

В. М. Бондаренко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)
М. В. Степочкина (Киевский нац. ун-т имени Тараса Шевченко)

О СВЯЗИ МЕЖДУ *INJ*-КОНЕЧНОСТЬЮ ТИПА И ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬЮ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ТИТСА ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

In this paper we prove that any finite poset with positive definite Tits form is of *inj*-finite type.

В цій статті доводиться, що всяка скінченна частково упорядкована множина з додатно визначеною формою Тітса має *inj*-скінченний тип.

Квадратичная форма Титса, введенная П. Габриелем [1] для колчанов, Ш. Бреннер [2] для колчанов с соотношениями, Ю. А. Дроздом [3] для частично упорядоченных множеств и т. д., играет важную роль в теории представлений (см., например, введение из [4]). В частности в [3] доказано, что конечное частично упорядоченное (сокращенно ч. у.) множество A имеет конечное число классов изоморфизмов неразложимых представлений над полем тогда и только тогда, когда его форма Титса $q_A : \mathbb{Z}^{A \cup 0} \rightarrow \mathbb{Z}$, которая задается равенством

$$q_A(z) = z_0^2 + \sum_{i \in A} z_i^2 + \sum_{\substack{i < j, \\ i, j \in A}} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in A} z_i,$$

является слабо положительной (с формальных соображений нужно считать, что A не содержит 0). Напомним, что квадратичная форма $f(z) : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ называется слабо положительной, если $f(z) > 0$ для всех ненулевых $z = (z_1, \dots, z_n)$, таких, что $z_1, \dots, z_n \geq 0$; если $f(z) > 0$ для всех $z \neq 0$, то форма называется положительно определенной или просто положительной.

В [5] авторы доказали, что категория представлений категории $InjA$ (инъективных представлений ч. у. множества A) имеет конечное число классов изоморфизмов неразложимых объектов тогда и только тогда, когда форма Титса категории $InjA$ является слабо положительной. В этой статье мы продолжаем изучение категорий $InjA$ такого типа.

1. Инъективные представления частично упорядоченных множеств.

На протяжении всей статьи k — произвольное фиксированное поле. Векторные пространства, которые мы рассматриваем, являются конечномерными векторными пространствами над k , а ч. у. множества — конечными; при этом мы предполагаем, что последние не содержат элементов 0 и $\pm\infty$. Линейные отображения, морфизмы категорий и т. п. умножаются слева направо.

Напомним хорошо известные определения в терминах векторных пространств, градуированных с помощью ч. у. множеств [5], [6].

Пусть A — ч. у. множество. A -градуированным векторным пространством называется прямая сумма $U = \bigoplus_{x \in A} U_x$ векторных пространств U_x . Линейное отображение $\varphi : U \rightarrow U'$ между A -градуированными k -пространствами U и U' называется A -отображением, если отображение φ_{bc} является нулевым всякий раз, когда $b \not\leq c$, где (для $x, y \in A$) $\varphi_{xy} : U_x \rightarrow U'_y$ обозначает индуцированное отображение. Множество всех A -отображений U в U' (которое есть подпространством в $\text{Hom}(U, U')$) обозначаем через $\text{Hom}_A(U, U')$.

Категорию A -градуированных векторных пространств над полем k (объектами которой являются A -градуированные пространства, а морфизмами — A -отображения) будем обозначать через $\text{mod}_A k$, по аналогии с категорией конечномерных векторных k -пространств $\text{mod } k$.

Представлением ч. у. множества A называется тройка $X = (V, U, \gamma)$, состоящая из пространств $V \in \text{mod } k$, $U \in \text{mod}_A k$ и линейного отображения $\gamma : V \rightarrow U$. Морфизмом из (V, U, γ) в (V', U', γ') есть произвольная пара (μ, ν) линейных отображений $\mu \in \text{Hom}(V, V')$ и $\nu \in \text{Hom}_A(U, U')$, таких, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\gamma} & U \\ \mu \downarrow & & \downarrow \nu \\ V' & \xrightarrow{\gamma'} & U' \end{array}$$

коммутативная. Перемножаются морфизмы покоординатно.

Категорию представлений (над полем k) ч. у. множества A будем обозначать через $\text{Rep}A$.

Для морфизма $\alpha = (\mu, \nu) : X \rightarrow Y$ в $\text{Rep}A$ мы пишем $0 \Rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y$ если μ и все ν_{xx} инъективны. Представление X ч. у. множества A называется инъективным, если любая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} 0 & \Rightarrow & R' \rightarrow R \\ & & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

может быть вложена в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} 0 & \Rightarrow & R' \rightarrow R \\ & & \downarrow \swarrow \\ & & X \end{array} .$$

Полную подкатеорию категории $\text{Rep}A$, состоящую из всех инъективных объектов обозначим через $\text{Inj}A$. Мы говорим, что A имеет инъективно-конечный (или *inj*-конечный) тип, если категория представлений $\text{Funct}(\text{Inj}A, \text{mod } k)$ категории $\text{Inj}A$ имеет конечное число классов изоморфизмов неразложимых объектов.

Сопоставим ч. у. множеству A колчан $\vec{A} = (\vec{A}_0, \vec{A}_1)$ с множеством вершин $\vec{A}_0 = A$ и множеством стрелок

$$\vec{A}_1 = \{i \rightarrow j \mid i < j, \text{ } i \text{ и } j \text{ — соседние}\}$$

(элементы i и $j > i$ называются соседними, если не существует элемента s , такого, что $j > s > i$). Мы будем рассматривать \vec{A} как коммутативный колчан, т. е. любые два нетривиальных пути в \vec{A} с одинаковыми начальными и конечными вершинами равны (и других соотношений нет). Стрелка $x \rightarrow y$ обозначается (x, y) , и мы пишем $[x, y]$, если существует стрелка $x \rightarrow y$ или $y \rightarrow x$.

Из результатов работ [5] и [7] вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть A — ч. у. множество и $B = A \cup \infty$, где $x < \infty$ для любого $x \in A$. Тогда A имеет *inj*-конечный тип в том и только в том случае, когда коммутативный колчан \vec{B} не содержит подколчанов (с соотношениями), изомор-

фных или антиизоморфных одному из следующих связанных коммутативных колчанов $Q = (Q_0, Q_1)$:

- I. $Q_1 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$;
- II. $Q_1 = \{[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5]\}$;
- III. $Q_1 = \{[1, 2], [2, 3], [1, 4], [4, 5], [1, 6], [6, 7]\}$;
- IV. $Q_1 = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [1, 5], [5, 6], [6, 7], [1, 8]\}$;
- V. $Q_1 = \{[1, 2], [2, 3], [1, 4], [4, 5], [5, 6], [6, 7], [7, 8], [1, 9]\}$;
- VI. $Q_1 = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], (6, 5), (5, 8), (6, 7), (7, 8), [7, 9]\}$;
- VII. $Q_1 = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], (6, 5), (5, 8), (6, 7), (7, 8), [8, 9]\}$;
- VIII. $Q_1 = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], (6, 5), (7, 6), (8, 5), (7, 8), [8, 9]\}$;
- IX. $Q_1 = \{[1, 2], [2, 3], (4, 3), (3, 8), (4, 5), (5, 8), [5, 6], [6, 7]\}$;
- X. $Q_1 = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], (5, 4), (4, 8), (5, 6), (6, 7), (7, 8), [7, 9]\}$;
- XI. $Q_1 = \{(1, 2), (2, 5), (1, 3), (3, 4), (4, 5), [4, 6], [6, 7], [7, 8], [8, 9]\}$;
- XII. $Q_1 = \{[1, 2], [2, 3], (4, 3), (3, 8), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), [6, 9]\}$.

Напомним, что колчан Q называется подколчаном коммутативного колчана P , если его можно получить из P с помощью комбинации следующих операций:

1) выбрасывание (+)- или (-)-допустимой вершины (т. е. такой, что, соответственно, не есть начальной или конечной для любой стрелки) вместе со всеми стрелками, которые содержат ее;

2) отождествление концов стрелки α вместе с выбрасыванием α и любой лишней стрелки β (т. е. такой, которая равна пути $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_s$, где $\gamma_i \neq \beta$).

Заметим, что Q рассматривается как колчан с соотношениями, индуцированными отношениями коммутативности (Q не обязательно коммутативный).

2. Основной результат. Мы изучаем связь между *inj*-конечностью типа и положительностью квадратичной формы Титса для ч. у. множеств.

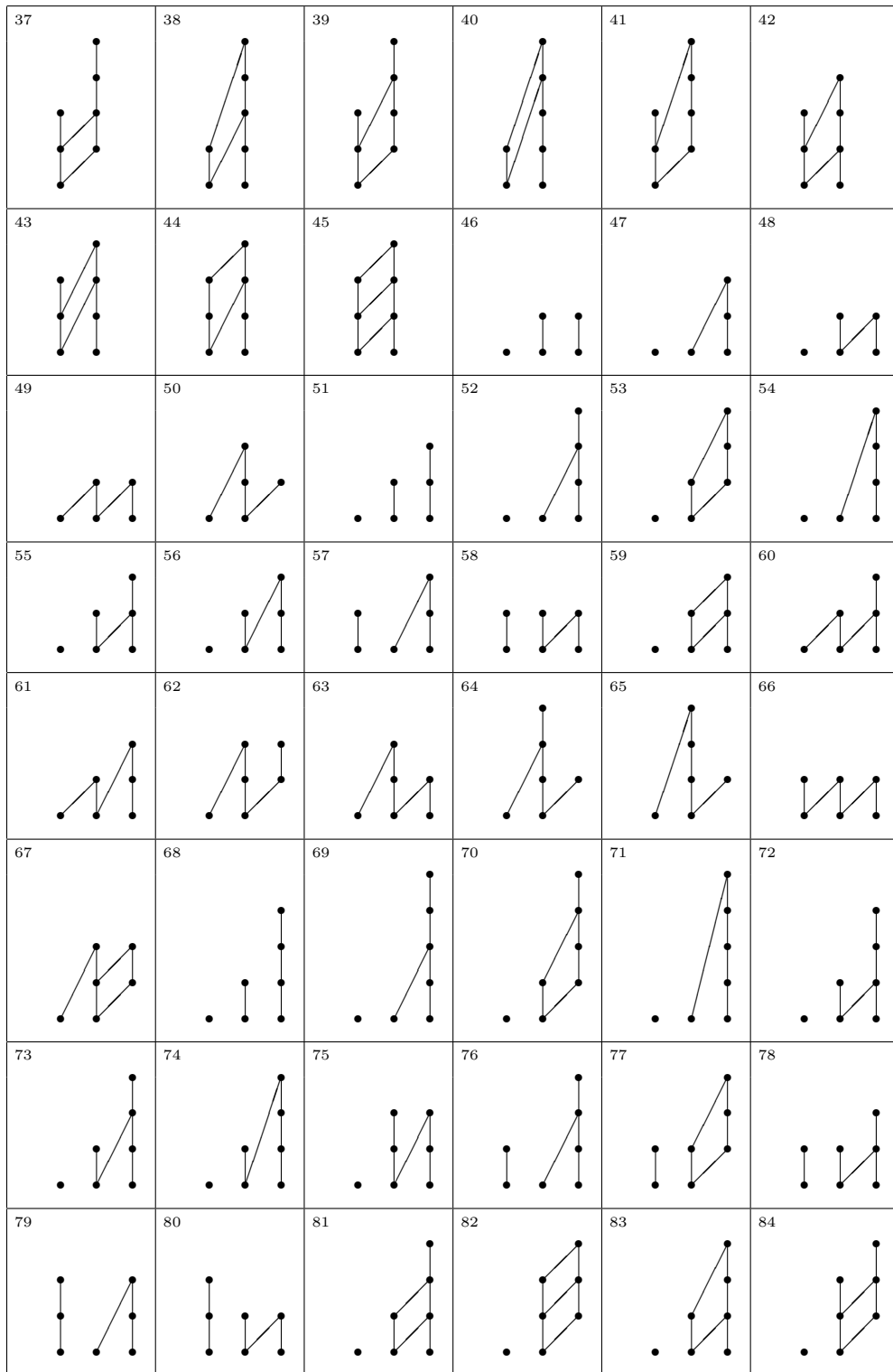
Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

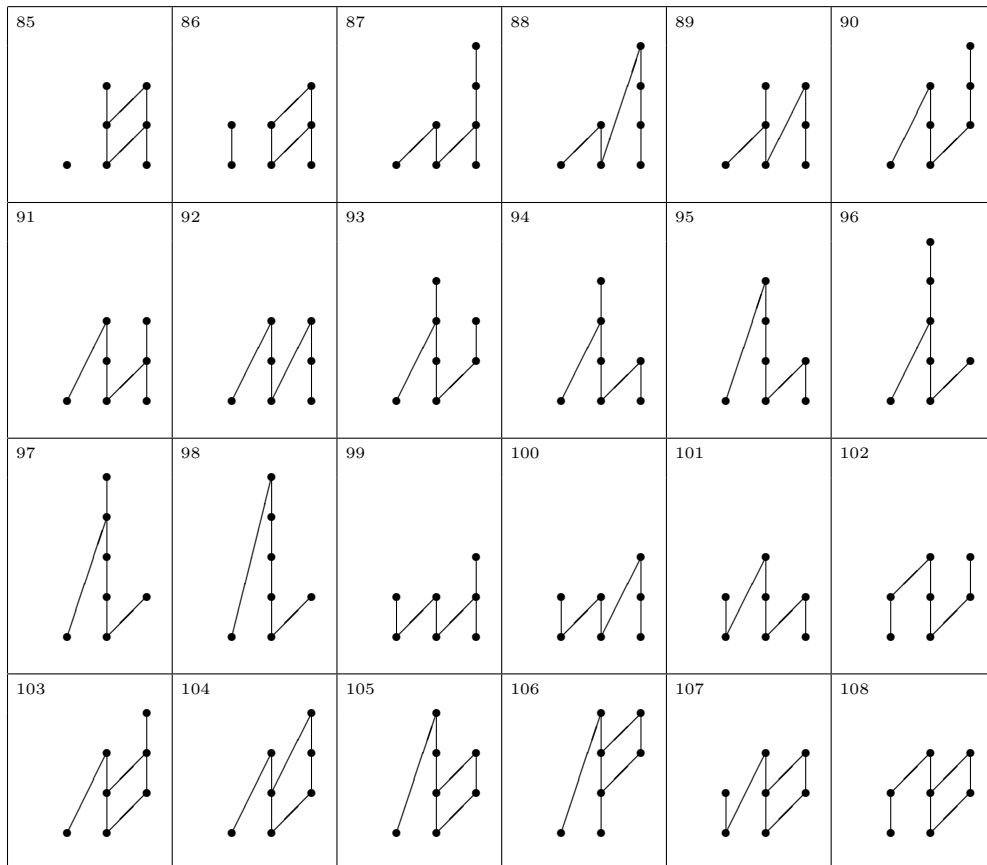
Теорема 2. *Всякое ч. у. множество с положительно определенной формой Титса имеет inj-конечный тип.*

Утверждение теоремы 2 легко проверить, пользуясь теоремой 1 и полным списком ч. у. множеств с положительно определенной формой Титса, который получен авторами в работе [8] и который мы приводим ниже (в списке ч. у. множества указаны с точностью до двойственности).

Ч. у. множества с положительно
определенной формой Титса

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36





1. Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – 6. – P. 71–103, 309.
2. Brenner S. Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms // Proc. of Intern. Conference of Representations of Algebras. – Carleton Univ., Ottawa, Ontario, 1974. – Paper №5.
3. Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – 8. – С. 34–42.
4. Bondarenko V. M., Polishchuk A. M. Minimax sums of posets and the quadratic Tits form // Algebra Discrete Math. – 2004. – №1ю. – P. 17–36.
5. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. Частично упорядоченные множества инъективно конечного типа // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 22–33.
6. Bondarenko V. M. Linear operators on S -graded vector spaces // Linear algebra and appl., special issue: "Linear Algebra Methods in Representation Theory". – 2003. – 365. – P. 45–90.
7. Завадский А. Г., Шкабара А. С. Коммутативные колчаны и матричные алгебры конечного типа. – К.: Препр. АН УССР. Ин-т математики, 1976, 76-3. – 52 с.
8. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри. Праці Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, 3. – С. 3–46.

Одержано 16.09.2006