А. О. Кирилюк (Ужгородський нац. ун-т)

2-АДИЧНІ КРИСТАЛОГРАФІЧНІ ГРУПИ

The descriptions of the classes of equivalent two-dimensional R-crystallographic groups for field R of integer quantities of quadratic extension of the field of rational 2-adic numbers are given in the paper.

В роботі дано описання класів еквівалентних двовимірних R-кристалографічних груп для кільця R цілих величин квадратичного розширення поля раціональних 2-адичних чисел.

В роботі [1] розглядається узагальнення класичних кристалографічних груп, пов'язане з заміною кільця цілих раціональних чисел на деякі кільця R. До узагальнених кристалографічних груп відносяться розширення адитивних груп модуля R-зображення скінченної групи з допомогою цієї групи. Такі розширення вивчались в роботах [2-4].

Нехай R — кільце головних ідеалів, F — поле, що містить R як підкільце, M — R-модуль зі скінченним R-базисом, FM — найменший лінійний простір над полем F, що містить R-модуль M (наприклад, $M = R^n$ — модуль n-вимірних векторів над кільцем R, тоді $FM = F^n$ — n-вимірний векторний простір над полем F). Введемо позначення $\widehat{M} = (FM)^+/M^+$ для факторгрупи адитивної групи $(FM)^+$ простору FM по підгрупі M^+. Нехай G — група, Γ — точне матричне зображення групи G над кільцем R, M — R-модуль зображення Γ. Тоді модуль M, простір FM і група $\widehat{M}$ будуть RG-модулями. Нагадаємо, що відображення $f : G \to \widehat{M}$, для якого $f(xy) = xf(y) + f(x)$ $(x, y \in G,\ f(1) = 0)$ називається 1-коциклом групи G зі значеннями в групі $\widehat{M}$. Множина $C^1(G, \widehat{M})$ всіх 1-коциклів f буде групою відносно дії додавання коциклів. Коцикл f такий, для якого існує вектор $z \in FM$, що $f(x) = (x-1)z+M$ $(x \in G)$, називається 1-кограницею. Множина $B^1(G, \widehat{M})$ всіх кограниць буде підгрупою в групі $C^1(G, \widehat{M})$. Факторгрупа $H^1(G, \widehat{M}) = C^1(G, \widehat{M})/B^1(G, \widehat{M})$ називається першою групою когомологій групи G зі значеннями в групі $\widehat{M}$.

Нехай $f \in C^1(G, \widehat{M})$. Тоді для кожного $x \in G$ значення

$$f(x) = a + M = \{a + M | m \in M\} \subset FM \quad (a \in FM)$$

буде суміжним класом групи $(FM)^+$ за підгрупою M^+. Розглянемо множину

$$K(G, M, f) = \left\{ \begin{pmatrix} x & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | x \in G, m \in f(x) \right\}$$

матриць порядку 2 з наступною операцією множення:

$$\begin{pmatrix} x & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & xn + m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (x, y \in G, m \in f(x), n \in f(y)).$$

Множина $K(G, M, f)$ буде групою відносно вказаної операції. Підмножина T матриць виду

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (m \in M = f(1))$$

буде нормальною підгрупою в цій групі, а факторгрупа $K(G, M, f)/T$ ізоморфна групі G. Підгрупа T ізоморфна групі M^+ і є максимальною абелевою підгрупою в групі $K(G, M, f)$. Якщо h — довільна когранциця і $f_1 = f + h$, то групи $K(G, M, f)$ та $K(G, M, f_1)$ будуть ізоморфні. Якщо коцикл f є когранцицею, зокрема $f = 0$, то розширення $K(G, M, f)$ буде розщепленим, тобто група $K(G, M, f)$ є напівпрямий добуток групи M^+ і групи G.

Групу $K(G, M, f)$ назвемо R-кристалографічною групою з точковою групою G і розмірністю, рівною рангу вільного R-модуля M (див. [1, 2]). Якщо $R = \mathbb{Z}$ — кільце цілих раціональних чисел і $F = R$, то $\mathbb{Z}$-кристалографічні групи — це класичні кристалографічні групи.

Нехай G_1 — група, що ізоморфна групі G і $\varepsilon : G_1 \cong G$ — відповідний ізоморфізм. Перетворимо RG-модуль M в RG_1-модуль, поклавши $x_1 m = \varepsilon(x_1)m$ ($x_1 \in G_1$, $m \in \in M$). Відображення $f^\varepsilon : G_1 \to \widehat{M} : f^\varepsilon(x_1) = f(\varepsilon(x_1))$ ($x_1 \in G_1$) буде 1-коциклом групи G_1 зі значеннями в групі $\widehat{M}$. Групи $K(G_1, M, f^\varepsilon)$ і $K(G, M, f)$ будуть ізоморфні.

Нехай M_1 — R-модуль, ізоморфний R-модулю M і $\tau : M_1 \cong M$ — відповідний ізоморфізм. Перетворимо M_1 в RG-модуль, визначивши $g \circ m_1 = \tau^{-1} g \tau(m_1)$ ($g \in \in G$, $m_1 \in M_1$). Відображення $f_\tau : G \to \widehat{M_1} : f_\tau(g) = \tau^{-1}(f(g))$ ($g \in G$) буде 1-коциклом групи G зі значеннями в групі $\widehat{M_1}$. Групи $K(G, M_1, f_\tau)$ і $K(G, M, f)$ будуть ізоморфні. Нехай $\tau : M \to M$, $\varepsilon : G \to G$ — такі автоморфізми R-модуля M і групи G, що $xm = \tau^{-1} x \tau m$ ($x \in G$, $m \in M$). Відображення $f_\tau^\varepsilon : G \to \widehat{M} : f_\tau^\varepsilon(x) = \tau^{-1} f(\varepsilon x)$ ($x \in G$) буде 1-коциклом групи G зі значеннями в групі $\widehat{M}$. Групи $K(G, M, f_\tau^\varepsilon)$ і $K(G, M, f)$ будуть ізоморфні.

Нехай Γ^1 ще одне точне R-зображення групи G того ж степеня, що і Γ. Зображення Γ і Γ^1 називаються спряженими, якщо для деякого автоморфізму ε групи G R-зображення $\Gamma\varepsilon$ і Γ^1 будуть еквівалентні (тобто існує така оборотня матриця S над кільцем R, що $S^{-1}\Gamma^1(x)S = \Gamma(\varepsilon x)$ ($x \in G$)). Точні R-зображення Γ і Γ^1 групи G будуть спряженими тоді і тільки тоді, коли матричні групи $\Gamma(G)$ і $\Gamma^1(G)$ будуть спряжені в групі $GL(n, R)$, де n — степінь цих зображень (тобто $S^{-1}\Gamma(G)S = \Gamma^1(G)$ для деякої матриці $S \in GL(n, R)$). Нехай G_1 — група, Γ^1 — точне R-зображення цієї групи, M_1 — модуль зображення Γ^1, а f_1 — 1-коцикл групи G_1 зі значеннями в групі $\widehat{M}_1$. Якщо групи $K(K_1, M_1, f_1)$ і $K(G, M, f)$ ізоморфні, то зображення Γ і Γ^1 будуть спряженими (тобто групи $\Gamma(G)$ і $\Gamma_1(G_1)$ будуть спряжені в групі $GL(n, R)$).

Замінимо групу G на групу $\Gamma(G)$, тобто нехай далі $G = \Gamma(G) \subset GL(n, R)$. Будемо також вважати, що $M = R^n$ — R-модуль n-вимірних векторів-стовпчиків з компонентами із поля F, $\widehat{M}$ — група n-вимірних векторів-стовпчиків, компоненти яких належать групі $\widehat{F} = F^+/R$. Якщо $x \in G$ і $m \in M$ або $m \in FM$, або $m \in \widehat{M}$, то xm — це добуток матриці x на матрицю m. Нехай $N(G) = X \in GL(n, R) | X^{-1}GX = G$ — нормалізатор групи G в групі $GL(n, R)$. Для кожного коцикла $f : G \to \widehat{M}$ і кожного елемента $S \in N(G)$ відображення $f^S : G \to \widehat{M} : f^S(x) = S^{-1} f(SxS^{-1})$ ($x \in G$) буде 1-коциклом групи G зі значеннями в групі $S^{-1}\widehat{M} = \widehat{M}$. Групи $K(G, M, f^S)$ і $K(G, M, f)$ будуть ізоморфні.

Твердження 1 ([1]). *Нехай $f, f_1 : G \to \widehat{M}$ — два коцикла. Групи $K(G, M, f)$ і $K(G, M, f_1)$ будуть ізоморфні тоді і тільки тоді, коли для деякого елемента $S \in \in N(G)$ коцикли f^S і f_1 відрізняються на когранцицю (тобто ці коцикли визначають один і той же елемент групи когомологій $H^1(G, \widehat{M})$).*

Нехай дано точкову групу $G \subset GL(n, R)$ (G — скінченна група), що діє в модулі $M = R^n$ n-вимірних векторів над кільцем R. Список всіх груп $K(G, M, f)$, де коцикл f пробігає систему представників всіх класів 1-коциклів (тобто елементів групи кого-мологій $H^1(G,\widehat{M})$) — це перелік цих груп з точністю до їх еквівалентності. Список всіх груп $K(G,M,f)$, де коцикл f пробігає систему представників тих класів 1-коциклів, що представляють різні орбіти групи $H^1(G,\widehat{M})$ відносно дії в ній норма-лізатора $N(G)$ буде переліком груп $K(G,M,f)$ з точністю до їх ізоморфізму.

Нехай далі R буде кільцем цілих величин квадратичного розширення $\mathbb{Q}_2(\sqrt{d})$ поля раціональних 2-адичних чисел $\mathbb{Q}_2$. Існує 7 таких розширень відповідно з дискримінантом $d \in \{-1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Кільце R співпадає з кільцем $\mathbb{Z}_2[\sqrt{d}]$ ($\mathbb{Z}_2$ — кільце цілих 2-адичних чисел) за виключенням випадку $d=-3$, в цьому випадку $R=\mathbb{Z}_2[\varepsilon]$ (ε — неодиничний корінь степеня 3 з одиниці). Всі ці випадки розіб'ємо на три: I) $d=-1$; II) $d=-3$; III) всі інші випадки d.

I) $R=\mathbb{Z}_2[i]$ ($i^2=-1$). Елемент $t=i-1$ є простим елементом кільця R, R/tR — поле з двох елементів, а група $R^+/2R^+$ є групою типу $(2,2)$.

Ми будемо використовувати наступний результат.

Лема 1 ([5]). *Незвідні підгрупи G групи $GL(2,R)$ з точністю до спряженості вичерпуються групами:*

1) $C_8=\left\langle a=\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle$ — *циклічна група порядку* 8;

2) $D_4^1=\left\langle a=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle$, $D_4^2=\left\langle a=\begin{pmatrix} 1 & t \\ -it & -1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\rangle$, $D_4^3=\left\langle a=\begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & -i \end{pmatrix}\right\rangle$ — *групи дієдра порядку* 8;

3) $K_4^1=\left\langle a=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right\rangle$, $K_4^2=\left\langle a=\begin{pmatrix} 1 & t \\ -it & -1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\rangle$ — *групи кватерніонів порядку* 8;

4) $N^1=\left\langle a=iE, b=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\rangle$, $N^2=\left\langle a=iE, b=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ it & i \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\rangle$ $(a^4=b^2=c^2=1, ab=ba, ac=ca, c^{-1}bc=a^2b)$;

5) $M^1=\left\langle a=\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\rangle$, $M^2=\left\langle a=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 & it \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\rangle$ $(a^8=b^2=1, b^{-1}ab=a^5)$ — *квазідіедральні групи порядку* 16;

6) $L^1=\left\langle a=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle$, $L^2=\left\langle a=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\rangle$ $(a^4=b^4c^2=1, ab=ba, ac=ca, c^{-1}bc=ab^{-1})$;

7) $C_3=\langle a\rangle$, $C_6=\langle -a\rangle$, $C_{12}=\langle ia\rangle$, *де* $a=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ — *циклічні групи порядків* 3, 6, 12;

8) $D_3\langle C_3,b\rangle$, $D_6=\langle C_6,b\rangle$, $D_{12}=\langle C_{12},b\rangle$, *де* $b=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — *групи діедра порядків* 6, 12, 24 *відповідно.*

Теорема 1. *Нехай G — одна з груп, що вказані в лемі 1, $f: G\to \widehat{M}$ — 1-коцикл цієї групи. Якщо G — група типу* 1), 7), 8), *то $f=0$, тобто всі розширення $K(G,\widehat{M},f)$ є розщеплюваними. Якщо G — група типу* 2) — 6), *тоді $f(a)=0$. Значення коцикла f на інших твірних елементах описані в таблиці 1, в якій також вказано тип групи $H^1(G,\widehat{M})=H^1$:*

Таблиця 1.

G	$f(b)$	$f(c)$	H^1	*тип* H^1
D_4^1	$(\beta,\beta), 2\beta=0$		$H^1\cong R/2R$	$(2,2)$
D_4^2	$(\beta,\beta+\delta t^{-1}), t\beta=0, \delta\in R$		$H^1\cong (R/tR)^2$	(2,2)
D_4^3	$(0,\beta), t\beta=0$		$H^1\cong R/tR$	(2)
K_4^1	$(0,0)$		$H^1=0$	
K_4^2	$(\beta_1,\beta_2), t\beta_j=0, j=1,2$		$H^1\cong (R/tR)^2$	(2,2)
N^1	$(\alpha t^{-1},\beta), \alpha\in R, t\beta=0$	$(\gamma,\delta t^{-1}), t\gamma=0,\delta\in R$	$H^1\cong (R/tR)^4$	(2,2,2,2)
N^2	$(0,0)$	$(\gamma,\gamma), t\gamma=0$	$H^1\cong R/2R$	(2)
M^1	$(\beta,\beta), t\beta=0$		$H^1\cong R/2R$	(2)
M^2	$(\beta,\alpha t^{-1}), t\beta=0,\alpha\in R$		$H^1\cong (R/tR)^2$	(2,2)
L^1	$(\beta_1,\beta_2), t\beta_j=0, j=1,2$	$(\gamma,\gamma), t\gamma=0$	$H^1\cong (R/tR)^3$	(2,2,2)
L^2	(0,0)	$(0,\delta t^{-1}), \delta\in R$	$H^1\cong R/tR$	(2)

Доведення. Знайдемо, наприклад, групу $H^1(D_4^1,\widehat{M})$. Так як $a+1$ — оборотній елемент в $GL(2,\mathbb{Q}_2(i))$, то в кожному класі існує коцикл $f: D_4^1\to\widehat{M}$ при $\widehat{M} = (F^2)^+/(R^2)^+$, $F=\mathbb{Q}_2(i)$ такий, що $f(a)=0$. Із співвідношень $b^2=1, bab=a^3$ випливає, що $(b+1)f(b)=0, (ba+1)f(b)=0$. Звідси знаходимо $f(b)=(\beta,\beta)$, $\beta\in\widehat{F}$, $\widehat{F}=F^+/R^+$ і $2\beta=0$. Нехай h — кограниця, що визначена вектором $z=(z_1,z_2)$, $z_1,z_2\in\widehat{F}$ і $f_1=f+h$. Вважаємо, що $f_1(a)=0$. Тоді $z=(z_1,z_1)$, $2z_1=0$ і $f_1(b) = f(b)+(b-1)z=f(b)$. Це значить, що елементи групи $H^1(D_4^1,\widehat{M})$ представляються чотирма коциклами f_j такими, що $f_j(a)=0$ і $f_j(b)=(\beta_j,\beta_j)$, $\beta_1=0$, $\beta_2=2^{-1}$, $\beta_3=2^{-1}t$, $\beta_4=2^{-1}(t+1)$. Отже група $H^1(D_4^1,\widehat{M})$ буде абелевою групою типу (2,2), що породжується класами коциклів f_2,f_3. Інші випадки розглядаються аналогічно.

Лема 2. *З точністю до спряженості група $GL(2,R)$ містить наступні звідні скінченні підгрупи:*

1) $C_2^1=\left\langle a=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\rangle$, $C_2^2=\left\langle a=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, $C_2^3=\left\langle a=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, $C_2^4=\left\langle a=\begin{pmatrix}-1&t\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$ — *циклічні групи порядку* 2;

2) $C_4^1=\langle a=iE\rangle$, $C_4^2=\left\langle a=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\right\rangle$, $C_4^3=\left\langle a=\begin{pmatrix}i&1\\0&-i\end{pmatrix}\right\rangle$, $C_4^4 = \left\langle a=\begin{pmatrix}i&t\\0&-i\end{pmatrix}\right\rangle$, $C_4^5=\left\langle a=\begin{pmatrix}i&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, $C_4^6=\left\langle a=\begin{pmatrix}i&1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, $C_4^7=\left\langle a= \begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}\right\rangle$, $C_4^8=\left\langle a=\begin{pmatrix}-i&1\\0&-1\end{pmatrix}\right\rangle$ — *циклічні групи порядку* 4;

3) $A_{2,2}^1=\left\langle a=-E, b=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, $A_{2,2}^2=\left\langle a=-E, b=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, $A_{2,2}^3=\left\langle a= -E, b=\begin{pmatrix}-1&t\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$ — *абелеві групи типу* $(2,2)$;

4) $A_{4,2}^1=\left\langle a=iE, b=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, $A_{4,2}^2=\left\langle a=iE, b=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, $A_{4,2}^3 = \left\langle a=-E, b=\begin{pmatrix}i&1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, $A_{4,2}^4=\left\langle a=-E, b=\begin{pmatrix}i&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$, $A_{4,2}^5=\left\langle a=iE, b= \begin{pmatrix}-1&t\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$ — *абелеві групи типу* $(4,2)$;

5)$A^1_{4,4} = \left\langle a = iE, b = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $A^2_{4,4} = \left\langle a = iE, b = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ — *абелеві групи типу* $(4,4)$.

Доведення леми нескладне, воно базується на очевидній класифікації незвідних R-зображень вказаних груп.

Теорема 2. *Значення* 1*-коциклів* $f : G \to \widehat{M}$ *для груп* G*, що вказані в лемі* 2*, і типи відповідних груп* $H^1 = H^1(G, \widehat{M})$ *наведено в таблицях* 2-6:

Таблиця 2. *Циклічні групи порядку* 2.

G	$f(a)$	H^1	*тип групи* H^1
C^1_2	0	$H^1 = 0$	
C^2_2	$(0,\alpha), 2\alpha = 0$	$H^1 \cong R/2R$	(2,2)
C^3_2	0	$H^1 = 0$	
C^4_2	$(0,\alpha), t\alpha = 0$	$H^1 \cong R/tR$	(2)

Таблиця 3. *Циклічні групи порядку* 4.

G	$f(a)$	H^1	*тип групи* H^1
C^1_4	0	$H^1 = 0$	
C^2_4	0	$H^1 = 0$	
C^3_4	0	$H^1 = 0$	
C^4_4	0	$H^1 = 0$	
C^5_4	$(0,\alpha), 4\alpha = 0$	$H^1 \cong R/4R$	(4,4)
C^6_4	$(0,\alpha), 2t\alpha = 0$	$H^1 \cong R/2tR$	(4,2)
C^7_4	0	$H^1 = 0$	
C^8_4	0	$H^1 = 0$	

Таблиця 4. *Групи типу* $(2,2)$.

G	$f(a)$	$f(b)$	H^1	*тип групи* H^1
$A^1_{2,2}$	0	$(\beta_1,\beta_2), 2\beta_j = 0, j = 1,2$	$H^1 \cong (R/2R)^2$	(2,2,2,2)
$A^2_{2,2}$	0	$(\beta,0), 2\beta = 0$	$H^1 \cong R/2R$	(2,2)
$A^3_{2,2}$	0	$(\beta_1,\beta_2), t\beta_j = 0, j = 1,2$	$H^1 \cong (R/2R)^2$	(2,2)

Таблиця 5. *Групи типу* $(4,2)$.

G	$f(a)$	$f(b)$	H^1	*тип групи* H^1
$A^1_{4,2}$	0	$(\beta_1,\beta_2), t\beta_j = 0, j = 1,2$	$H^1 \cong (R/tR)^2$	(2,2)
$A^2_{4,2}$	0	0	$H^1 = 0$	
$A^3_{4,2}$	0	$(0,\beta), 2\beta = 0$	$H^1 \cong R/2R$	(2,2)
$A^4_{4,2}$	0	$(\beta_1,\beta_2), t\beta_1 = 0, 2\beta_2 = 0$	$H^1 = (R/tR) \times (R/2R)$	(2,2,2)
$A^5_{4,2}$	0	$(\beta_1,\beta_2), t\beta_j = 0, j = 1,2$	$H^1 \cong (R/tR)^2$	(2,2)

Таблиця 6. *Групи типу* $(4,4)$.

G	$f(a)$	$f(b)$	H^1	*тип групи* H^1
$A^1_{4,4}$	0	$(\beta_1,\beta_2), t\beta_j = 0, j = 1,2$	$H^1 \cong (R/tR)^2$	(2,2)
$A^2_{4,4}$	0	$(0,\beta), t\beta = 0$	$H^1 \cong R/tR$	(2)

II) $R = \mathbb{Z}_2[\varepsilon]$ $(\varepsilon^3 = 1, \varepsilon \neq 1)$. Нехай G — скінченна підгрупа групи $GL(2, R)$, що діє в R-модулі $M = R^2$. Число 2 є простим елементом кільця R, а факторкільце $R/2R \cong \overline{Z}_2(\varepsilon)$ — поле з чотирьох елементів $(\widehat{Z}_2 = Z_2/2Z_2)$.

Лема 3 ([4-6]). *Група $GL(2, R)$ з точністю до спряженості містить наступні скінченні підгрупи.*

1. *Незвідні абелеві групи:*

1) $C_4 = \left\langle a_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $C_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \right\rangle$, $(\alpha = 1/2(\sqrt{5} - 1))$, $C_{10} = \langle -a_5 \rangle$;
2) $C_{12} = \langle \varepsilon a_4 \rangle$, $C_{15} = \langle \varepsilon a_5 \rangle$, $C_{30} = \langle -\varepsilon a_5 \rangle$ — *циклічні групи C_n порядку n;*

2. *Неабелеві групи:*

3) $D_3 = \left\langle a_3 = diag[\varepsilon, \varepsilon^2], b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $D_6 = \langle -a_3, b \rangle$, $D_n = \langle C_n, b \rangle$ — *групи дієдра* $(n = 4, 5, 10)$*;*
4) $D_{n,3} = \langle \varepsilon \rangle \times D_n$, $D_{n,6} = \langle -\varepsilon \rangle \times D_n$ $(n \neq 4, 6)$ — *прямі добутки циклічних груп порядків* 3 *і* 6 *на групу дієдра* D_n $(n = 3, 4, 5, 6, 10)$*;*
5) $W = \langle -\varepsilon \rangle \int S_2 = \langle a_1 = diag[-\varepsilon, 1], b \rangle$ — *вінцевий добуток циклічної групи порядку* 6 *і групи підстановок на двох символах;*
6) $K_4 = \left\langle a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & -\varepsilon \end{pmatrix} \right\rangle$ — *група кватерніонів порядку* 8;

3. *Звідні групи:*

7) $C_2^j (j = 1, 2, 3)$ — *циклічні групи порядку* 2 (*див. лему* 2)*;*
8) $A_{2,2}^j (j = 1, 2)$ — *групи типу* $(2, 2)$;
9) $C_3^1 = \langle \varepsilon E \rangle$, $C_3^2 = \langle diag[\varepsilon, 1] \rangle$, $C_3^3 = \langle diag[\varepsilon, \varepsilon^2] \rangle$ — *циклічні групи порядку* 3;
10) $C_6^j = \langle -E \rangle \times C_3^j$, $C_6^{j+3} = \langle \varepsilon E \rangle \times C_2^j$ $(j = 1, 2, 3)$;
11) $C_6^7 = \langle diag[-\varepsilon, 1] \rangle$, $C_6^8 = \langle diag[\varepsilon, -1] \rangle$ — *циклічні групи порядку* 6.

Теорема 3. *Нехай G — циклічна група порядку $|G| > 2$. Тоді $H^1(G, \widehat{M}) = 0$, за виключенням $G = C_6^7$. Група $H^1(C_6^7, \widehat{M})$ є групою типу $(2, 2)$ і породжується коциклами: $f(a) = (0, \alpha)$, $(2\alpha = 0)$. Якщо G — одна із груп D_n $(n \neq 4)$, $D_{n,3}$, $D_{n,6}$, то $H^1(G, \widehat{M}) = 0$. Група $H^1(D_4, \widehat{M})$ є групою типу $(2, 2)$ і породжується коциклами: $f(a) = 0$, $f(b) = (\alpha, \alpha)$ $2\alpha = 0$. Група $H^1(W, \widehat{M})$ є групою типу $(2, 2)$ і породжується коциклами: $f(a_1) = (0, \alpha)$, $f(b) = 0$ $(2\alpha = 0)$. Група $H^1(K_4, \widehat{M})$ є групою типу $(2, 2)$ і породжується коциклами: $f(a) = 0$, $f(b) = (\alpha, \alpha)$ $2\alpha = 0$. Якщо G — група C_2^j, $A_{2,2}^j$, $A_{2,2}^2$, то група $H^1(G, \widehat{M})$ буде такою ж, як і в таблицях 2 і 4 і $H^1(A_{2,2}^3, \widehat{M}) = H^1(A_{2,2}^1, \widehat{M})$.*

III). $R = Z_2[\sqrt{d}]$. Нехай G — скінченна підгрупа групи $GL(2, R)$, що діє в R-модулі $M = R^2$. Нехай t — простий елемент кільця $Z_2[\sqrt{d}]$. Відмітимо, що $t = \sqrt{d}$ $(d = \pm 2, \pm 6)$ і $t = \sqrt{3} - 1$ $(d = 3)$. Факторкільце R/tR є поле з 2 елементів, а факторгрупа $R^+/(tR)^+$ є групою типу $(2, 2)$.

Лема 4 ([5]). *Нехай (α, β) $(\alpha, \beta \in Z_2[\sqrt{d}])$ — розв'язок рівняння $x^2 + y^2 = -1$ з невідомими x та y. Тоді*
$$(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1/\sqrt{-15}(1 - 2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}), & \text{якщо } d = 2; \\ (1, \sqrt{-2}), & \text{якщо } d = -2; \\ (2\sqrt{-7}, 3\sqrt{3}), & \text{якщо } d = 3; \\ (\sqrt{-7}, \sqrt{6}), & \text{якщо } d = 6; \\ 1/5(2 + \sqrt{-6}, 1 - 2\sqrt{-6}), & \text{якщо } d = -6. \end{cases}$$

Лема 5 ([4-6]). *З точністю до спряженості група $GL(2, Z_2[\sqrt{d}])$ $(d = \pm 2, \pm 6)$ містить наступні скінченні підгрупи.*

1. *Незвідні абелеві групи:*

1) $C_3 = \left\langle a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $C_6 = \langle -E \rangle \times C_3$ — *циклічні групи порядків* 3 *і* 6 *відповідно*;

2) $C_4 = \left\langle a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $C_{4,1} = \left\langle a = \begin{pmatrix} 1 & -2t^{-1} \\ t & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ - *циклічні групи порядку* 4;

3) C_8 — *циклічна група порядку* 8 (*тільки для випадку* $d = \pm 2$), *що породжується матрицею* $c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ *у випадку* $d = 2$ *або матрицею* $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{-2} \end{pmatrix}$ *у випадку* $d = -2$;

2. *Неабелеві групи:*

4) $D_3 = \left\langle C_3, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $D_6 = \langle C_6, b \rangle$ — *групи діедра порядків* 6 *та* 12 *відповідно*;

5) $D_4 = \langle a, b \rangle$, $D_4^j = T_j^{-1} D_4 T_j$, $(j = 1, 2)$, $T_1 = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 2 & t+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — *групи діедра порядку* 8;

6) $K_4 = \left\langle a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \right\rangle$, $K_4^1 = T_1^{-1} K_4 T_1$ — *групи кватерніонів порядку* 8;

7) $D_8 = \left\langle a_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, b \right\rangle$, $K_8 = \left\langle a_1, b_1 = \begin{pmatrix} \alpha - \beta & t\alpha \\ t\beta & \beta - \alpha \end{pmatrix} \right\rangle$ — *групи діедра і кватерніонів порядків* 16 (*тільки у випадку* $d = 2$);

8) $U = \left\langle a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{-2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{-2} & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $U^1 = T^{1-}UT$, $\left(T = \begin{pmatrix} \sqrt{-2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $(a_2^8 = b_2^2 = 1, a_2 b_2 = b_2 a_2^3)$ — *квазідіедральні групи порядку* 16 (*тільки у випадку* $d = -2$).

3. *Звідні групи:*

9) $C_2^j (j = 1, 2, 3, 4), A_{2,2}^j (j = 1, 2, 3)$ — 4 *циклічних групи порядку* $2, 3$ *абелеві групи типу* $(2, 2)$, (*див. лему* 2).

Теорема 4. *Якщо* G *є циклічною групою порядків* $3, 4, 6, 8$ *або діедральною групою порядків* 6 *і* 12, *то група* $H^1(G, \widehat{M})$ *є нульовою. Якщо* G — *звідна група, то описання групи* $H^1(G, \widehat{M}) = H^1$ *аналогічне випадку кільця* $Z_2[i]$. *Всі інші випадки наведені в таблиці* 7.

Таблиця 7.

G	f	H^1	*тип групи* H^1
D_4	$f(b) = (\gamma, \gamma), 2\gamma = 0$	$H^1 \cong (R/tR)^2$	(2,2)
D_4^1	$f(b) = (\gamma_1, \gamma_2), 2\gamma_j = 0, j = 1, 2$	$H^1 \cong (R/tR)^4$	(2,2,2,2)
D_4^2	$f(b) = (\gamma, t\gamma), 2\gamma = 0$	$H^1 \cong (R/tR)^2$	(2,2)
K_4	$f(b') = (\gamma, \gamma), 2\gamma = 0$	$H^1 \cong (R/tR)^2$	(2,2)
K_4^1	$f(b) = (\gamma_1, \gamma_2), 2\gamma_j = 0, j = 1, 2$	$H^1 \cong (R/tR)^4$	(2,2,2,2)
D_8	$f(b) = (\gamma, \gamma), t\gamma = 0$	$H^1 \cong R/tR$	(2)
K_8	$f(b_1) = (\gamma, \gamma), t\gamma = 0$	$H^1 \cong R/tR$	(2)
U	$f(b_2) = (\gamma, \gamma), t\gamma = 0$	$H^1 \cong R/tR$	(2)
U^1	$f(b) = (\gamma, 0), t\gamma = 0$	$H^1 \cong R/tR$	(2)

($f(a)=0$ *на твірному елементі* a *групи* G).

Теореми 1–4 доводяться однотипно — для кожної скінченної групи $G \subset GL(2,R)$ обчислюються значення коциклів $f : G \to \widehat{M}$ ($M = R^2$), якими заповнюються рядки відповідних таблиць. Відмітимо, що в графі $f(g)$ ($g \in G$) записується лише представник суміжного класу $f(g) \in \widehat{M} = (FM)^+/M^+$.

Одержані таблиці дають можливість виписати всі 2-адичні кристалографічні групи у виді груп $K(G,M,f)$ матриць порядку 3 над полем F. Твірними елементами кожної групи $K(G,M,f)$ будуть матриці

$$E_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in R)$$

і деякі матриці, залежні від твірних групи G та відповідного коцикла f. Наприклад, нехай $G = D_4^1$, $f(a) = 0$, $f(b) = (t^{-1}, t^{-1})$. Тоді група $K(D_4^1, R^2, f)$ окрім вказаних твірних має ще наступні твірні

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & t^{-1} \\ 1 & 0 & t^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Гудивок П. М., Рудько В. П., Бовді В. А.* Кристалографічні групи. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т. – 2006. – 174 с.
2. *Bovdi V. A., Rudko V. P.* Extensions of the representation modules of prime order group // Journal of algebra. – 2006. – 295. – P. 441–451.
3. *Копча Г. В.* Нерасщепляемые расширения неразложимых модулей целочисленных p-адических представлений циклической группы порядка p^2 // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 2000. – Вип. 5. – С. 49-56.
4. *Гудивок П. М., Кирилюк А. А.* О минимальных неприводимых подгруппах полной линейной группы над кольцом целых P-адических чисел // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2002. – Вип. 8. – С. 34-43.
5. *Кирилюк А. А.* О неприводимых p-подгруппах группы $GL(q, R_p)$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2003. – Вип. 8. – С. 63–69.
6. *Сапужак Т. М.* p-подгруппы полной линейной группы над P-адическими квадратичными кольцами. – Ужгород, 1986 – 33 с. – Деп. в Укр. НИИНТИ. – № 1778.

Одержано 15.09.2006