n-j)} = (-1)^n \prod_{j=1}^{2n} |Q_j^{(2n-j)}|. \tag{17}$$

Враховуючи умови теореми (9),(10), рівності (16), (17) та формули (7) доходимо висновку, що

$$f_{2m} - f_{2n} \geq 0, \;\; m > n.$$

Використовуючи формули (2), (5), умову (11) і оцінку (15), одержимо

$$f_{2m} = \Phi_0^{(2m)} + \frac{a_{11}}{Q_1^{(2m-1)}} \leq \varphi_0 + \frac{|a_{11}|}{g_{11}}, \quad m = 1, 2, \ldots \;.$$

Отже, нерівність (13) справджується.

Оскільки послідовність $\{f_{2m}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, парних підхідних дробів ДНД (1), є неспадною та обмеженою зверху, то вона — збіжна.

Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай елементи ДНД* (1) *задовольняють умови* (9), (11) *та*

$$\Phi_i^{(4q+2s)} \geq \Phi_i^{(2s)}, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad q = 1, 2, \ldots, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

$$|a_{2k,2k}| \geq (1 + \Phi_{2k}^{(2r)} + \frac{|a_{2k+1,2k+1}|}{g_{2k+1,2k+1}})(1 + \Phi_{2k-1}^{(2r+2)} + g_{2k-1,2k-1}), \tag{19}$$
$$r = 1, 2, \ldots,$$

де $\varphi_0, \quad g_{i,i} (i = 1, 2, \ldots)$ — *деякі додатні числа, величини* $\Phi_i^{(r)}, (r = 1, 2, \ldots)$ *визначаються за формулами* (4). *Тоді послідовність* $\{\tilde{f}_{4k}\}, k = 1, 2, \ldots,$ *фігурних наближень ДНД* (1), *є збіжною і для неї виконується нерівність*

$$\tilde{f}_4 \leq \tilde{f}_8 \ldots \leq \tilde{f}_{4m} \leq \ldots \leq \varphi_0 + \frac{|a_{11}|}{g_{11}}. \tag{20}$$

Якщо, крім того,

$$|a_{2k+1,2k+1}| < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

то послідовність $\left\{\tilde{f}_{2m}\right\}$ *є збіжною і*

$$\tilde{f}_{4m} \leq \tilde{f}_{4m+6} \leq \tilde{f}_{4m+8}, \ \ m = 1, 2, \ldots.$$

Доведення. Для доведення теореми використовується методика доведення попередньої. Для залишків $\tilde{Q}_i^{(4p)}$, $(i = 1, \ldots, 2p)$, фігурних наближень $\tilde{f}_{4p}$, $(p = 1, 2, \ldots)$, з урахуванням умов (9), (18), (19) вірними є такі оцінки:

$$\tilde{Q}_{2p}^{(0)} = 1, p = 1, 2, \ldots,$$
$$1 + \Phi_{2k}^{(4p)} \leq \tilde{Q}_{2k}^{(4p)} \leq 1 + \Phi_{2k}^{(4p)} + \frac{|a_{2k+1,2k+1}|}{g_{2k+1,2k+1}}, k = 1, 2, \ldots, p = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$
$$\tilde{Q}_{2k-1}^{(4p-2)} \leq -g_{2k-1,2k-1}, k = 1, 2, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Якщо виконується ще й умова (21), тоді

$$\tilde{Q}_{2p+1}^{(0)} = 1, \qquad 0 < \tilde{Q}_{2p}^{(2)} \leq 1 + \Phi_{2p}^{(2)}, \ p = 1, 2, \ldots,$$
$$1 + \Phi_{2k}^{(4p+2)} \leq \tilde{Q}_{2k}^{(4p+2)} \leq 1 + \Phi_{2k}^{(4p+2)} + \frac{|a_{2k+1,2k+1}|}{g_{2k+1,2k+1}}, \ k = 1, 2, \ldots, \ \ p = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$
$$-\tilde{Q}_{2k-1}^{(4p)} \geq g_{2k-1,2k-1}, \ k = 1, 2, \ldots, \ \ p = 1, 2, \ldots.$$

Правильність нерівностей (20) випливає з формули різниці (8), умови (11) та оцінок (22). Отже, послідовність $\{\tilde{f}_{4k}\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$, — збіжна.

Розглянемо різниці $\tilde{f}_{4n+6} - \tilde{f}_{4n}$, і $\tilde{f}_{4n+8} - \tilde{f}_{4n}$. Враховуючи умови теореми (9), (18), (19), (21) та оцінки (22), (23), маємо

$$\tilde{f}_{4n+6} - \tilde{f}_{4n} = |\Phi_0^{(4n+6)} - \Phi_0^{(4n)}| + \sum_{i=1}^{2n} |\Phi_i^{(4n+6-2i)} - \Phi_i^{(4n-2i)}| \cdot$$

$$\prod_{j=1}^{i} \frac{|a_{jj}|}{|\tilde{Q}_j^{(4n+6-2j)} \tilde{Q}_j^{(4n-2j)}|} + \prod_{j=1}^{2n} \frac{|a_{jj}|}{|\tilde{Q}_j^{(4n+6-2j)} \tilde{Q}_j^{(4n-2j)}|} \cdot \left(\frac{-|a_{2n+1,2n+1}|}{-|Q_{2n+1}^{(4)}|} \right) \geq 0,$$

$$\tilde{f}_{4n+8}-\tilde{f}_{4n+6}=|\Phi_0^{(4n+8)}-\Phi_0^{(4n+6)}|+$$

$$+\sum_{i=1}^{2n+2}|\Phi_i^{(4n+8-2i)}-\Phi_i^{(4n+6-2i)}|\cdot\prod_{j=1}^{i}\frac{|a_{jj}|}{|\tilde{Q}_j^{(4n+8-2j)}\tilde{Q}_j^{(4n+6-2j)}|}+$$

$$+\prod_{j=1}^{2n+2}\frac{|a_{jj}|}{|\tilde{Q}_j^{(4n+8-2j)}\tilde{Q}_j^{(4n+6-2j)}|}\cdot\left(\frac{-|a_{2n+3,2n+3}|}{|\tilde{Q}_{2n+3}^{(2)}\tilde{Q}_{2n+3}^{(0)}|}\right)\left(\Phi_{2n+3}^{(2)}-\frac{|a_{2n+4,2n+4}|}{\tilde{Q}_{2n+4}^{(0)}}\right)=$$

$$=|\Phi_0^{(4n+8)}-\Phi_0^{(4n+6)}|+\sum_{i=1}^{2n+2}|\Phi_i^{(4n+8-2i)}-\Phi_i^{(4n+6-2i)}|\cdot\prod_{j=1}^{i}\frac{|a_{jj}|}{|\tilde{Q}_j^{(4n+8-2j)}\tilde{Q}_j^{(4n+6-2j)}|}+$$

$$\prod_{j=1}^{2n+3}\frac{|a_{jj}|}{|\tilde{Q}_j^{(4n+8-2j)}\tilde{Q}_j^{(4n+6-2j)}|}\cdot\left(|a_{2n+4,2n+4}|-\Phi_{2n+3}^{(2)}\right)\geq 0,$$

тому

$$\tilde{f}_{4n}\leq\tilde{f}_{4n+6}\leq\tilde{f}_{4n+8},\quad n=1,2,\ldots.$$

З останньої нерівності і збіжності послідовності $\{\tilde{f}_{4k}\}$ випливає збіжність послідовності $\{\tilde{f}_{2k}\}$.

Теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай для часткових чисельників ДНД* (1) *виконуються умови* (9), (10) (12), (19) *та*

$$\Phi_{2m-1}^{(2)}-\Phi_{2m-1}^{(1)}\geq 0,\quad m=1,2,\ldots,$$

$$\Phi_i^{(q+s)}\geq\Phi_i^{(s)},\quad i=1,\ldots,\ q=2,\ldots,\ s=0,1,\ldots$$

Тоді для звичайних та фігурних наближень ДНД (1) *справджуються нерівності*

$$f_{2m}\leq\tilde{f}_{4m}\leq f_{4m+2},\quad m=1,2,\ldots,\tag{24}$$

де f_{2k}, $(k=1,2,\ldots)$ *— звичайні наближення ДНД* (1), *що визначаються за формулою* (2), $\tilde{f}_{4m},(m=1,2,\ldots)$ *— фігурні наближення, які задаються виразом вигляду* (3).

Якщо до того ж справджуються умови (11), (21), *тоді звичайні наближення* f_{2k}, $(k=1,2,\ldots)$ *та фігурні —* $\tilde{f}_{2m},(m=1,2,\ldots)$ *ДНД* (1) *збігаються до однієї границі.*

Доведення. Розглянемо формули різниці між звичайними та фігурними наближеннями:

$$\tilde{f}_{4m}-f_{2m}=\Phi_0^{(4m)}-\Phi_0^{(2m)}+\sum_{i=1}^{2m-1}(-1)^i\prod_{j=1}^{i}\frac{a_{jj}}{Q_j^{(2m-j)}\tilde{Q}_j^{(4m-2j)}}\cdot\left(\Phi_i^{(4m-2i)}-\Phi_i^{(2m-i)}\right)$$

та

$$f_{4m+2}-\tilde{f}_{4m}=\Phi_0^{(4m+2)}-\Phi_0^{(4m)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2m}(-1)^i\prod_{j=1}^{i}\frac{a_{jj}}{Q_j^{(4m+2-j)}\tilde{Q}_j^{(4m-2j)}}\cdot\left(\Phi_i^{(4m+2-i)}-\Phi_i^{(4m-2i)}\right)+\frac{\prod_{j=1}^{2m+1}a_{jj}}{\prod_{j=1}^{2m+1}Q_j^{(4m+2-j)}\prod_{j=1}^{2m}\tilde{Q}_j^{(4m-2j)}}.$$

З умов теореми випливає, що

$$\Phi_i^{(4m-2i)} - \Phi_i^{(2m-i)} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 2m-1, \ m = 1, 2, \ldots,$$

$$\Phi_i^{(4m+2-i)} - \Phi_i^{(4m-2i)} \geq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, 2m, \ m = 1, 2, \ldots.$$

Оскільки при виконанні умов даної теореми, виконуються і умови попередніх теорем, то з оцінок (14), (22) випливає, що

$$Q_j^{(2m-j)} \tilde{Q}_j^{(4m-2j)} = |Q_j^{(2m-j)} \tilde{Q}_j^{(4m-2j)}|, \ \ j = 1, 2, \ldots, 2m-1, \ m = 1, 2, \ldots,$$

$$Q_j^{(4m+2-j)} \tilde{Q}_j^{(4m-2j)} = |Q_j^{(4m+2-j)} \tilde{Q}_j^{(4m-2j)}|, j = 1, 2, \ldots, 2m, \ m = 1, 2, \ldots,$$

та

$$\frac{a_{2m_1,2m+1}}{Q_{2m+1}^{(4m+2)}} = \frac{|a_{2m_1,2m+1}|}{|Q_{2m+1}^{(4m+2)}|},$$

а, отже, вірною є нерівність (24). Використовуючи дану нерівність і твердження теорем 1, 2, доходимо висновку, що при виконанні всіх умов теореми забезпечується збіжність фігурних та звичайних наближень парного порядку ДНД (1) і збігаються вони до однієї границі.

Теорема доведена.

Накладаючи певні обмеження на елементи $a_{i+j,i}$, $a_{i,i+j}$, $i = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$, можна досягти виконання умов наведених теорем.

1. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam: Noth Holland, 1992. – 606 p.
2. *Perron O.* Die Lehre von der Kettenbrüchen. – Stuttgart: Teubner, 1957. – Bd 2. – 524 s.
3. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
4. *Кучмінська Х. Й.* Про збіжність двовимірних неперервних дробів // Праці ІМ НАН України. Теорія наближення функцій та її застосування. –2000. – **31**. – С. 282–296.
5. *Антонова Т. М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Матем. методи та фіз.-мех. поля.– 2002. –**45**, № 1.– С. 11–15.
6. *Гладун В. Р.*Ознаки збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. –**46**, № 4. – С. 16–26.
7. *Антонова Т. М., Гладун В.Р.* Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 27–35.
8. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. матем. журн. – 2003. –**55**, № 1. – С. 30–44.

Одержано 15.09.2006