І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

The new numerical-analytic method for investigating the nonlinear differential systems under linear multi point boundary conditions is suggested.

Розглядається новий чисельно-аналітичний метод дослідження нелінійних систем диференціальних рівнянь, підпорядкованих лінійним багатоточковим умовам.

Дослідженню питань існування розв'язків різного роду крайових задач і їх властивостей присвячено багато наукових монографій і публікацій, зокрема [1–6]. Ряд робіт присвячено обгрунтуванню можливості застосування чисельно-аналітичного методу до дослідження багатоточкових крайових задач. Детальний огляд одержаних у цьому напрямку результатів міститься в [7].

У даній статті обгрунтовується новий підхід до дослідження питання існування і наближеної побудови розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь, підпорядкованих лінійним багатоточковим крайовим умовам. При цьому матриця Ліпшиця є змінною, а обмеження, які накладаються на неї, стосуються не всієї правої частини рівняння, а тільки нелінійності.

Розглянемо диференціальну систему з виділеною лінійною частиною

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \tag{1}$$

підпорядковану лінійним багатоточковим крайовим умовам

$$\sum_{k=1}^{p} A_k x(t_k) = d, \tag{2}$$

де $A(t)$ — $(n\times n)$-вимірна матриця з дійсними компонентами, $A(t) \in C[0,T]$, $t \in [0,T]$, $x, f, d \in \mathbb{R}^n$, $0 = t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_p = T$, A_k — сталі $(n \times n)$-вимірні матриці такі, що $det(F) \neq 0$, де $F = \sum\limits_{k=1}^{p} A_k \int\limits_0^{t_k} \Omega_s^{t_k} ds$, Ω_0^t — матрицант системи $dx/dt = A(t)x$.

Крім того, припускаємо, що при $(t\times x) \in [0,T]\times D$, де $D \subset R^n$ — деяка замкнена обмежена область, виконуються умови:

A) вектор-функція $f\,(t,x)$ неперервна і виконуються оцінки

$$|f\,(t,x)| \le M\,(t)\,, \qquad |f\,(t,x') - f\,(t,x'')| \le K\,(t)\cdot|x' - x''|\,,$$

де $M\,(t)$ і $K\,(t)$ — неперервні відповідно вектор-функція і матриця-функція з невід'ємними інтегровними компонентами;

C) $D_\beta \equiv \{\xi \in R^n \mid B\,(x_0\,(t,\xi)\,,\beta) \subseteq D\} \neq \emptyset$, де $B\,(x_0,\beta)$ — круг з центром в $x_0(t,\xi) = \Omega_0^t\xi$ і радіусом

$$\beta = \max_{t\in[0,T]} \Big(\left|\Omega_0^t R(t) F^{-1}\big(d - G\,\xi\big)\right| + \int\limits_0^T |L(t,s)|\cdot M(s)ds\Big);$$

D) найбільше додатне власне значення оператора Qx менше за одиницю,

$$(Qx)(t) = \int\limits_0^T |L(t,s)| \cdot K(s)\, x(s)\, ds.$$

Тут $|f(t,x)| = col(|f_1(t,x)|, \ldots, |f_n(t,x)|)$, всі нерівності в роботі розглядаємо покомпонентно і

$$Z(s) = \sum_{s \le t_k \le T} A_k \Omega_s^{t_k}, \quad G = Z(0) = \sum_{k=1}^{p} A_k \Omega_0^{t_k}, \quad F = \sum_{k=1}^{p} A_k \int\limits_0^{t_k} \Omega_s^{t_k} ds, \quad R(t) = \int\limits_0^{t} \Omega_s^0 ds.$$

Розглянемо вектор-функціонал $\mu(x) : C(R^n) \to R^n$ і вектор-функцію $L(t,s)$:

$$\mu(x) = F^{-1}\Big(d - \int\limits_0^T Z(s) f(s, x(s)) ds - G\,\xi\Big),$$

$$L(t,s) = \begin{cases} \Omega_s^t - \Omega_0^t R(t) F^{-1} Z(s), & 0 \le s \le t \le b, \\ -\Omega_0^t R(t) F^{-1} Z(s), & 0 \le t < s \le b. \end{cases}$$

Має місце наступне твердження про розв'язність задачі (1), (2).

Лема 1. *Для того, щоб функція $\varphi(t)$, $\varphi(0) = \xi$ була розв'язком крайової задачі* (1), (2) *необхідно і досить, щоб $\varphi(t)$ задовольняла рівняння* (3), (4)*:*

$$x(t) = \Omega_0^t\Big(\xi + R(t) F^{-1}(d - G\xi)\Big) + \int\limits_0^T L(t,s) f(s, x(x)) ds, \tag{3}$$

$$\mu(x) = 0. \tag{4}$$

Доведення. Доведемо спочатку необхідність. Нехай $\varphi(t)$ є розв'язком системи (1). Тоді

$$\varphi(t) \equiv \Omega_0^t \xi + \int\limits_0^t \Omega_s^t f(s, \varphi(s)) ds. \tag{5}$$

Підставляючи (5) у крайові умови (2) і міняючи порядок інтегрування, одержимо що

$$G\xi + \int\limits_0^T Z(s) f(s, \varphi(s)) ds = d,$$

а отже $\mu(\varphi) = 0$. З того, що (4) можна переписати у вигляді

$$x(t) = \Omega_0^t \xi + \int\limits_0^t \Omega_s^t f(s, x(s)) ds + \Omega_0^t R(t) F^{-1} \mu(x), \tag{6}$$

випливає, що при цьому $\varphi(t)$ є також і розв'язком рівняння (4). Отже, необхідність доведена.

Нехай тепер $\varphi(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння (4). Безпосередньою підстановкою переконуємося, що $\varphi(t)$ задовольняє крайові умови (2). Крім того, оскільки $\mu(\varphi) = 0$, то з (6) випливає, що $\varphi(t)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь (1), що завершує доведення леми.

Для знаходження розв'язку крайової задачі (1), (2) побудуємо рекурентну послідовність функцій

$$\begin{aligned}&x_m(t,\xi)=x_0(t,\xi)+\Omega_0^t R(t)F^{-1}\Big\{d-G\,\xi\Big\}+\int\limits_0^T L(t,s)f(s,x_{m-1}(s,\xi))ds,\\&x_0(t,\xi)=\Omega_0^t\,\xi,\quad m\in\mathbb{N},\end{aligned}\tag{7}$$

які задовольняють крайові умови (2) при будь-яких натуральних m.

Зауваження 1. *При* $A=0$ *маємо* $\Omega_0^t=I_n$, $G=\sum\limits_{k=1}^p A_k$, $F=\sum\limits_{k=1}^p A_k t_k$, *де* I_n *— одинична матриця порядка* n, *і з* (7) *ми одержуємо послідовні наближення чисельно-аналітичного методу А.М.Самойленка* [7]*:*

$$\begin{aligned}&x_m(t,\xi)=\xi+\int\limits_0^t f(s,x_{m-1}(s,\xi))ds+tF^{-1}\left(d-G\xi-\sum_{k=1}^p\left(A_k\int\limits_0^{t_k}f(s,x_{m-1}(s,\xi))ds\right)\right),\\&x_0(t,\xi)=\xi,\quad m\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Беручи до уваги **B** і умову обмеженості з **A**, з (7) одержимо, що

$$|x_1(t,\xi)-x_0(t,\xi)|\le\left|\Omega_0^t R(t)F^{-1}\Big\{d-G\,\xi\Big\}\right|+\int\limits_0^T|L(t,s)|\cdot|f(s,x_0(s,\xi))|\,ds\le\beta,$$

тобто $x_1(t,\xi)\in D$. Шляхом індукції можемо показати, що послідовні наближення $x_m(t,\xi)$ вигляду (7) лежать в області D при всіх $m\in\mathbb{N}$. Враховуючи останню нерівність і умову Ліпшиця з **A**, отримуємо оцінки

$$\begin{aligned}&|x_{m+1}(t,\xi)-x_m(t,\xi)|\le\int\limits_0^T|L(t,s)|\cdot|f(s,x_m(s,\xi))-f(s,x_{m-1}(s,\xi))|\,ds\le\\&\le\int\limits_0^T|L(t,s)|\cdot K(s)\cdot|x_m(s,\xi)-x_{m-1}(s,\xi)|\,ds\le\left(Q|x_m(\cdot,\xi)-x_{m-1}(\cdot,\xi)|\right)(t)\le\\&\le\left(Q^2|x_{m-1}(\cdot,\xi)-x_{m-2}(\cdot,\xi)|\right)(t)\le\ldots\le\left(Q^m|x_1(\cdot,\xi)-x_0(\cdot,\xi)|\right)(t)\le Q^m\beta.\end{aligned}\tag{8}$$

Крім того,

$$\begin{aligned}&|x_{m+j}(t,\xi)-x_m(t,\xi)|\le\sum_{i=0}^{j-1}|x_{m+i+1}(t,\xi)-x_{m+i}(t,\xi)|\le\\&\le\sum_{i=0}^{j-1}\left(Q^{m+i}|x_1(\cdot,\xi)-x_0(\cdot,\xi)|\right)(t)\le\sum_{i=0}^{j-1}Q^{m+i}\beta\,.\end{aligned}\tag{9}$$

З умови **C** випливає, що послідовність (7) є фундаментальною, а отже, рівномірно збігається до деякої граничної функції $x^*(t,\xi)$. У свою чергу, ця гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (4). Згідно леми 1, якщо при $\xi=\xi^*$ маємо, що $\mu(x(\cdot,\xi^*))=0$, то функція $x^*(t)=x^*(t,\xi^*)$ є розв'язком крайової задачі (1), (2). Переходячи в (9) до границі при $j\to\infty$, одержуємо оцінку відхилень послідовних наближень від граничної функції:

$$|x^*(t,\xi)-x_m(t,\xi)|\le(I_n-Q)^{-1}Q^m\beta.\tag{10}$$

Таким чином, справедливим є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для крайової задачі* (1), (2) *справедливі припущення* $\boldsymbol{A}$–$\boldsymbol{C}$. *Тоді:*

1) *при всіх* $\xi \in D_\beta \subset R^n$ *послідовність* (7) *рівномірно збігається при* $m \to \infty$ *до граничної функції* $x^*(t,\xi) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t,\xi)$. *Для збіжності послідовних наближень при всіх натуральних* m *виконуються оцінки* (10)*;*

2) *гранична функція* $x^*(t,\xi)$ *задовольняє крайові умови* (2), *при* $t = 0$ *приймає початкове значення* $x^*(0,\xi) = \xi$*;*

3) *функція* $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$ *є розв'язком крайової задачі* (1), (2) *тоді і тільки тоді, коли точка* $\xi = \xi^*$ *є розв'язком визначального рівняння* $\Delta(\xi) = 0$, *де*

$$\Delta(\xi) \stackrel{def}{=} \mu(x^*(\cdot,\xi)). \tag{11}$$

Отже, для знаходження розв'язку крайової задачі (1), (2) потрібно спочатку знайти члени $x_m(t,\xi)$ послідовності (7), де $\xi \in R^n$ — довільний параметр і граничну функцію $x^*(t,\xi)$. Після цього треба знайти значення $\xi = \xi^*$ таке, що $\Delta(\xi^*) = 0$. В результаті одержимо функцію $x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$, яка є шуканим розв'язком задачі (1), (2). Проте, при практичному знаходженні розв'язку важливо вміти робити висновки про існування розв'язків крайової задачі на підставі аналізу властивостей самих тільки послідовних наближень $x_m(t,\xi)$ без знаходження їх граничної функції. Достатні умови існування розв'язків крайової задачі (1), (2) містить наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай для крайової задачі* (1), (2) *справедливі припущення* $\boldsymbol{A}$–$\boldsymbol{C}$ *і, крім того:*

1) *існує опукла, замкнена область* $D' \subset D_\beta \subset R^n$ *така, що при деякому фіксованому натуральному* m *відображення* $\Delta_m(\xi) : \ D_\beta \to R^n$*:*

$$\Delta_m\left(\xi\right) \stackrel{def}{=} \mu\left(x_m\left(\cdot,\xi\right)\right) = F^{-1}\Big(d - \int\limits_0^T Z(\tau) f(\tau, x_m(\tau,\xi))d\tau - G\xi\Big)$$

містить в області D' *єдину особливу точку* $\xi_{\,0m}$ *ненульового індексу;*

2) *на границі* $\partial D'$ *області* D' *виконується нерівність*

$$\inf_{\xi\in\partial D'} \left|\Delta_m\left(\xi\right)\right| > Q_1\left(I_n - Q\right)^{-1} Q^m \beta,$$

де $Q_1 = \int\limits_0^T \left|F^{-1} Z\left(s\right)\right| \cdot K\left(s\right) ds.$

Тоді існує розв'язок $x = x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$, $x^*(0) = \xi^*$ *крайової задачі* (1), (2), *де* $\xi^* \in D'$.

Доведення. Проводиться подібно до доведення теореми 3 [8].

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з малим невід'ємним параметром ε вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t) + \varepsilon f(t,x), \tag{12}$$

яка підпорядкована крайовим умовам (2), де $A(t)$ — $n \times n$-вимірна матриця з неперервними при $t \in [0,T]$ компонентами, $h(t)$, $f(t,x)$ — n-вимірні вектор-функції, неперервні по своїх змінних в області $(t,x) \in [0,T] \times D$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$,

Для дослідження достатніх умов існування розв'язку $x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (2), (12) розглянемо послідовність функцій

$$\begin{gathered}\widetilde{x}_m(t,\xi) = \widetilde{x}_0(t,\xi) + \varepsilon \int\limits_0^t \Omega_s^t \Big(f(s,\widetilde{x}_{m-1}(s,\xi)) + \mu(\widetilde{x}_{m-1}(s,\xi)) \Big) ds, \\ \widetilde{x}_0(t,\xi) = \Omega_0^t \xi + \int\limits_a^t \Omega_s^t h(s) ds, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N},\end{gathered} \tag{13}$$

які при всіх натуральних m задовольняють крайові умови (2) .

Оскільки при достатньо малих ε умови **B** і **C** виконуються, то зрозуміло, що теорема 1 справджується також і для задачі (2), (12). Безпосередньою перевіркою можемо переконатися, що при всіх$m \geq 1$ мають місце наступні нерівності

$$\begin{gathered}|\widetilde{x}^*(t,\xi) - \widetilde{x}_0(t,\xi)| \leq \varepsilon\beta, \\ |\widetilde{x}^*(t,\xi) - \widetilde{x}_m(t,\xi)| \leq \varepsilon (E_n - \varepsilon Q)^{-1} (\varepsilon Q)^m \beta, \\ \inf_{\xi \in \partial D'} \left| \widetilde{\Delta}_m(\xi) \right| > \varepsilon Q_1 (E_n - \varepsilon Q)^{-1} (\varepsilon Q)^m \beta,\end{gathered}$$

де $\widetilde{x}^*(t,\xi) = \lim\limits_{m\to\infty} \widetilde{x}_m(t,\xi)$, $\widetilde{\Delta}(\xi) \overset{def}{=} \mu(\widetilde{x}^*(\cdot,\xi)) = F^{-1}\Big(d - \int\limits_0^T Z(\tau) f(\tau,\widetilde{x}^*(\tau,\xi)) d\tau - G\xi\Big)$,

$$\widetilde{\Delta}_m(\xi) \overset{def}{=} \mu(\widetilde{x}_m(\cdot,\xi)) = F^{-1}\Big(d - \int\limits_0^T Z(\tau) f(\tau,\widetilde{x}_m(\tau,\xi)) d\tau - G\xi\Big), \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{14}$$

Крім того, при $m = 0$ має місце наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай для крайової задачі* (2), (12) *справедливі припущення* ***A*** *і* ***B****, а відображення* $\widetilde{\Delta}_0(\xi)$*, породжене* (14)*, має в області* $D' \subset D_0$ *ізольовану особливу точку* $\xi = \xi_0$ *ненульового індексу.*

Тоді існує таке ε_0*, що при всіх* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *крайова задача* (2), (12) *має розв'язок.*

Доведення. Аналогічне до доведення теореми 4 [8].

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1992. – 279 с.
2. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. – Boston: VSP Utrecht, 2004. – 320 p.
3. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – К.: Наук. думка, 1993. – 288 с.
4. *Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O.* Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints. – Praha: Academia, 1979 – 248 p.
5. *Makarov V. L., Gavrilyuk I. P., Kutniv M. V., Hermann M.* A two-point difference scheme of an arbitrary order of accuracy for BVPs for systems of first order nonlinear ODEs // Comp. Meth. In Applied Math. – 2004. – **4**. – № 4. – P. 464–493.
6. *Фам ки Ань.* Приближенное решение нелинейных многоточечных краевых задач в резонансном случае // Укр. мат. журн. – 1987.– 39, №5. – С. 619–624.
7. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: досижения и новые направления развития. VI // Укр. мат. журн. – 1999. – 51, №7. – С. 960–971.
8. *Король І. І., Перестюк М. О.* Ще раз про чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А. М. Самойленка// Укр. мат. журн. – 2006.– 58, №4. – С. 472–488.

Одержано 20.09.2006