С. М. Дяченко (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

АЛГЕБРИ СКІНЧЕННОГО ТИПУ ВІДНОСНО ОДНОСТОРОННЬОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ МАТРИЦЬ

In this paper we consider the problem of one-sided equivalence of matrices over a finite dimensional algebra. We give a list of algebras on finite type.

У цій роботі ми розглядаємо задачу про односторонню еквівалентність матриць над скінченновимірними алгебрами, наведено список алгебр, для яких вказана задача має скінченний тип.

Нехай k — поле і Λ — скінченновимірна алгебра над k. Розглянемо наступну матричну задачу. На множині всіх (прямокутних) матриць з елементами із Λ введемо таке відношення еквівалентності: $A \sim A'$ тоді і лише тоді, коли існують оборотна матриця S з елементами з k та оборотна матриця T з елементами з Λ, такі що

$$A' = SAT. \tag{1}$$

Потрібно описати такі матриці з точністю до вказаної еквівалентності.

У цій статті ми розглядаємо алгебри Λ, для яких $\Lambda/Rad\Lambda \cong k \oplus k \oplus \ldots \oplus k$; такі алгебри можна задати графом зі співвідношеннями [1].

Нехай $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ — орієнтований граф. Γ_0 — множина його вершин, Γ_1 — множина його стрілок. Для кожної стрілки $e \in \Gamma_1$ позначимо через $\alpha(e) \in \Gamma_0$ її початок, і через $\beta(e) \in \Gamma_0$ її кінець:

$$\underset{\alpha(e)}{\circ} \xrightarrow{\qquad e \qquad} \underset{\beta(e)}{\circ} \; .$$

Шляхом в орієнтованому графі називатимемо послідовність стрілок $w = e_1 e_2 \ldots e_n$, таку що $\beta(e_i) = \alpha(e_{i+1})$, $i = 1, \ldots, n-1$. Початок та кінець шляху визначаються так: $\alpha(w) = \alpha(e_1)$, $\beta(w) = \beta(e_n)$.

У подальшому граф Γ вважаємо скінченним, тобто $|\Gamma_0| = s < \infty$, $|\Gamma_1| < \infty$. Із таким графом асоціюється k-алгебра шляхів (не обов'язково скінченновимірна). Її базисом є множина шляхів графа скінченної довжини (включаючи вершини як шляхи довжини нуль: $\{\varepsilon_j \mid j \in \Gamma_0\}$) $B = \{w \mid w = e_1 e_2 \ldots e_n,\ n \geq 0\}$. Множення в алгебрі задається на елементах базису як приписування шляхів, якщо це можливо і нульовим чином в іншому разі, тобто, якщо $w_1 = e_1 e_2 \ldots e_n$ і $w_2 = e_{n+1} e_{n+2} \ldots e_{n+m}$, то

$$w_1 w_2 = \begin{cases} e_1 e_2 \ldots e_n e_{n+1} e_{n+2} \ldots e_{n+m}, & \text{якщо } \beta(w_1) = \alpha(w_2); \\ 0, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

При цьому

$$\varepsilon_j w = \begin{cases} w, & \text{якщо } \alpha(w) = j; \\ 0, & \text{в іншому разі;} \end{cases} \qquad w \varepsilon_j = \begin{cases} w, & \text{якщо } \beta(w) = j; \\ 0, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Позначимо так визначену алгебру $\Lambda(\Gamma)$. Алгебра, задана графом зі співвідношеннями, — це факторалгебра алгебри $\Lambda(\Gamma)$ за ідеалом I таким, що $I \subset J^2$, де J — ідеал, породжений всіма стрілками графа.

Нехай $A \in M_{m \times n}(\Lambda)$. Розпишемо її за базисом у наступному вигляді:

$$A = \sum_{j=1}^{s} A_j \varepsilon_j + \sum_{w} A_w w. \tag{2}$$

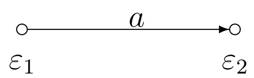
Лема 1. *Квадратна матриця A, що записана у вигляді* (3), *є оборотною тоді і лише тоді, коли оборотними є всі матриці A_j.*

Доведення випливає з рівності $AX = E$, де X також записана у вигляді (2) (E — одинична матриця).

Наш перший крок до розв'язання сформульованої матричної задачі полягає в зведенні її (за допомогою розкладу матриць за базисом) до матричної задачі, але вже над полем.

Розглянемо наступний приклад.

Приклад 1. Нехай $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$, де граф Γ має такий вигляд:



.

Розглянемо рівність (1): $A' = SAT$. Нехай

$$A = A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + Ba; \quad A' = A'_1\varepsilon_1 + A'_2\varepsilon_2 + B'a; \quad T = T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + Va;$$

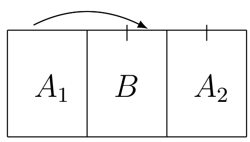
A_1, A_2, B, A'_1, A'_2, $B' \in M_{m\times n}(k)$, $S \in GL_m(k)$, T_1, $T_2 \in GL_n(k)$, $V \in M_n(k)$. Тоді

$$A'_1\varepsilon_1 + A'_2\varepsilon_2 + B'a = S(A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + Ba)(T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + Va).$$

Перемноживши елементи базису за правилами множення в алгебрі та прирівнявши коефіцієнти при елементах базису, отримаємо наступні рівності:

$$A'_1 = SA_1T_1, \quad A'_2 = SA_2T_2, \quad B' = SBT_2 + SA_1V.$$

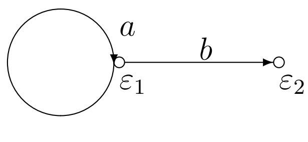
Отже, ми отримали наступну матричну задачу: є три матриці A_1, A_2, B, в них дозволено робити елементарні перетворення рядків та стовпчиків, при цьому, елементарні перетворення рядків всіх матриць є одночасними (задаються множенням на матрицю S), перетворення стовпчиків матриць A_2 та B є одночасними (задаються множенням на матрицю T_2) і крім того, стовпчики матриці A_1 можна додавати до стовпчиків матриці B. Схематично можна наступним чином зобразити отриману задачу:



.

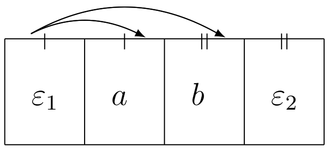
У загальному випадку маємо наступну матричну задачу, яку будемо позначати $M(\Lambda)$. Якщо базис алгебри Λ складається із шляхів $\{w_i \mid i = 1\ldots l\}$, то ми маємо набір матриць $\{A_i,\ i = 1\ldots l\}$; при цьому допустимими перетвореннями є: елементарні перетворення рядків та стовпчиків матриць; елементарні перетворення рядків у всіх матрицях є одночасними; якщо $\beta(w_i) = \beta(w_j)$, то одночасними є перетворення стовпчиків матриць A_i та A_j; якщо $w_iw_m = w_j$ — добуток елементів базису, то дозволено додавання стовпчиків матриці A_i до стовпчиків матриці A_j, це додавання, яке будемо називати зовнішнім позначимо позначкою w_m; зовнішні додавання, позначені однаковими позначками є одночасними.

Приклад 2.



,

де $I = \{a^2, ab\}$. Тоді матрична задача має наступний вигляд:



.

Дослідимо, для яких алгебр вищезгадана матрична задача є задачею скінченного типу.

Спочатку розглянемо обмеження, які накладає на граф умова скінченності типу задачі. В подальшому $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ — орієнтований граф, $\Lambda = \Lambda(\Gamma)/I$ — алгебра побудована за графом зі співвідношеннями I.

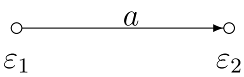
Ми говоримо, що алгебра скінченного типу, якщо скінченного типу є розглянута вище матрична задача над цією алгеброю.

Розглянемо декілька допоміжних тверджень, які допоможуть дослідити, для яких алгебр задача буде скінченного типу.

Лема 2. *Якщо* Λ *— алгебра скінченного типу, то* $|\Gamma_0| < 4$.

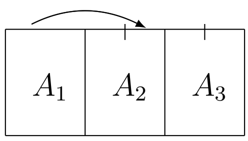
Доведення. Якщо граф Γ має принаймні 4 вершини, то якщо ми розглянемо матриці, які відповідають вершинам графа, ми отримаємо задачу про зображення частково впорядкованої множини, яка складається з чотирьох непорівняльних точок. Добре відомо, що така задача має нескінченний тип (див [2]).

Лема 3. *Якщо* Λ *— алгебра скінченного типу, то* Γ *не містить підграф вигляду*



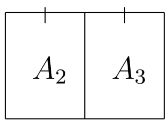
.

Доведення. Дійсно, такому підграфу відповідає задача



,

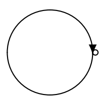
яка містить підзадачу



;

остання задача — це загальновідома задача про пучок матриць, яка не є задачею скінченного типу.

Наслідок 4. Граф Γ є незв'язним об'єднанням підграфів вигляду

 та $\circ$.

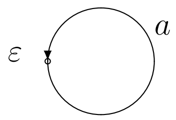
Має місце така теорема.

Теорема 1. *Алгебрами скінченного типу є такі і лише такі алгебри* $\Lambda = \Lambda(\Gamma)/I$.

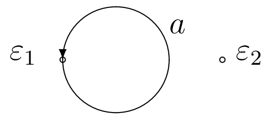
1. $\overset{\varepsilon}{\circ}$, $\quad I = \{0\}$.

2. $\overset{\varepsilon_1}{\circ} \quad \overset{\varepsilon_2}{\circ}$, $\quad I = \{0\}$.

3. $\overset{\varepsilon_1}{\circ} \quad \overset{\varepsilon_2}{\circ} \quad \overset{\varepsilon_3}{\circ}$, $\quad I = \{0\}$.

4. 

, $\quad I = \{a^2\}$ *або* $I = \{a^3\}$.

5. 

, $\quad I = \{a^2\}$.

Доведення. Розглянемо спочатку графи, які складаються лише з точок і не мають петель. Згідно леми 2 кількість точок менша, або рівна трьом. Це відповідає першим трьом пунктам в теоремі. Ці задачі будуть скінченного типу, оскільки вони співпадають з матричними задачами, які пов'язані з зображенням частково-впорядкованих множин, які складаються відповідно з однієї, двох та трьох непорівняльних точок [2].

Розглянемо графи, які мають петлі.

Почнемо з випадку, коли граф має одну вершину (випадок 4).

Якщо $I = \{a^4\}$, то ми отримаємо задачу $M(\Lambda)$ з чотирма матрицями. Розглянемо четвірки матриць такого вигляду:

$$T(A) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & A \\ \hline \end{array} .$$

Легко бачити, що $T(A)$ і $T(A')$ переводяться одне в одне за допомогою допустимих перетворень тоді і лише тоді, коли матриці A і A' подібні. Це означає, що задача має нескінченний тип. Звідси випливає аналогічний результат для $I = \{a^l\}$, $l > 4$.

Отже, якщо граф має одну вершину, нам залишилося розглянути випадки, коли $l = 2$ і $l = 3$.

У першому випадку маємо задачу про зображення лінійно впорядкованої множини з двох елементів, яка має скінченний тип [2]. У другому випадку маємо три матриці A_1, A_2, A_3, для яких одночасними є елементарні перетворення як рядків так і стовпчиків та одночасні зовнішні додавання стовпчиків $A_1 \to A_2$, $A_2 \to A_3$, а також допустимі додавання стовпчиків $A_1 \to A_3$. Відомо, що це задача скінченного типу [3] (у цьому легко переконатися за допомогою методу послідовного зведення матриць).

Розглянемо випадок, коли граф має дві вершини.

Якщо граф має вигляд 5 (див. формулювання теореми), то у випадку $I = \{a^3\}$, ми отримаємо задачу $M(\Lambda)$ з чотирма матрицями, яка містить у собі задачу про пучок матриць (яка не є задачею скінченного типу):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline E & 0 & 0 & A \\ \hline 0 & E & 0 & B \\ \hline \end{array} .$$

Звідси випливає аналогічний результат для $I = \{a^l\}$, $l > 3$.

Отже, якщо граф має вигляд 5, нам залишилося розглянути випадок, коли $l = 2$. У цьому випадку отримаємо наступну задачу:

A_1	A_2	A_3

.

Відомо, що це задача скінченного типу [3] (у цьому легко переконатися за допомогою методу послідовного зведення матриць).

Покажемо, що у випадку двох петель задача не буде мати скінченний тип. Якщо маємо дві петлі a та b, то згідно сказаного вище (адже граф містить петлю та вершину) з необхідністю виконується $I = \{a^2, b^2\}$, тобто ми отримуємо наступну задачу:

A_1	A_2	A_3	A_4

.

Розглянемо четвірки матриць такого вигляду:

$H(A) =$

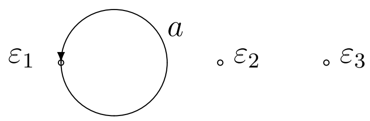
E	0	0	A
0	E	E	0

.

Легко бачити, що $H(A)$ і $H(A')$ переводяться одне в одне за допомогою допустимих перетворень тоді і лише тоді, коли матриці A і A' подібні. Це означає, що задача має нескінченний тип.

Розглянемо випадок, коли граф має три вершини.

Випадок, коли граф не має петель вже розглянуто. Згідно сказаного вище граф не може мати дві петлі, тому він може мати лише такий вигляд:



І за доведеним для графа вигляду 5 випливає, що нам достатньо розглянути випадок $I = \{a^2\}$.

Ось матрична задача, пов'язана з такою алгеброю:

A_1	A_2	A_3	A_4

.

Розглянемо четвірки матриць наступного вигляду:

$N(A) =$

E	0	E	0
E	E	0	A

.

Легко бачити, що $N(A)$ і $N(A')$ переводяться одне в одне за допомогою допустимих перетворень тоді і лише тоді, коли матриці A і A' подібні. Це означає, що задача має нескінченний тип.

Таким чином, ми розглянули задачу про односторонню еквівалентність матриць і отримали перелік алгебр, для яких ця задача буде скінченного типу.

1. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры. – К.: Вища школа, 1980. – 200 с.
2. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Записи научных семинаров ЛОМИ. – Т. 28. – С. 32–41.
3. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Категорные матричные задачи и проблема Брауэра-Трелла. – К.: Наукова думка, 1973. – 100 с. – Препринт 73.9.

Одержано 13.09.2006