Л. М. Буря (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

The paper contains the estimate of the error to approximate solving of one type of nonlinear equations.

В роботі отримана оцінка повної похибки при наближеному розв'язуванні одного типу нелінійних інтегральних рівнянь.

Нелінійні інтегральні рівняння (НІР) ефективно використовуються як математичні моделі природничих явищ і процесів, зокрема задач фізики, біології, економіки і т. д. Нерідко розв'язки цих рівнянь несуть важливу інформацію про те чи інше змодельоване явище, дозволяють прогнозувати чи передбачити поведінку досліджуваного об'єкта або поставити гіпотезу про існування нової його властивості. Отже глобальне розв'язування НІР є важливою і актуальною проблемою.

Як правило, такі рівняння мають складну структуру. Число розв'язків їх наперед не відоме, тому для них конструюють послідовність наближених (апроксимаційних) рівнянь, число розвязків яких можна визначити і для яких існують точні чи наближені методи їх розв'язання. Такий перехід до апроксимаційних рівнянь повинен бути строго обгрунтований, тобто доведена збіжність методу переходу, досліджені питання взаємозв'язку точного і відповідної йому послідовності наближених рівнянь щодо існування розв'язків цих рівнянь і їх відповідності, а також знайдені апостеріорні оцінки близькості наближених розв'язків апроксимаційних рівнянь до відповідних їм розв'язків вихідного рівняння. Для нелінійних операторних рівнянь в гільбертовому просторі ці питання досліджені в роботі [1].

Оскільки перехід від точного рівняння до послідовності наближених рівнянь, уточнення початкових наближень за допомогою ітераційних методів з використанням ЕОМ передбачає появу похибок (неусувної, методу, заокруглення і повної), то виникає питання дослідження цих похибок при наближеному розв'язуванні НІР. Під повною похибкою розуміють суму похибок: неусувної, яка виникає за рахунок похибок вхідних даних і вимірювання, методу — включає похибку апроксимації та ітераційного процесу і похибки заокруглення, викликаної скінченним числом розрядів при записі чисел в режимі плаваючої коми, способом заокруглення, порядком виконання арифметичних операцій і т. д. [2].

В даній роботі зроблена оцінка повної похибки при наближеному розв'язуванні одного типу нелінійних інтегральних рівнянь із степеневою нелінійністю методом мінімальних нев'язок.

Наведемо деякі теоретичні відомості, викладені в роботах [1], [3], які будуть необхідні для наших досліджень.

Нехай дано нелінійне рівняння

$$Tu(x) := u(x) - \int_0^1 K(x, y, u(x))dy - f(x) = 0, \tag{1}$$

де $u(x)$ — шукана функція, функції $K(x, y, u(x))$ і $f(x)$ є неперервними за всіма своїми аргументами в області $\overline{E} = \{ (x, y, u) : 0 \le x, y \le 1, \|u\| \le d < \infty\} \subset C[0, 1]$, а оператор Tu, є двічі неперервно диференційовний в смислі Фреше по змінній u на довільному елементі $w(x) \in C[0,1]$, $\|w\| \le d < \infty$.

Припустимо, що рівняння (1) має l неперервних ізольованих розв'язків $\Omega = \{u_i^*\}$, $(\overline{1,l})$, тобто існують такі множини елементів v_i і дійсних чисел r_i, які називаються відповідно центрами і радіусами замкнених куль $\overline{S}(v_i, r_i) = \{u \in \overline{E} : \|u - v_i\| \le r_i\}$, кожна з яких містить один розв'язок.

Для рівняння (1) ітераційний метод мінімальних нев'язок має вигляд

$$u^{k+1} = u^k - \frac{(T'(u^k)Tu^k, Tu^k)}{\|T'(u^k)Tu^k\|^2} Tu^k, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{2}$$

де

$$T'(u^k)Tu^k = Tu^k(x) - \int_0^1 K'(x, y, u^k(y))Tu^k(y)dy,$$

і має місце наступна теорема про існування розв'язку рівняння (1) та збіжності методу (2) [3].

Теорема 1. *Нехай у кулі $\overline{S}(u^0, r)$, де $u^0 = v_i$, а r відповідне йому значення r_i, виконуються умови*

$$\|T(u^0)\| \le \delta_0, \quad \|T'(u)\| \le M(u^0, r), \quad \|T''(u)\| \le N(u^0, r), \tag{3}$$

$$|(T'(u)h, h)| \ge m(u^0, r)\|h\|^2, \;\; m(u^0, r) > 0, \;\; h \in C[0,1], \tag{4}$$

де δ_0, $M(u^0, r)$, $N(u^0, r)$, $m(u^0, r)$ — константи, які гарантують виконання умов

$$q(r) = \left[1 - \frac{m^2(u^0, r)}{M^2(u^0, r)}\right]^{1/2} + \frac{\delta_0 N(u^0, r)}{2m^2(u^0, r)} < 1, \tag{5}$$

$$\frac{\delta_0}{m(u^0, r)[1 - q(r)]} \le r. \tag{6}$$

Тоді рівняння (1) має в кулі $\overline{S}(u^0, r)$ єдиний розв'язок u^*, до якого збігаєтья послідовність $\{u^k\}$, побудована згідно (2) і має місце оцінка похибки

$$\|u^* - u^k\| \le \frac{\delta_0}{m(u^0, r)[1 - q(r)]}[q(r)]^k. \tag{7}$$

Безпосередня реалізація ітераційного процесу (2) для рівняння (1) в більшості випадків є неможливою, так як вихідне рівняння, як правило, має складну структуру з наперед невідомим числом розв'язків. Складною є також проблема їх відокремлення, тобто побудови куль єдиності кожного розв'язку, та знаходження констант, які забезпечують виконання умов (3)–(6).

Для вирішення цих питань будують послідовність нелінійних рівнянь більш простої структури

$$T_n u(x) := u(x) - \int_0^1 K_n(x, y, u(x))dy - f_n(x) = 0, \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{8}$$

де $K_n(x, y, u(x))$ і $f_n(x)$ належать $C[\,\overline{E}\,]$, які апроксимують рівняння (1).

Правомірність переходу від рівняння (1) до рівнянь (8) базується на прямій і оберненій теоремах існування. Перша дає можливість стверджувати розв'язність рівняння (8) при кожному або досить великому n і збіжність методу переходу від (1) до (8), якщо відомо, що (1) має розв'язки; друга дозволяє зробити обернений висновок: за даними існування розв'язку (8) при допустимому фіксованому n випливає розв'язність рівняння (1). Якщо ці теореми мають місце, то за наближені розв'язки рівняння (1) можна брати відповідні розв'язки апроксимаційних рівнянь (8).

Якщо через $\Omega_n = \{u^*_{ni}\}$, $(i = \overline{1,l})$ позначити множину розв'язків рівняння (8), то означення збіжності методу переходу від рівняння (1) до послідовності рівнянь (8) дається наступним чином [1]: послідовність розв'язків $\{u^*_n\} \in \Omega_n$ рівнння (8) будемо називати відповідною розв'язку $u^* \in \Omega$ рівняння (1), а метод переходу до рівнянь (8) збіжним, якщо виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} \|u^* - u^*_n\| = 0$.

Обидві теореми використовують поняття близькості операторів $Tu(x)$, $T_n u(x)$ та їх двох похідних, в кулях єдиності кожного розв'язку, які визначаються так [1]: будемо казати, що на елементі $u \in \overline{S}(v_i, r_i)$ виконані умови апроксимації операторів $Tu(x)$, $T'u(x)$, $T''u(x)$, операторами $T_n u(x)$, $T'_n u(x)$, $T''_n u(x)$, якщо існують такі функціонали $\eta_j(n,u) \to 0$ при $n \to \infty$ $(j = 1,2,3)$, що виконуються нерівності

$$\|Tu(x) - T_n u(x)\| \le \eta_1(n,u), \tag{9}$$

$$\|T'u(x) - T'_n u(x)\| \le \eta_2(n,u), \tag{10}$$

$$\|T''u(x) - T''_n u(x)\| \le \eta_3(n,u). \tag{11}$$

Перейдемо до оцінки повної похибки при наближеному розв'язуванні нелінійного інтегрального рівняння із степеневою нелінійністю.

Розглянемо рівняння

$$Tu(x) := u(x) - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \sin xy u^3(y)dy - \frac{1}{4}\sin x = 0. \tag{12}$$

Заміною функцій $\sin xy$ і $\sin x$ відповідно n-ми відрізками їхнього розкладу у ряд Маклорена прийдемо до апроксимаційного рівняння

$$T_n u_n(x) := u_n(x) - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}\right] u_n^3(y)dy -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = 0, \tag{13}$$

розв'язок якого будемо шукати у вигляді полінома

$$u^*_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{2k-1}, \tag{14}$$

де a_k — невідомі коефіцієнти. Після підстановки (14) у (13), виконання відповідних арифметичних операцій і точного інтегрування отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (СНАР) відносно коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Глобальне розв'язання системи здійснюється $\varepsilon s-$алгоритмом [4]. Так як апріорі невідомо при якому n відбудеться відокремлення розв'язків рівняння (12), то необхідно генерувати і вирішувати

СНАР для декількох зростаючих значень n. Як показав чисельний експеримент [5], відокремлення розв'язків рівняння (12) відбувається вже при $n = 2$, тобто умови (3)–(6) теореми 1 виконуються для $u_2^{(i)}(x) = a_1^{(i)}x + a_2^{(i)}x^3,\ i = 1, 2, 3$, де $a_1^{(i)}, a_2^{(i)},\ i = 1, 2, 3$ — розв'язки СНАР при $n = 2$.

Ліві частини рівнянь (12), (13) будемо розглядати відповідно як оператори T і T_n, які переводять множину неперервних на $[0, 1]$ функцій, що задовольняють умову $\|u\| \le d < \infty$ в $C[0, 1]$, і є двічі неперервно диференційовні по u на довільному елементі $w \in C[0, 1]$. Похідні цих операторів мають вигляд

$$T'(w)h = h(x) - \frac{3}{4}\int_0^1 \sin xyw^2(y)h(y)dy, \tag{15}$$

$$T_n'(w)h = h(x) - \frac{3}{4}\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}\right] w^2(y)h(y)dy, \tag{16}$$

$$T''(w)hh_1 = -\frac{3}{2}\int_0^1 \sin xyw(y)h(y)h_1(y)dy, \tag{17}$$

$$T_n''(w)hh_1 = -\frac{3}{2}\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}\right] w(y)h(y)h_1(y)dy. \tag{18}$$

Має місце наступна теорема про існування розв'язку рівняння (13).

Теорема 2. *Нехай u^* — один з розв'язків рівняння* (12). *Тоді справедливі наступні твердження.*

1. *При всіх $u \in \overline{S}(u^*, r) = \{u \in \overline{E} : \|u - u^*\| \le r\}$ виконуються умови* (9) – (11) *з функціоналами*

$$\eta_1(n, u^*) = \frac{(\sigma(n, u^*) + 1)}{4(2n+1)!\sqrt{4n+3}}, \tag{19}$$

$$\eta_2(n, r, u^*) = \frac{3\,(r^2 + 2\sigma_1(n, u^*)r + \sigma_2^2(n, u^*))}{4(2n+1)!\sqrt{4n+3}}, \tag{20}$$

$$\eta_3(n, r, u^*) = \frac{3(r + \|u^*\|)}{2(2n+1)!(4n+3)}, \tag{21}$$

де

$$\sigma(n, u^*) = \left|\int_0^1 y^{2n+1}(u^*(y))^3dy\right|, \tag{22}$$

$$\sigma_1(n, u^*) = \left\{\int_0^1 y^{4n+2}(u^*(y))^2dy\right\}^{\frac{1}{2}}, \sigma_2(n, u^*) = \left\{\int_0^1 y^{2n+1}(u^*(y))^2dy\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

а для оператора $T''(u)$ виконується нерівність

$$\|T''(u)\| \le N(r, u^*), \tag{24}$$

де

$$N(r,u^*)=\frac{3}{2}\overline{N}\left(r+\|u^*\|\right), \quad a \quad \overline{N}=\left\{\int_0^1\int_0^1 \sin^2 xydydx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

2. *Для оператора* $T'(u^*)$ *справедливі оцінки*

$$\|T'(u^*)\|\le M, \quad |(T'(u^*)h,h)|\ge m\|h\|^2,\ m>0,\ h\in C[0,1], \tag{26}$$

де

$$M=\left\{1+\frac{9}{16}\overline{M}^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad m=\left|1-\frac{3}{4}\overline{M}\right|, \quad \overline{M}=\left\{\int_0^1\int_0^1 \sin^2 xy\,[u^*(y)]^4\,dydx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

3. *Існує така область* $d(r)=\left(0,\frac{\|u^*\|}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8m}{3\overline{N}\|u^*\|^2}}-1\right]\right)$, *що для всякого* $r\in d(r)$ *виконується нерівність* $m-N(r,u^*)r>0$.

4. *В кулі* $\overline{S}(u*,r)$ *для операторів* T_n, T'_n, T''_n *мають місце оцінки*

$$\|T_n(u^*)\|\le\eta_1(n,u^*); \tag{28}$$

$$\|T'_n(u)\|\le M+N(r,u^*)r+\eta_2(n,r,u^*)=M_n(n,r,u^*); \tag{29}$$

$$|(T'_n(u)h,h)|\ge\left[m-N(r,u^*)r-\eta_2(n,r,u^*)\right]\|h\|^2=m_n(n,r,u^*)\|h\|^2; \tag{30}$$

$$\|T''_n(u)\|\le N(r,u^*)r+\eta_3(n,r,u^*)=N_n(n,r,u^*). \tag{31}$$

5. *Для довільного* $r\in d(r)$ *існує* $n_0(r)$, *що при* $n\ge n_0(r)$ *в нерівності* (30) $m_n(n,r,u^*)>0$ *і виконуються умови*

$$q_n(r)=\left[1-\frac{m_n^2(n,r,u^*)}{M_n^2(n,r,u^*)}\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{N_n(n,r,u^*)\eta_1(n,u^*)}{2m_n^2(n,r,u^*)}<1, \tag{32}$$

$$\frac{\eta_1(n,u^*)}{m_n(n,r,u^*)[1-q_n(r)]}\le r. \tag{33}$$

6. *Рівняння* (13), *при кожному із вказаних* $n\ge n_0(r)$, *має в кулі* $\overline{S}(u*,r)$ *єдиний розв'язок* u_n^*, *який відповідає* u^*. *Послідовність* u_n^k, *побудована згідно* (2) *для рівняння* (13), *починаючи з* $u_n^0=u^*$, *збігається до* u_n^*, *причому швидкість збіжності характеризується нерівністю*

$$\|u_n^*-u_n^k\|\le\frac{\eta_1(n,u^*)}{m_n(n,r,u^*)[1-q_n(r)]}[q_n(r)]^k. \tag{34}$$

7. *Довільна послідовність розв'язків* u_n^* *при* $n\to\infty$ *збігається по нормі до розв'язку* u^*, *причому швидкість збіжності визначається нерівністю*

$$\|u^*-u_n^*\|\le\frac{\eta_1(n,u^*)}{m_n(n,r,u^*)[1-q_n(r)]}. \tag{35}$$

Доведення. Оцінимо близькість операторів T і T_n в кулі $\overline{S}(u^*,r)$. Всюди далі будемо використовувати норму простору $L_2[0,1]$. Згідно нерівностей трикутника і Коші-Буняковського будемо мати

$$\|T(u^*)-T_n(u^*)\| = \frac{1}{4}\left\|\int\limits_0^1\left[sinxy-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}\right](u^*(y))^3dy\right\| +$$

$$+\frac{1}{4}\left\|\sin x-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right\| \le \frac{1}{4}\left\|\int\limits_0^1\frac{x^{2n+1}y^{2n+1}}{(2n+1)!}(u^*(y))^3dy\right\| + \frac{1}{4}\left\|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\| \le$$

$$\le \frac{\|x^{2n+1}\|}{4(2n+1)!}\left(\left|\int\limits_0^1 y^{2n+1}(u^*(y))^3dy\right|+1\right) \le \frac{\left(\left|\int\limits_0^1 y^{2n+1}(u^*(y))^3dy\right|+1\right)}{4(2n+1)!\sqrt{4n+3}}.$$

Використовуючи позначення (22) одержимо (19).

Для оцінки близькості операторів $T'(u)$, $T'_n(u)$, $T''(u)$ та $T''_n(u)$, визначених відповідно згідно (15) – (18), використаємо лінійність $T'(u)$, $T'_n(u)$ відносно h, та лінійність відносно hh_1 операторів $T''(u)$ і $T''_n(u)$. За нерівністю Коші-Буняковського, враховуючи, що $u\in\overline{S}(u*,r)$, отримаємо

$$\|T'(u)-T'_n(u)\| \le \frac{3}{4}\left\|\int\limits_0^1\left(sinxy-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)u^2(y)dy\right\| \le$$

$$\le \frac{3}{4}\left\|\int\limits_0^1\frac{x^{2n+1}y^{2n+1}}{(2n+1)!}u^2(y)dy\right\| \le \frac{3\,\|x^{2n+1}\|}{4(2n+1)!}\left|\int\limits_0^1 y^{2n+1}\left\{(u-u^*)^2+2u^*(u-u^*)+(u^*)^2\right\}dy\right| \le$$

$$\le \frac{3\left(\left|\int\limits_0^1 y^{2n+1}(u-u^*)^2dy\right|+2\left|\int\limits_0^1 y^{2n+1}u^*(u-u^*)dy\right|+\left|\int\limits_0^1 y^{2n+1}(u^*)^2dy\right|\right)}{4(2n+1)!\sqrt{4n+3}} \le$$

$$\le \frac{3\left(\max\limits_{0\le y\le 1} y^{2n+1}\|(u-u^*)\|^2+2\left\{\int\limits_0^1 y^{4n+2}[u^*(y)]^2dy\right\}^{\frac{1}{2}}\|u-u^*\|+\left|\int\limits_0^1 y^{2n+1}[u^*(y)]^2dy\right|\right)}{4(2n+1)!\sqrt{4n+3}} \le$$

$$\le \frac{3\left(r^2+2\left\{\int\limits_0^1 y^{4n+2}[u^*(y)]^2dy\right\}^{\frac{1}{2}}r+\left|\int\limits_0^1 y^{2n+1}[u^*(y)]^2dy\right|\right)}{4(2n+1)!\sqrt{4n+3}}.$$

Звідси, використовуючи позначення (23), одержимо (20).

$$\|T''(u)-T''_n(u)\| = \frac{3}{2}\left\|\int\limits_0^1\left(sinxy-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)u(y)dy\right\| \le$$

$$\le \frac{3}{2}\left\|\int\limits_0^1\frac{x^{2n+1}y^{2n+1}}{(2n+1)!}u(y)dy\right\| \le \frac{3\|x^{2n+1}\|}{2(2n+1)!}\left|\int\limits_0^1 y^{2n+1}u(y)dy\right| \le$$

$$\leq \frac{3\left\{\int\limits_0^1 y^{4n+2}dy\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int\limits_0^1 u^2(y)dy\right\}^{\frac{1}{2}}}{2(2n+1)!\sqrt{4n+3}} \leq \frac{3\|u\|}{2(2n+1)!(4n+3)} \leq \frac{3(r+\|u^*\|)}{2(2n+1)!(4n+3)}.$$

Для оцінки зверху оператора $T''(u)hh_1$ в кулі $\overline{S}(u^*,r)$, використаємо його лінійність відносно hh_1. За нерівностями Коші-Буняковського і трикутника будемо мати

$$\|T''(u)\| \leq \left\|\frac{3}{2}\int\limits_0^1 sinxyu(y)dy\right\| \leq$$

$$\leq \frac{3}{2}\left\{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 sin^2xydydx\right\}^{\frac{1}{2}}\|u\| \leq \frac{3}{2}\left\{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 sin^2xydydx\right\}^{\frac{1}{2}}(r+\|u^*\|).$$

Враховуючи (25) має місце (24).

Доведемо справедливість оцінок (26). За нерівністю Коші-Буняковського отримаємо

$$\|T'(u^*)h\|^2 = \|h(x) - \frac{3}{4}\int\limits_0^1 sinxy[u^*(y)]^2h(y)dy\|^2 = \int\limits_0^1 h^2(x)dx -$$

$$-\frac{3}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 sinxy[u^*(y)]^2h(x)h(y)dxdy + \frac{9}{16}\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1 sinxy[u^*(y)]^2h(y)dy\right]^2dx \leq$$

$$\leq \|h\|^2 + \frac{9}{16}\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1 sinxy[u^*(y)]^2h(y)dy\right]^2dx \leq \left(1+\frac{9}{16}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 sin^2xy[u^*(y)]^4dydx\right)\|h\|^2.$$

Звідси, використовуючи позначення (27), отримаємо першу з нерівностей (26).

Для оцінки оператора $T'(u^*)$ знизу, нерівність $|(T'(u^*)h,h)| \geq m\|h\|^2$ запишемо у вигляді двох еквівалентних нерівностей

$$(T'(u^*)h,h) \geq m\|h\|^2, \tag{36}$$

$$(T'_n(u^*)h,h) \leq -m\|h\|^2. \tag{37}$$

Згідно означення скалярного добутку в просторі $L_2[0,1]$ будемо мати

$$(T'(u^*)h,h) = \|h\|^2 - \frac{3}{4}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 sinxy[u^*(y)]^2h(x)h(y)dydx.$$

Оцінимо подвійний інтеграл останньої рівності. Введемо позначення

$$g(x) = \int\limits_0^1 sinxy[u^*(y)]^2h(y)dy. \tag{38}$$

Тоді, використовуючи (38), за нерівністю Коші-Буняковського отримаємо

$$\left\{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 sinxy[u^*(y)]^2h(x)h(y)dydx\right\}^2=\left\{\int\limits_0^1 h(x)\left[\int\limits_0^1 sinxy[u^*(y)]^2h(y)dy\right]dx\right\}^2=$$

$$=\left\{\int\limits_0^1 h(x)g(x)dx\right\}^2\leq\int\limits_0^1 h^2(x)dx\int\limits_0^1 g^2(x)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left\{\int\limits_0^1 sinxy[u^*(y)]^2h(y)dy\right\}^2dx\|h\|^2\leq\int\limits_0^1\int\limits_0^1 sin^2xy[u^*(y)]^4dxdy\|h\|^4.$$

Звідси, згідно (27), будемо мати

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 sinxy[u^*(y)]^2h(x)h(y)dydx\leq\overline{M}\|h\|^2. \tag{39}$$

Отже, якщо $\overline{M}<\frac{4}{3}$, то $(T_n'(v)h,h)\geq(1-\frac{3}{4}\overline{M})\|h\|^2$, тобто $m=1-\frac{3}{4}\overline{M}$. Якщо $\overline{M}>\frac{4}{3}$, то записавши нерівність (37) у вигляді

$$(1+m)\|h\|^2\leq\frac{3}{4}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 sinxy[u^*(y)]^2h(x)h(y)dydx$$

і використовуючи (39), отримаємо нерівність

$$m\leq\frac{3}{4}\overline{M}-1.$$

Отже при $m=|1-\frac{3}{4}\overline{M}|$ виконується друга з нерівностей (26).

Доведемо твердження 3.

Розглянемо нерівність $m-N(r,u^*)r>0$. Згідно (25) вона буде мати вигляд

$$m-\frac{3}{2}\overline{N}r^2+\frac{3}{2}\overline{N}\|u^*\|r>0.$$

Звідси

$$r^2+\|u^*\|r-\frac{2m}{3\overline{N}}<0.$$

Остання нерівність виконується при

$$r\in\left(\frac{-\|u^*\|}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8m}{3\overline{N}\|u^*\|^2}}+1\right],\frac{\|u^*\|}{2}\left[\sqrt{1+\frac{8m}{3\overline{N}\|u^*\|^2}}-1\right]\right).$$

Враховуючи, що r, як радіус кулі, приймає тільки додатні значення, отримаємо справедливість твердження 3.

Отже всі умови теореми 2 [1] виконанні. Звідси випливає справедливість тверджень (4)–(7).

Із (35) випливає, що $\|u^*-u_n^*\|\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$, а це означає збіжність методу переходу від рівняння (12) до рівнянь (13).

Позначимо через $\Omega_n = \{u^*_{ni}\}$, $i = \overline{1,l}$ — всі ізольовані розв'язки рівняння (13) при кожному фіксованому n, які мають вигляд (14). Надалі вони будуть служити центрами куль єдиності кожного розв'язку рівняння (12), радіуси яких визначаються із умов (3)–(6) теореми 1. Якщо аналітичний вигляд величин $M(v,r)$, $m(v,r)$, $N(v,r)$, де v — один з розв'язків u^*_{ni}, які входять в ці умови знайти неможливо, то їх представляють через величини, що обмежують в кулі $\overline{S}(v,r)$, оператор T_n, його похідні T'_n, T''_n та функціонали $\eta_j(n,u)$, $j = 1,2,3$, які забезпечують виконання в кулі $\overline{S}(v,r)$ умов (9)–(11). Лема 1 [1] дає можливість такого представлення.

Лема 1. *Нехай для всіх $u \in \overline{S}(v,r)$, де v — один з розв'язків u^*_{ni}, виконані умови* (9)–(11)*, а для оператора $T''_n(u)$ має місце нерівність*

$$\|T''_n(u)\| \leq N_n(r,v). \tag{40}$$

Нехай, крім того, для оператора $T''_n(v)$ виконуються умови

$$\|T'_n(v)\| \leq M_n(v), \quad |(T'_n(v)h,h)| \geq m_n(v)\|h\|^2,\ m_n(v) > 0,\ h \in C[0,1]. \tag{41}$$

Тоді в кулі $\overline{S}(v,r)$ справедливі оцінки

$$\|T(v)\| \leq \eta_1(n,v); \tag{42}$$

$$\|T'(v)\| \leq M_n(v) + N_n(r,v)r + \eta_2(n,r,v) = M(n,r,v); \tag{43}$$

$$|(T'(u)h,h)| \geq [m_n(v) - N_n(r,v)r - \eta_2(n,r,v)]\,\|h\|^2 = m(n,r,v)\|h\|^2; \tag{44}$$

$$\|T''(u)\| \leq N_n(r,v)r + \eta_3(n,r,v) = N(n,r,v). \tag{45}$$

Має місце наступна теорема про існування і єдиність розв'язку рівняння (12).

Теорема 3. *Нехай $\Omega_n = \{u^*_{ni}\}$, $i = \overline{1,l}$ — множина розв'язків рівняння* (13) *при кожному фіксованому n. Тоді справедливі твердження.*

1. *При кожному $v \in \Omega_n$ виконуються умови леми 1 з функціоналами $\eta_1(n,v)$, $\eta_2(n,r,v)$, $\eta_3(n,r,v)$, які відповідно мають вигляд* (19), (20), (21) *та величинами*

$$N_n(r,v) = \frac{3}{2}\overline{N}_n\left(r + \|v\|\right), \tag{46}$$

$$M_n(v) = \left\{1 + \frac{9}{16}\overline{M}_n^{\,2}(v)\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{47}$$

$$m_n(v) = \left|1 - \frac{3}{4}\,\overline{M}_n(v)\,\right|, \tag{48}$$

де

$$\overline{N}_n = \left\{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)^2 dxdy\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{49}$$

$$\overline{M}_n(v) = \left\{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)\right)^2 dxdy\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{50}$$

2. *Існує таке $\overline{n}$, починаючи з якого для всякого $v \in \Omega_n$ виконуються умови $m_n(v) - \eta_2(n,0,v) > 0$, $\overline{R} > 0$, де $\overline{R}$ корінь рівняння*

$$m_n(v) - N_n(r,v)r - \eta_2(n,r,v) = 0,$$

який визначається за формулою

$$\overline{R} = \frac{(\overline{N}_n C(n)\|v\| + \sigma_1(n,v))\left(\sqrt{1 + \frac{(2\overline{N}_n C(n)+1)(\frac{4}{3}m_n(v)C(n)-\sigma_2^2(n,v))}{\overline{N}_n C(n)\|v\|+\sigma_1(n,v))^2}} - 1\right)}{2\overline{N}_n C(n) + 1}, \tag{51}$$

а

$$C(n) = (2n+1)!\sqrt{4n+3}. \tag{52}$$

3. *Знайдеться таке* $n \geq \overline{n}$, *починаючи з якого кожному розв'язку* v *відповідає свій інтервал* $(r_1, r_2) \in [0, \overline{R})$, *що при всіх* $r \in (r_1, r_2)$ *сумісна система нерівностей* (5), (6).

4. *В кулі* $u \in \overline{S}(v, r)$, *де* $r \in (r_1, r_2)$, *рівняння* (12) *має єдиний розв'язок* u^*, *який відповідає даному* v, *до якого, починаючи з* $u^0 = v$, *збігається послідовність* $\{u^k\}$, *побудована згідно* (2), *і має місце оцінка* (7) *з* $\delta_0 = \eta_1(n, v)$.

5. *Нерівність*

$$\|u^* - v\| \leq \frac{\eta_1(n,v)}{m(v,r)[1-q(r)]} \tag{53}$$

визначає апостеріорну оцінку похибки, яка характеризує близькість відповідних розв'язків u^* *та* $v = u^*_{ni}$ *рівнянь* (12) *і* (13).

Доведення. Близькість операторів T, T_n та їх двох похідних в кулі $\overline{S}(v, r)$ доводиться аналогічно як це доводилося в кулі $\overline{S}(u^*, r)$ і характеризується функціоналами $\eta_1(n, v)$, $\eta_2(n, r, v)$, $\eta_3(n, r, v)$, які відповідно мають вигляд (19) – (21).

Оцінимо зверху оператор $T''_n(u)hh_1$. Враховуючи його лінійність відносно hh_1 за нерівностями Коші-Буняковського і трикутника, використовуючи позначення (49) та (46), отримаємо

$$\|T''_n(u)\| \leq \left\| \frac{3}{2}\int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}u(y)dy \right\| \leq$$

$$\leq \frac{3}{2}\left\{\int_0^1\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)^2 dydx\right\}^{\frac{1}{2}} \|u\| \leq$$

$$\leq \frac{3}{2}\left\{\int_0^1\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)^2 dydx\right\}^{\frac{1}{2}} (r + \|v\|) = \frac{3}{2}\overline{N}_n\,(r + \|v\|) = N_n(r, v).$$

Для оцінки оператора $T'_n(v)$ зверху використаємо нерівність Коші-Буняковського. Будемо мати

$$\|T'_n(v)h\|^2 = \|h(x) - \frac{3}{4}\int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)h(y)dy\|^2 =$$

$$= \int_0^1 h^2(x)dx - \frac{3}{2}\int_0^1 h(x)\int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)h(y)dydx +$$

$$+\frac{9}{16}\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)h(y)dy\right]^2dx\leq$$

$$\leq\int\limits_0^1 h^2(x)dx+\frac{9}{16}\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)h(y)dy\right]^2dx\leq$$

$$\leq\left(1+\frac{9}{16}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)\right)^2dydx\right)\|h\|^2.$$

Отже справедлива оцінка

$$\|T_n'(v)\|\leq\left\{1+\frac{9}{16}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)\right)^2dxdy\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Використовуючи позначення (50) і (47) отримаємо першу з нерівностей (41).

Оцінимо оператор $T_n'(v)$ знизу. Для цого запишемо нерівність

$$|(T_n'(v)h,h)|\geq m_n(v)\|h\|^2$$

у вигляді двох еквівалентних нерівностей

$$(T_n'(v)h,h)\geq m_n(v)\|h\|^2, \tag{54}$$

$$(T_n'(v)h,h)\leq -m_n(v)\|h\|^2. \tag{55}$$

Згідно означення скалярнрго добутку будемо мати

$$(T_n'(v)h,h)=\|h\|^2-\frac{3}{4}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)h(x)h(y)dxdy.$$

Оцінимо подвійний інтеграл у правій частині останньої рівності. Введемо позначення

$$g_n(x)=\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)h(y)dy. \tag{56}$$

Тоді, використовуючи (56), за нерівністю Коші-Буняковського одержимо

$$\left\{\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)h(x)h(y)dxdy\right\}^2=$$

$$=\left\{\int\limits_0^1 h(x)\left[\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)h(x)h(y)dy\right]dx\right\}^2=\left\{\int\limits_0^1 h(x)g_n(x)dx\right\}^2\leq$$

$$\leq\int\limits_0^1 h^2(x)dx\int\limits_0^1 g_n^2(x)dx=\int\limits_0^1\left\{\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}y^{2k-1}}{(2k-1)!}v^2(y)h(y)dy\right\}^2dx\|h\|^2\leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1} y^{2k-1}}{(2k-1)!} v^2(y) \right)^2 dxdy \|h\|^4.$$

Звідси, згідно (50), отримаємо

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1} y^{2k-1}}{(2k-1)!} v^2(y) h(x) h(y) dxdy \leq \overline{M}_n(v) \|h\|^2. \quad (57)$$

Отже, якщо $\overline{M}_n(v) < \frac{4}{3}$ то справедлива нерівність $(T'_n(v)h, h) \geq m_n(v)$, де $m_n(v) = 1 - \frac{3}{4}\overline{M}_n(v)$. У противному випадку нерівність (55) запишемо у вигляді

$$(1 + m_n(v))\|h\|^2 \leq \frac{3}{4} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1} y^{2k-1}}{(2k-1)!} v^2(y) h(x) h(y) dxdy$$

і, використовуючи (57), отримаємо

$$m_n(v) \leq \frac{3}{4}\overline{M}_n(v) - 1.$$

Отже, якщо $\overline{M}_n(v) > \frac{4}{3}$, то (55) виконується при $m_n(v) = \frac{3}{4}\overline{M}_n(v) - 1$. Звідси випливає, що при $m_n(v)$, яка визначається згідно (48), має місце друга з нерівностей (41).

Доведемо твердження 3. Розглянемо нерівність

$$m_n(v) - \eta_2(n, 0, v) > 0. \quad (58)$$

Згідно (20) і (23) будемо мати

$$\eta_2(n, 0, v) = \frac{3\sigma_2^2(n, v)}{4(2n+1)!\sqrt{4n+3}} = \frac{3\left| \int\limits_0^1 y^{2n+1} v^2(y) dy \right|}{4(2n+1)!\sqrt{4n+3}}. \quad (59)$$

Так як $\eta_2(n, 0, v) \to 0$ при $n \to \infty$, тоді знайдеться таке $\overline{n}$, починаючи з якого нерівність (58) буде виконуватися. Доведемо, що $\overline{R}$, яке визначається за формулою (51), є додатнім коренем рівняння

$$m_n(v) - N_n(r, v)r - \eta_2(n, r, v) = 0.$$

Дійсно, використовуючи позначення (52) і враховуючи (46) та (20), отримаємо

$$m_n(v) - \frac{3}{2}\overline{N}_n (r + \|v\|) r - \frac{3(r^2 + 2\sigma_1(n, v) r + \sigma_2^2(n, v))}{4C(n)} = 0.$$

Звідси

$$(2\overline{N}_n C(n) + 1)r^2 + 2(\overline{N}_n C(n)\|v\| + \sigma_1(n, v))r - (\frac{4}{3} m_n(v) C(n) - \sigma_2^2(n, v)) = 0.$$

Дане рівняння має два корені

$$R = -\frac{(\overline{N}_n C(n)\|v\| + \sigma_1(n, v)) \left(\sqrt{1 + \frac{(2\overline{N}_n C(n) + 1)(\frac{4}{3} m_n(v) C(n) - \sigma_2^2(n, v))}{\overline{N}_n C(n)\|v\| + \sigma_1(n, v))^2}} + 1 \right)}{2\overline{N}_n C(n) + 1},$$

$$\overline{R} = \frac{(\overline{N}_n C(n)\|v\| + \sigma_1(n,v)) \left(\sqrt{1 + \frac{(2\overline{N}_n C(n)+1)(\frac{4}{3} m_n(v)C(n) - \sigma_2^2(n,v))}{\overline{N}_n C(n)\|v\| + \sigma_1(n,v))^2}} - 1 \right)}{2\overline{N}_n C(n) + 1}.$$

Покажемо, що $\overline{R} > 0$, якщо має місце нерівність (58). Дійсно, використовуючи (59) і (52), нерівність (58) можна записати у вигляді

$$m_n(v) - \frac{3\sigma_2^2(n,v)}{4C(n)} > 0.$$

Звідси $\frac{4}{3} m_n(v)C(n) - \sigma_2^2(n,v)) > 0$, а отже $\overline{R} > 0$.

Всі умови теореми 3 [1] виконуються. Звідси випливає справедливість тверджень (3) – (5).

Оцінимо повну похибку при наближеному розв'язуванні рівняння (12) методом мінімальних нев'язок (2). Будемо вважати, що вхідна інформація задана точно, тобто неусувна похибка дорівнює нулю. Тоді повна похибка дорівнює обчислювальній похибці, тобто сумі похибок методу і заокруглення. Оцінку похибки будемо шукати у вигляді

$$\|u^* - u_{n\tau}^k\| \le \|u^* - u_n^*\| + \|u_n^* - u_n^k\| + \|u_n^k - u_{n\tau}^k\|, \tag{60}$$

де u^*, u_n^* – точні розв'язки відповідно рівнянь (12) та (13), u_n^k – елемент послідовності, побудований згідно з (2) для апроксимаційного рівняння (13), $u_{n\tau}^k$ – заокруглене значення u_n^k.

Тепер оцінимо кожен з доданків (53). За нерівністю трикутника і теоремою Лагранжа будемо мати

$$0 = \|T(u^*) - T_n(u_n^*)\| = \|T(u^*) + T_n(u^*) - T_n(u^*) - T_n(u_n^*)\| \ge \|T_n(u^*) - T_n(u_n^*)\| -$$
$$- \|T_n(u^*) - T(u^*)\| \ge \|T_n'(u^* + \tau(u_n^* - u^*))(u_n^* - u^*)\| - \eta_1(n,u^*) \ge$$
$$\ge m_n(n,r,u^*)\|u_n^* - u^*\| - \eta_1(n,u^*),$$

де $\tau \in (0,1)$. Звідси має місце оцінка

$$\|u^* - u_n^*\| \le \frac{\eta_1(n,u^*)}{m_n(n,r,u^*)}. \tag{61}$$

Позначимо через $\overline{S}(v_n, r_n)$ де v_n — один з розв'язків u_{ni} рівняння (13), який має вигляд (14), а r_n — відповідне йому значення r_{ni}, кулю в якій для оператора T_n виконуються умови (3), (4) теореми 1 з константами δ_{0n}, $M_n(v_n,r_n)$, $N_n(v_n,r_n)$, $m_n(v_n,r_n)$, які забезпечують виконання нерівностей (5), (6). Тоді, згідно теореми 1, рівняння (13) в кулі $\overline{S}(v_n,r_n)$ має єдиний розв'язок u_n^*, до якого (починаючи з $u_n^0 = v_n$) збігається послідовність u_n^k, побудована згідно (2) для оператора T_n і має місце оцінка похибки

$$\|u_n^* - u_n^k\| \le \frac{\delta_{0n}}{m_n(v_n,r_n)\,[1 - q_n(r_n)]}\,[q_n(r_n)]^k. \tag{62}$$

Оцінимо $\|u_n^k - u_{n\tau}^k\|$. Подамо оператор $T_n u_n(x)$ визначений рівністю (13) у вигляді

$$T_n u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[a_k - \frac{(-1)^{k-1}}{4(2k-1)!} \int_0^1 y^{2k-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i y^{2i-1} \right)^3 dy - \frac{(-1)^{k-1}}{4(2k-1)!} \right] x^{2k-1}. \tag{63}$$

Вираз, який одержується у квадратних дужках після виконання всіх арифметичних операцій і точного інтегрування для кожного $k = 1, 2, \dots, n$, позначимо через β_k. Тоді

$$T_n u_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \beta_k x^{2k-1}. \tag{64}$$

Результатом інтегрування в (63) після розкриття дужок під інтегралом є сума $S(n)$ доданків виду

$$\frac{c_1 \cdot a_i \cdot a_j \cdot a_l}{c_2}, \quad c_1, c_2 \in N, \quad i, j, l \in \{1, 2, \dots, n\}, \tag{65}$$

де

$$S(n) = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} \; + \; 4\sum\limits_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} l^2, & \text{при} \quad n = 2k-1, \quad k \in N, \\ n^2 \; + \; 4\sum\limits_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} l^2, & \text{при} \quad n = 2k, \quad k \in N. \end{cases} \tag{66}$$

Знайдемо похибку заокруглення при обчисленні $T_n u_n(x)$. Позначимо через $T_{n\tau} u_{n\tau}(x)$ оператор, який відрізняється від $T_n u_n(x)$ тим, що всі числа, які входять у вираз β_k тотожності (64) заокруглені, а всі арифметичні операції замінені псевдооопераціями, тобто відповідними операціями із заокругленням. Тоді згідно формул наведених в [2] будемо мати

$$T_{n\tau} u_{n\tau}(x) \le T_n u_n(x)(1+\varepsilon)^{S(n)+14} \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x^{2k-1}\right)(1+\varepsilon)^{S(n)+14}, \tag{67}$$

де $|\varepsilon| \le (S(n)+14) \cdot 1,06 \cdot 2^{-\tau}$.

Оцінимо похибку заокруглення при обчисленні лінійного оператора $T_n'(u_n)T_n u_n$, скалярного добутку $(T_n'(u_n)T_n u_n, T_n u_n)$ та квадрату норми $\|T_n'(u_n)T_n u_n\|^2$.

Запишемо похідну оператора $T_n'(u_n)T_n u_n$ згідно (16). Підставляючи відповідні функції і збираючи коефіцієнти при x^{2k-1}, $k = 1, 2, \dots, n$ будемо мати

$$T_n'(u_n)T_n u_n(x) = T_n u_n(x) - \int_0^1 K_n'(x, y, u_n(y))T_n u_n(y)dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \beta_k x^{2k-1} - \frac{3}{4}\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1} y^{2k-1}}{(2k-1)!} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i y^{2i-1}\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j y^{2j-1}\right) dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\beta_k + \frac{(-1)^k \cdot 3}{4(2k-1)!} \int_0^1 y^{2k-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i y^{2i-1}\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j y^{2j-1}\right) dy\right] x^{2k-1}. \tag{68}$$

Введемо позначення γ_k, $k = 1, 2, \dots, n$, для виразу, який одержимо у квадратних дужках (68) після виконання всіх арифметичних операцій і точного інтегрування. Отримаємо

$$T_n'(u_n)T_n u_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \gamma_k x^{2k-1}. \tag{69}$$

Для оцінки похибки заокруглення при обчисленні $T'_n(u_n)T_n u_n(x)$ врахуємо, що точне інтегрування дає суму $\frac{n^2(n+1)}{2}$ доданків виду

$$\frac{c_1 \cdot \beta_i \cdot a_j \cdot a_l}{c_2}, \quad c_1, c_2 \in N, \quad i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Запис $T'_{n\tau}(u_{n\tau})T_{n\tau}u_{n\tau}(x)$ будемо використовувати для позначення оператора, який відрізняється від $T'_n(u_n)T_n u_n(x)$, представленого у вигляді (69), тим що всі числа, що входять в останній заокруглені, а всі арифметичні операції замінені псевдоопераціями. Згідно формул наведених в [2] і враховуючи нерівність (67), будемо мати

$$T'_{n\tau}(u_{n\tau})T_{n\tau}u_{n\tau}(x) \le T'_n(u_n)T_n u_n(x)(1+\varepsilon)^{S(n)+\frac{n^2(n+1)}{2}+26} \equiv$$

$$\equiv \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k x^{2k-1}\right)(1+\varepsilon)^{S(n)+\frac{n^2(n+1)}{2}+26}, \tag{70}$$

де $|\varepsilon| \le \left(S(n) + \frac{n^2(n+1)}{2} + 26\right) \cdot 1,06 \cdot 2^{-\tau}$.

Використовуючи (64) та (69) одержимо

$$(T'_n(u_n)T_n u_n, T_n u_n) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x^{2i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x^{2j-1}\right) dx. \tag{71}$$

$$\|T'_n(u_n)T_n u_n\|^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_k x^{2k-1}\right)^2 dx. \tag{72}$$

Так як після розкриття дужок під інтегралом в правій частині рівності (71) і точного інтегрування отриманого виразу будемо мати суму n^2 доданків виду

$$\frac{\gamma_i \beta_j}{c}, \quad c \in N, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

то згідно відповідних формул [2] і враховуючи оцінки (67) та (70), отримаємо нерівність

$$(T'_{n\tau}(u_{n\tau})T_{n\tau}u_{n\tau}, T_{n\tau}u_{n\tau})_\tau \le (T'_n(u_n)T_n u_n, T_n u_n)(1+\varepsilon)^{2S(n)+\frac{n^2(n+3)}{2}+42}, \tag{73}$$

де $|\varepsilon| \le \left(2S(n) + \frac{n^2(n+3)}{2} + 42\right) \cdot 1,06 \cdot 2^{-\tau}$.

При обчисленні квадрату норми оператора $\|T'_n(u_n)T_n u_n(x)\|^2$ за формулою (72), одержимо суму $\frac{(n+1)n}{2}$ доданків виду

$$\frac{c_1 \cdot \gamma_i \cdot \gamma_j}{c_2}, \quad c_1, c_2 \in N, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Згідно формул [2] і враховуючи (70) справедлива оцінка

$$\|T'_{n\tau}(u_{n\tau})T_{n\tau}u_{n\tau}\|_\tau^2 \le \|T'_n(u_n)T_n u_n, T_n u_n\|^2(1+\varepsilon)^{2S(n)+n^2(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}+56}, \tag{74}$$

де $|\varepsilon| \le \left(2S(n) + n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} + 56\right) \cdot 1,06 \cdot 2^{-\tau}$.

Через $(T'_{n\tau}(u_{n\tau})T_{n\tau}u_{n\tau}, T_{n\tau}u_{n\tau})_\tau$ та $\|T'_{n\tau}(u_{n\tau})T_{n\tau}u_{n\tau}\|^2_\tau$ позначені відповідно псевдоскалярний добуток та псевдонорма, тобто звичайний скалярний добуток і норма, при обчисленні яких всі арифметичні операції замінені на відповідні операції із заокругленням [2].

Враховуючи (67), (73), (74) і кількість усіх арифметичних операцій при реалізації одного кроку ітераційного процесу (2) отримаємо

$$u^k_{n\tau} \leq u^k_n (1+\varepsilon)^{5S(n)+\frac{n^2(3n+5)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+115}, \tag{75}$$

де $|\varepsilon| \leq \left(5S_(n)+\frac{n^2(3n+5)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+115\right)\cdot 1,06\cdot 2^{-\tau}$.

Звідси

$$\|u^k_n - u^k_{n\tau}\| \leq \|u^k_n\| \left(5S(n)+\frac{n^2(3n+5)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+115\right)\cdot 1,06\cdot 2^{-\tau}. \tag{76}$$

Отже, враховуючи нерівності (61), (62) і (76), будемо мати

$$\|u^* - u^k_{n\tau}\| \leq \frac{\eta_1(n,u^*)}{m_n(n,r,u^*)} + \frac{\delta_{0n}}{m_n(v_n,r_n)\left[1-q_n(r_n)\right]}\left[q_n(r_n)\right]^k +$$

$$+\|u^k_n\| \left(5S(n)+\frac{n^2(3n+5)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+115\right)\cdot 1,06\cdot 2^{-\tau}.$$

1. *Бабич М. Д.* Об одном аппроксимационно-итерационном методе решения нелинейных операторных уравнений // Кибернетика. – 1991. – №1. – С. 21–28.
2. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 564 с.
3. Приближенное решение операторных уравнений / *Красносельский М.А., Вайникко Г. М., Забрейко П. М. и др.* – М.: Наука, 1969. – 455 с.
4. *Бабич М. Д., Шевчук Л. Б.* Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных интегральных уравнений // Кибернетика. – 1982. – №2. – С. 74–79.
5. *Бабич М. Д.* Об отделении решений одного класса нелинейных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1994. – 30, №9. – С. 1530–1541.

Одержано 20.09.2006