Ukrajna Oktatási és Tudományügyi Minisztériuma

Ungvári Nemzeti Egyetem

Ukrán—Magyar Oktatási-Tudományos Intézet

Fizika és Matematika Tanszék

Petki Katalin, Traski Viktor, Traski Natália

Komplex analizis

Ungvár 2019

UDC 51(075.8)
BBK B1я73
П-29

RECENZENSEK:
Dr. Gecse Ferenc *professzor, a Kibernetika és Alkalmazott Matematika Tanszék vezetője*
Dr. Szlivka-Tiliscsak Hanna *docens*,
V*alőszinüségelmélet és Matematikai Analizis Tanszék*

Kiadását ajánlotta:

- Fizika és Matematika Tanszék
  (2019. szeptember 19-i ülésén, 2.sz. jegyzőkönyv)
- Ukrán—Magyar Oktatási-Tudományos Intézet Tudományos Tanácsa
  (2019. szeptember 24-i ülésén, 1.sz. jegyzőkönyv)

Petki K., Traski V., Traski N.
П-29 Komplex analizis: - Ungvár: «AUTDOR-Shark», 2019. – 89o.

Міністерство освіти та науки України

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

Українсько-угорський навчально-науковий інститут

Кафедра фізико-математичних дисциплін

К.П. Петкі, В.Б. Трошкі, Н.В.Трошкі

Комплексний аналіз

Посібник

Ужгород 2019

УДК 51(075.8)
ББК В1я73
П-29

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Гече Федір Елемирович – *доктор технічних наук, професор, зав. кафедрою кібернетики та прикладної математики.*

Сливка-Тилищак Ганна Іванівна – *доктор фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри теорії ймовірностей та математичного аналізу.*

Рекомендовано до друку:

Кафедрою фізико-математичних дисциплін
(протокол №2 від 19 вересня 2019р.)
Вченою радою Українсько-угорського навчально-наукового інституту
(протокол №1 від 24 вересня 2019р.)

К.П. Петкі, В.Б. Трошкі, Н.В.Трошкі
П-29 Комплексний аналіз: Посібник - Ужгород: «АУТДОР-Шарк», 2019. – 89с.

Tartalom

Bevezetés

Ez a jegyzet a Ukrán—Magyar Oktatási-Tudományos Intézet harmadéves matematika szakos hallgatók számára készült és a szak tematikáját követi. Mindegyik témához fel vannak sorolva a főbb elméleti tudnivalók az önálló felkészüléshez, példák a feladatok megoldására és az önálló munkához ajánlott feladatsor.

A jegyzet célja: segítséget nyújtani a matematikus diákok számára az önálló munkában a "Komplex analizis" tanulmányozása során és a megfelelő modul dolgozatok és vizsgák letételének felkészülésében.

Többek között a jegyzetben kivannak dolgozva a "Komplex analizis" és alkalmazásának fő szakaszai. Bizonyitva vannak a komplex változó függvény alap tulajdonságai, megvannak határozva az integrálok különféle típusainak kiszámítási módszerei. Szó van a Laplace-transzformációról és alkalmazásáról, a Laurent sorokról. Az adot jegyzet elsajátitása esetén a hallgató megismeri a komplex elemzés alapvető tulajdonságait és fogalmait, valamint elméleti alapismereteket képez az elméleti és gyakorlati problémák megoldására.

Komplex számok. Számolás a komplex számok körében. A komplex szám algebrai és trigonometriai alakja

Az $a + ib$ képletet komplex számnak nevezzük, hol az a és b – valós számok, i – immaginárius (képzetes) egység.

Immaginárius egységnek egy olyan komplex számot nevezünk, amelynek a négyzete -1.

$z = x + iy$ – a komplex szám algebrai alakja, hol $x = Re\, z$ – a komplex szám valós része és $y = Im\, z$ – a komplex szám képzeletbeli része.

Két komplex számot $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2$ egyenlőnek nevezzük, akkor és csak akkor, ha $x_1 = x_2$ és $y_1 = y_2$. Ha $y = 0$ akkor a komplex szám valós szám lesz. Ha az $x = 0$ akkor kizárólag komplex számról beszélhetünk, méghozzá $z = 0 \leftrightarrow x = 0$ és $y = 0$.

A két komplex szám z_1 és z_2 összegének a következő számot nevezzük:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

A két komplex szám z_1 és z_2 szorzatának a következő számot nevezzük:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

A komplex számok tulajdonságai:

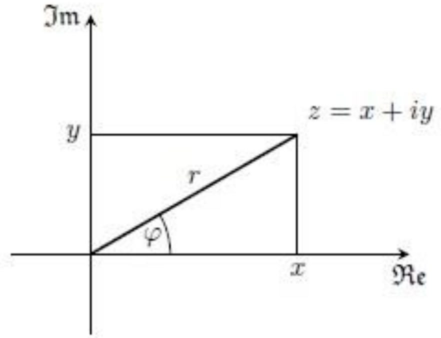
1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – az összeadás kommutativitása (felcserélhetősége);
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – az összeadás asszociativitása (csoportosítása);
3. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ – a szorzás kommutativitása (felcserélhetősége);
4. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ – a szorzás asszociativitása (csoportosítása);
5. $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_2 + z_2 z_3$ – disztributiviás az összeadásra nézve (széttagolhatóság).

A komplex szám összeadása, kivonása, szorzása és osztása is komplex szám lesz.

A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ -vel jelölik.

A $\bar{z} = x - iy$ komplex számot a $z = x + iy$ szám konjugáltjának nevezzük.

A komplex számokat a komplex számsíkban is feltudjuk ábrázolni, mégpedig egy olyan vektorral, amely a $(0;0)$ pontban kezdődik és az $(x;y)$ pontban ér véget. Ennek a vektornak a hossza $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – a komplex szám hossza.



φ – ez annak a szögnek a nagysága, amelyre elkell mozdítani az abszcisszatengelyt, hogy az egybeessen a vektorral. Ezt a szöget arkusznak (irányszögnek) nevezzük. Az arkusz pozitív szám, ha az óramutató mozgásával ellentétes irányba mozgatjuk el és negatív ellenkező esetben. A komplex szám $z = 0$ arkusza nincs definiálva, a többi szám esetében $-\infty < Argz < \infty$. A végtelen számú arkuszok között létezik egy amely $[-\pi, \pi]$ – be tartozik és ezt az értéket a komplex szám főértékének nevezik és $\arg z$ – vel jelölik vagyis $Argz = \arg z + 2\pi k,\ k \in Z$.

A komplex szám főértékét a következőképpen számíthatjuk ki:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y \leq 0\ , \\ \dfrac{\pi}{2}, & y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}. & y < 0\ . \end{cases}$$

<u>Példa:</u> $z = 1 + i, x > 0\ \rightarrow \arg z = \arg(1+i) = arctg\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$.

$Argz = \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$

Tételezzük fel, hogy adva van egy komplex szám algebrai alakban $z = x + iy$. Akkor a derékszögű háromszögből megkapjuk, hogy $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$, $\sin\varphi = \frac{y}{|z|} \to x = |z|\cos\varphi\,, y = |z|\sin\varphi \;\to z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Ezt az alakot a komplex szám trigonometrikus alakjának nevezik.

Ahhoz hogy összeszorozzunk két komplex számot trigonometriai alakban elgendő összeszorozni a két szám modulusát és összeadni a két szám arkuszát.

$$z_1z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Az osztásnál elosszuk a két szám modulusát és kivonjuk az egyik szám arkuszából a másikat.

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

Ha fel van adva n komplex szám $z_1, \dots, z_n$ akkor $|z_1 \dots z_n| = |z_1| \dots |z_n|$ és $\arg(z_1 \dots z_n) = \arg z_1 + \cdots + \arg z_n$. Ha $z_1 = \cdots = z_n = z$, akkor

$\arg z^n = n\arg z$.

$(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ – Moivre képlete

Ahhoz, hogy elosszunk két komplex számot szükséges a számlálót és a nevezőt megszorozni a nevező konjugáltjával.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1z_2}{|z_2|^2}, \qquad z = x + iy, \qquad \bar{z} = x - iy = x - iy$$

Összeadjuk ezt a két számot $\to x = \frac{z+\bar{z}}{2} = Rez$ – a komplex szám valós része.

Kivonjuk ezt a két számot $\to y = \frac{z-\bar{z}}{2i} = Imz$ – a komplex szám immaginárius része.

Példák:

I. Hajtsa végre a következő műveleteket:

1) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{|1-i|^2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i.$

2) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3} = \frac{(1+i)^3(1+i)^2}{(1-i)^3} = i^3(1+i)^2 = -i(1+2i-1) = 2.$

3) $\frac{i^5+2}{i^{19}+1} = \frac{i+2}{-i+1} = \frac{(i+2)(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{-1+3i+2}{2} = \frac{1+3i}{2}.$

4) $\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}=\frac{(\cos x+i\sin x)^2}{|\cos x-i\sin x|^2}=\cos^2 x+2i\cos x\sin x-\sin^2 x=$
$=\cos 2x+i\sin 2x.$

II. Számítsa ki a komplex szám modulusát és arkuszát.

1) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$

$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1;$

$\varphi=arctg\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}+\pi=-arctg\sqrt{3}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3};$

2) $z=1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7};$

$$|z|=\sqrt{1+2\cos\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}}=2\cos\frac{\pi}{14};$$

$$\arg z=arctg\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{1+\cos\frac{\pi}{7}}=arctg\frac{2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos^2\frac{\pi}{14}}=arctg\left(tg\frac{\pi}{14}\right)$$
$$=\frac{\pi}{14}.$$

3) $z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{|1+i|^2}=\frac{2-2i}{2}=1-i;$

$|z|=\sqrt{2};\quad \arg z=-\frac{\pi}{4};$

4) $z=(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$

$z_1=1+i;\quad z_2=1-i\sqrt{3};\qquad |z_1|=\sqrt{2};\quad |z_2|=|2|;$

$\arg z_1=\frac{\pi}{4};\quad \arg z_2=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}.$

$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);\quad z_2=|2|\left(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$

${z_1}^8=16\left(\cos\frac{8\pi}{4}+i\sin\frac{8\pi}{4}\right)=16;\qquad {z_2}^{-6}=\frac{1}{64}\left(\cos(-\frac{6\pi}{3})+\right.$
$\left.i\sin(-\frac{6\pi}{3})\right)=\frac{1}{64}.$

$z=z_1z_2=\frac{1}{4};\qquad \varphi=0.$

5) $z=(-4+3i)^3\quad |z|=|5|;\ \arg z=arctg\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi$

$$z=|5|\left(\cos\left(\pi-arctg\frac{3}{4}\right)+i\sin(\pi-arctg\frac{3}{4})\right)$$

$$z^3=|25|\left(\cos 3\left(\pi-arctg\frac{3}{4}\right)+i\sin 3(\pi-arctg\frac{3}{4})\right).$$

III. Bizonyítsa be, hogy $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

Legyen $z_1 = a_1 + ib_1$; $\quad z_2 = a_2 + ib_2$. Akkor

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \left(\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}\right)^2 +$$
$$\left(\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}\right)^2 =$$
$$= {a_1}^2 + 2a_1a_2 + {a_2}^2 + {b_1}^2 + 2b_1b_2 + {b_2}^2 + {a_1}^2 - 2a_1a_2 + {a_2}^2 + {b_1}^2 - 2b_1b_2 + {b_2}^2 =$$
$$= 2\left(\left({a_1}^2 + {b_1}^2\right) + \left({a_2}^2 + {b_2}^2\right)\right) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Házi:

I. 1) $3 - i + \frac{2i}{1+i}$; $(= 4)$

2) $1 + \frac{i}{1-i}$; $\left(= \frac{1+i}{2}\right)$

3) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; $\left(= \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

II. 1) $z = -1 - i\sqrt{3}$; $\left(|z| = 2, \quad \varphi = -\frac{5\pi}{6}\right)$

2) $z = 1 + i^{123}$; $\left(|z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}\right)$

3) $z = \sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5}$. $(|z| = 1)$

Gyökvonás komplex számokból

Definíció: A komplex szám n-edik gyökének egy W számot nevezünk, amelynek az n-edik hatványa z lesz, $W^n = z$.

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad W = |W|(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$W^n = |W|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \to |W|^n = |z| \to$$
$$|W| = \sqrt[n]{|z|}$$
$$n\theta = \varphi + 2\pi k \ \to \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, W^n = z \to W = \sqrt[n]{z}$$
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k = \overline{0, n-1}$$ Ez a komplex szám n-edik gyöke.

$\rho_k = \left(\sqrt[n]{|z|}\right)_k$ – egy szabályos n – szögnek a csúcspontjai, ha $n > 2$, akkor ez egy olyan n – szög, amely be van írva egy körbe, amelynek $\sqrt[n]{|z|}$ a sugara.

<u>Példák:</u>

I.Számítsa ki

1) $\sqrt[3]{i}$

$|z| = 1, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\rho_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$

$\rho_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$

$\rho_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i.$

2) $\sqrt[6]{-8}$

$|z| = 8, \qquad \varphi = \pi$

$\rho_0 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right);$

$\rho_1 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{8}i = \sqrt{2}i;$

$\rho_2 = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right);$

$\rho_3 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right); \qquad \rho_4 = \sqrt{2}i; \qquad \rho_5 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$

II.Számítsa ki a $\sqrt{5-12i}$ -t az n-edik gyök segítsége nélkül.

$\sqrt{5-12i} = x + iy \ \rightarrow 5 - 12i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \ \rightarrow x = -\frac{6}{y} \end{cases}$$

$\frac{36}{y^2} - y^2 = 5 \ \rightarrow 36 - y^4 = 5y^2 \ \rightarrow \ -y^4 - 5y^2 + 36 = 0; \ \ t = y^2$

$\rightarrow$

$t^2 + 5t - 36 = 0$; $D = 25 + 144 = 169 \rightarrow t_1 = \frac{-5-13}{-2}$

$$= 9;\ t_2 = -4;\ \rightarrow$$

$y_1 = 3,\qquad x_1 = -2,\qquad y_2 = 2,\qquad x_2 = -3.$

III.Oldja meg a következő egyenletet: $z^8 = 1 + i \rightarrow z = \sqrt[8]{1+i}$

$|z| = \sqrt{2},\qquad \arg z = \frac{\pi}{4}$

$z_0 = \sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{\pi}{32} + i\sin\frac{\pi}{32}\right);\ z_1 = \sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{32} + i\sin\frac{9\pi}{32}\right);$

$$z_2 = \sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{32} + i\sin\frac{17\pi}{32}\right).$$

Házi:

I.Számítsa ki $\sqrt{24+7i}$

II. Oldja meg az egyenleteket

1) $z^2 + 1 = 0$; 2) $\bar{z} = z^3$; 3) $|z| - z = 1 + 2i$.

III. Számítsa ki:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[8]{1-i}$; 3) $\sqrt[4]{1+i}$.

Sztereometrikus projekció. Riemann gömb

Figyelembe veszünk egy 3-dimenziós ortogonális teret (ξ, η, ζ) és ebben a térben figyelembe veszünk egy gömböt, amelynek a középpontja $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ és $R = \frac{1}{2}$.

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

Figyelembe veszünk egy síkot $(x, y, z = 0)$. Ez a sík érintő sík lesz a mi gömbünkhöz. Most egy N pontból, amelyet északi foknak neveznek, kivezetünk egy sugarat az érintő síkhoz. Ezt a bijektív leképzést a gömb és a sík pontjai között sztereometrikus projekciónak nevezik és magát a gömböt Riemann gömbnek. A komplex sík, amely magába foglalja a végtelenül távoli pontot kiterjesztett komplex síknak nevezik $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Összefüggés a koordináták között

Figyelembe vessük két koordináta rendszert és ezeken a rendszereken belöl egy (x, y, z) és egy (ξ, η, ζ) hármasokat. Legyen $N(0,0,1)$ egy fixált pont. Akkor felirható $\frac{\xi-0}{x-0} = \frac{\eta-0}{y-0} = \frac{\zeta-1}{0-1} = t$, vagy másképen

$$\begin{cases} \xi = xt \\ \eta = yt \\ \zeta = 1 - t \end{cases}$$

Most a gömb képletébe behelyettesítsük koordinátánként:

$$x^2t^2 + y^2t^2 + (1-t)^2 = \frac{1}{4} \to t(t(x^2+y^2) - 1 - t) = 0 \to$$

$$t(x^2 + y^2 + 1) = 1 \ \to t = \frac{1}{|z|^2 + 1}.$$

Innen már egyértelműen megkapjuk az összefüggést a koordináták között:

$$\xi = \frac{x}{|z|^2 + 1}; \quad \eta = \frac{y}{|z|^2 + 1}; \quad \zeta = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1}.$$

Különböző pontok halmazai a komplex síkon

Tételezzük fel, hogy $z_k \in \mathbb{C}, k = 1,2$. Definiálunk egy metrikát, mégpedig $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Akkor figyelembe vehetünk egy metrikai teret $(\mathbb{C}, \rho)$. Tételezzük fel, hogy $G \in \mathbb{C}$ és $z_0 \in G -$ egy rögzített pont, $\forall \varepsilon > 0 -$ konstans.

$z \in \mathbb{C}$ halmazt, amelyen $|z - z_0| < \varepsilon$ a z_0 pont ε környezetének nevezik.

$z \in \mathbb{C}$ halmazt, amelyen $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ a z_0 pont kilyukasztott környezetének nevezik.

Ha a $z_0 = \infty$ akkor a z_0 pont környezetének olyan halmazt nevezünk, amely $|z| > \varepsilon$.

Figyelembe veszünk egy $G \in \mathbb{C}$ halmazt és $z_0 \in G$ pontot. A z_0 pontot a G halmaz belső pontjának nevezzük, hogyha a G tartalmazza a z_0 pont bármely környezetét.

Azt a halmazt, amely tartalmazza az összes belső pontjait, nyitott halmaznak nevezik. $\emptyset, \mathbb{C}$ –nyitott halmazok.

z_0 pontot a G halmaz határpontjának nevezik, hogyha z_0 tartalmaz végtelen számú pontokat a G −ből.

A halmazt, amely tartalmazza az összes határpontjait zárt halmaznak nevezik. A halmazt, amely magába foglalja az összes határpontot, határnak nevezik.

Összefüggőnek egy olyan halmazt nevezünk, amely magába foglalja nem csak bármelyik két pontot, hanem azt a tört vonalat is, amely ezt a két pontot egyesíti.

Nem üres, nyitott, összefüggő halmazt tartománynak nevezzük.

Tételezzük fel, hogy $X(t)$ és $Y(t)$ két folytonos vonal az $[a, b]$ szakaszon, akkor a ponthalmaz $z(t) = X(t) + iY(t)$ is folytonos vonal lesz. $z = z(t)$ a vonal parametrikus képlete komplex formában.

Hogyha $\forall t_1, t_2 \epsilon [a, b],\ a \leq t_1 < t_2 \leq b,\ \ z(t_1) \neq z(t_2)$ akkor az ilyen vonalat Jordan vonalnak nevezik. Hogyha e mellett $z(a) = z(b)$ akkor az ilyen vonalat zárt Jordan vonalnak vagy Jordan körvonalnak nevezik.

A D tartományt egyösszefüggőnek nevezik, hogyha a D magába foglalja bármelyik Jordan körvonalát a belsőségével együtt. Ellentétes esetben sokösszefüggőnek nevezik.

A D tartományt n – összefüggőnek nevezik, hogyha a D korlátozott $n - 1$ Jordan körvonallal.

A G halmazt korlátozottnak nevezik, hogyha létezik egy olyan kör $|z| < R$, hol $0 < R < +\infty$, amely teljesen mgába foglalja a G halmazt.

Példák:

Mi a mértani fogalma a következő képleteknek:

1) $|z - z_0| \leq r \rightarrow |x + iy - (x_0 + iy_0)| \leq r \rightarrow |x - x_0 + i(y - y_0)| \leq r$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r \ \rightarrow\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r$$

A mértani jelentése: egy halmaz, mely a kör pontjaiból van megalkotva, beleszámítva a kör határát. A kör középpontja a z_0 pont és r a sugara.

2) $|z - 2| + |z + 2| = 5$

$|x-2+iy|+|x+2+iy|=5$

$$\rightarrow\ \sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=5$$

$(x-2)^2+y^2=25-10\sqrt{(x+2)^2+y^2}+((x+2)^2+y^2)\ \rightarrow$

$-8x=25-10\sqrt{(x+2)^2+y^2}\ \rightarrow$

$64x^2+400x+625=100((x+2)^2+y^2)$

$$\rightarrow\ -36x^2+225-100y^2=0$$

$$\left(\frac{x}{\frac{15}{6}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{15}{10}}\right)^2=1.$$

3) $Re\frac{1}{z}=1$

$$\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}\ \rightarrow Re\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}=1\ \rightarrow x=x^2+y^2$$

$$\rightarrow\ x^2-x+y^2=0\rightarrow$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

4) $Im\frac{1}{z}=c$

$$Im\frac{1}{z}=\frac{-y}{x^2+y^2}=c\rightarrow\ -\frac{y}{c}=x^2+y^2\ \rightarrow x^2+\frac{y}{c}+y^2=0\ \rightarrow$$

$$x^2+\left(y+\frac{1}{2c}\right)^2=\frac{1}{2c}.$$

<u>Házi:</u>

Milyen alakzatok adnak meg a képletek:

1) $z^2+\bar{z}^2=2a^2$; 2) $|z-2|=|1-2z|$; 3) $Imz^2=c$.

Sorozatok. A komplex számú sorozatok határa

Definíció: Az $f\colon N\rightarrow\mathbb{C}$ leképzést komplex számú sorozatnak nevezik, hogyha bármelyik n természetes számnak megfelel $z_n\in\mathbb{C}$. Jelölik: $\{z_n, n\geq 1\}$.

Definíció: A $z_0=x_0+iy_0$ számot a $\{z_n\}$ határának nevezik, hogyha $\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\ \ \forall n\geq n_\varepsilon\ \ |z_n-z_0|<\varepsilon$.

Jelölik: $\lim_{n\to\infty}z_n=z$ vagy $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}z$.

Hogyha $z_0=\infty$, akkor $\lim_{n\to\infty}z_n=\infty$, vagy más szóval

$\forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon, \forall n\geq n_\varepsilon\ |z_n|<\varepsilon$.

Tétel: Ahhoz, hogy a $z_n = x_n + iy_n$ sorozatnak a $z_0 = x_0 + iy_0$ pont határa legyen szükséges és elegendő, hogy a következő két feltétel tejesüljön egyszerre: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ és $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Bizonyítás: A következő egyenlőtlenség egyértelmű

$$\begin{cases}|x_n - x_0| = |Re(z_n - z_0)| \\ |y_n - y_0| = |Im(z_n - z_0)|\end{cases} \leq |z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$$

$|z_n - z_0| = |x_n - x_0 + i(y_n - y_0)|$.

Szükséges feltétel: Tételezzük fel, hogy a z_0 pont a z_n sorozatának a határa. Akkor a definíció alapján megkapjuk, hogy $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, |z_n - z_0| < \varepsilon \rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ és $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Elégséges feltétel: Tételezzük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ és $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Akkor $\forall\varepsilon > 0, \exists n'_\varepsilon, \forall n \geq n'_\varepsilon,\ |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\forall\varepsilon > 0, \exists n''_\varepsilon, \forall n \geq n''_\varepsilon,\ \ |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Most kiválasztjuk az $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, akkor $\forall\varepsilon > 0$

$$|z_n - z_0| \leq |x_n - x_0 + i(y_n - y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

A konvergens sorozatok tulajdonságai

1. Hogyha a $\{z_n\}$ sorozatnak létezik határa, akkor ez a sorozat konvergens akkor és csak is akkor ha
$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0, & z_0 \neq \infty, \\ \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty, & z_0 = \infty.\end{cases}$$
2. Hogyha $\lim_{n\to\infty} |z_n| = z_0$, akkor $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Ez a feltétel ekvivalens $\lim_{n\to\infty} \arg z_n = \arg z_0$.
3. Hogyha $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$.
4. Hogyha a $\{z_n\}$ sorozatnak létezik határa, akkor ez a sorozat korlátozott.
5. Hogyha a $\{z_n\}$ sorozatnak létezik határa, akkor ez a határ egyetlen.
6. a) $\lim_{n\to\infty} z_n^{(1)} = z_0^{(1)}$ és $\lim_{n\to\infty} z_n^{(2)} = z_0^{(2)}$ akkor
$$\lim_{n\to\infty}(C_1 z_n^{(1)} + C_2 z_n^{(2)}) = C_1 z_0^{(1)} + C_2 z_0^{(2)}.$$
$b)$ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(1)} \cdot z_n^{(2)} = z_0^{(1)} \cdot z_0^{(2)}$.

$c) \lim_{n\to\infty} \frac{z_n^{(1)}}{z_n^{(2)}} = \frac{z_0^{(1)}}{z_0^{(2)}}, \quad z_0^{(2)} \neq 0.$

A konvergens sorozatok Cauchy kritériuma

Tétel: Ahhoz, hogy a $\{z_n\}$ sorozat konvergens legyen szükséges és elegendő, hogy $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ és $\forall m \epsilon \mathbb{N},\ m \geq n_\varepsilon$, $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

<u>Bizonyítás:</u>

Szükséges feltétel: Tételezzük fel, hogy a $\{z_n\}$ sorozat konvergens. Akkor $\exists \lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ vagyis $\forall \frac{\varepsilon}{2}$, $|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\exists \lim_{m\to\infty} z_m = z_0, \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0,\ |z_m - z_0| < \frac{\varepsilon}{2} \ \rightarrow\ |z_n - z_m| =$
$|z_n - z_0 + z_0 - z_m| \leq |z_n - z_0| + |z_0 - z_m| \leq$
$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Elégséges feltétel: Tételezzük fel, hogy $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall\, m \geq n_\varepsilon,\ |z_n - z_m| < \varepsilon.$

$$\begin{cases} |x_n - x_m| \\ |y_n - y_m| \end{cases} \leq |z_n - z_m| < \varepsilon \ \rightarrow \begin{matrix} |x_n - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ |y_n - y_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{matrix}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ sorozatok konvergensek a Cauchy valós számok kritériuma szerint.

<u>Példák:</u>

<u>I.</u> Számítsa ki a következő sorozatnak a határát:

$$z_n = \frac{n+1}{2n} + i\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}, \quad x_n = \frac{n+1}{2n}, \qquad y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2};$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2} + \frac{i}{e^2}.$$

I.Számítsa ki a sorozatok határát:

1) $z_n = \left(\sqrt{n^2+n}-n\right) + i\,\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)}, \quad n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)} = 1$$

$$\to \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{2} + i.$$

2) $z_n = \left(\sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)^n + i\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)^n = e^A = e$$

$$A = \lim_{n\to\infty} n\left(\sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sin\frac{1}{n} + \cos^2\frac{1}{2n} - \sin^2\frac{1}{2n} - \cos^2\frac{1}{2n} - \sin^2\frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\sin\frac{1}{n} - 2\sin^2\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} - 2\left(\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}\right)^2\cdot\frac{1}{4n^2}\right) = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^n = e^A = 1$$

$$A = \lim_{n\to\infty} n\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}\right)^2\cdot\frac{1}{4n^2} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = e + i.$$

II.Vizsgálja ki, hogy milyen a értékeknél konvergens a sorozat

$z_n = \frac{a^n}{1+a^n}, \quad a\epsilon\mathbb{C}$

1) $|a| < 1 \;\to\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\to\; \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} = 0.$

2) $|a| > 1 \;\to\; \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1+a^n}\right) = 1.$

3) $a = 1 \;\to\; \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{2}$

4) $|a| = 1,\; a \neq 1$. Mivel $1 + a^n \neq 0 \;\leftrightarrow\; a \neq \sqrt[n]{-1}$ ezért

$z_n = \frac{1}{a^n+1} = \frac{1}{|a|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)+1}$, ha $\varphi \neq 2\pi k$, akkor $\nexists lim$.

III.Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2i)^n-1}{(2i)^n} = 1$.

$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta(\varepsilon), \quad \forall n > \delta(\varepsilon), \qquad \left|\frac{(2i)^n-1}{(2i)^n} - 1\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{(2i)^n-1}{(2i)^n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{(2i)^n}\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \ \to \ \delta = \left[\log_{1/2}\varepsilon\right].$$

<u>Házi:</u>

1.Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3in}{5n+1} = -\frac{3i}{5}, \quad n > \frac{\sqrt{34}}{\varepsilon}$.

2.Számítsa ki $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} + i\frac{a^n}{n!} = 1$.

3.Vizsgálja ki, hogy milyen értékek mellett konvergensek a sorozatok:

$\{a^n\}$;	$\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$;	$\{na^n\}$.
$\|a\| < 1$	$\|a\| < 1$	$\|a\| < 1$
$\|a\| = 1$	$\|a\| > 1$	
	$\|a\| = 1, a \neq 1$.	

Sorok komplex számokból

Tételezzük fel, hogy adva van egy $\{z_n\}$ sorozat. Alkotunk egy új sorozatot a következőképpen $S_1 = z_1,\ S_2 = z_1 + z_2, \dots, S_n = z_1 + \dots + z_n$. Ezt a két sorozatot $\{z_n\}$ és $\{S_n\}$ komplex számú sornak nevezzük. Jelölése:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \qquad (1)$$

hol z_n –a sor általános tagja, S_n –a sor részleges összege.

Hogyha a sor részleges összegének létezik véges határa, akkor az (1) sor konvergens. Hogyha ilyen határ nem létezik vagy egyenlő végtelennel, akkor az adott sor divergens. Ezen kívül ha $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ akkor az S-t a sor összegének nevezik és az $r_n = S_n - S$ a sor maradéktagjának nevezik és $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

A konvergens komplex számú sorok alapvető tulajdonságai

1. Hogyha az (1) sor konvergens, akkor az ő maradéktagja tart a 0-hoz.
2. Az (1) sor és a maradéktagból alkotott sor
$$z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots \quad (2)$$
konvergens és divergens egyidejűleg, méghozzá hogyha S az (1) sor összege, akkor $R_n = S - S_n$ lesz a (2) sor összege.
3. Hogyha az S ez az (1) sor összege, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} Cz_n$ sor konvergens és $C \cdot S$ az összege.
4. Cauchy kritériuma: Ahhoz, hogy az (1) sor konvergens legyen szükséges és elegendő, hogy $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ és $\forall p \in \mathbb{N}$
$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon.$$
Tételezzük fel, hogy
$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad (4)$$
Legyen p_n a (3) sor maradékösszege és q_n a (4) sor maradékösszege. Akkor $S_n = p_n + iq_n$ az (1) sor maradékösszege.

Tétel: Ahhoz, hogy (1) sor konvergens legyen szükséges és elegendő, hogy (3) és (4) sorok konvergensek legyenek egyidejűleg.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy $S_n = p_n + q_n$. Hogyha az (1) sor összege S, akkor a (3) és (4) sor összege p és q és akkor $S = p + q$.

Abszolút és feltételes konvergens sorok

Tétel: Hogyha a
$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \quad (5)$$

sor konvergens, akkor az (1) sor is konvergens .

<u>Bizonyítás:</u> Tételezzük fel, hogy az (5) sor konvergens, akkor a Cauchy kritériuma szerint $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ és $\forall p \epsilon \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k|\right| < \varepsilon.$$

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| \leq |z_{n+1}| + \cdots + |z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Definíció: A sort abszolút konvergensnek nevezzük, hogyha konvergens az (5) sor. Hogyha az (5) sor konvergens, de az (1) sor divergens, akkor ez a konvergensség feltételes.

Tétel: Ahhoz, hogy az (1) sor abszolút konvergens legyen szükséges és elegendő, hogy a (3) és a (4) sorok is abszolút konvergensek legyenek egyidejűleg.

<u>Bizonyítás:</u>

Szükséges feltétel: Tételezzük fel, hogy az (1) sor abszolút konvergens. Akkor a Cauchy kritériumából kifolyólag $\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$ és $\forall p \epsilon \mathbb{N}$

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon$$

$$\begin{cases} |x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}| \\ |y_{n+1}| + \cdots + |y_{n+p}| \end{cases} \leq |z_{n+1}| + \cdots + |z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Akkor a valós számok Cauchy kritériuma szerint a (3) és (4) sorok abszolút konvergensek.

Elégséges feltétel: Tételezzük fel, hogy a (3) és (4) sorok abszolút konvergensek. Akkor a Cauchy kritériumából kifolyólag $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0.$

$$|x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|y_{n+1}| + \cdots + |y_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}| + |y_{n+1}| + \cdots + |y_{n+p}| \leq \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

<u>Példák:</u>

I.Vizsgálja ki, hogy konvergensek-e a sorok. Ha igen akkor számítsa ki a sor összegét.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{i}{2^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$

1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1};\quad S$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\qquad S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}\ \to\ S$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

$S=1+2i.$

II.Vizsgálja ki, hogy konvergensek-e a sorok:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}+i\frac{2^n}{3^n n}-konvergens$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{e}<1\ \to$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}-\ \text{konvergens d'Alembert szerint}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n n}}=\frac{2}{3}<1\ \to\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n n}-\text{konvergens Cauchy szerint}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}+\frac{i}{n^2+1}-divergens$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \;\rightarrow\; \int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_{2}^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln\ln x\,\Big|_{2}^{+\infty}=\infty$$

$$\rightarrow a\ sor\ divergens$$

III. Vizsgálja ki abszolút és feltételes konvergensségre a sorokat:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n}$ – abszolút konvergens; $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n!}{(in)^n}\right|$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}-\text{ konvergens;}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^3}$ – abszolút konvergens; $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in}}{n^3}\right|$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}-\text{konvergens;}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{in}{3n+i}\right)^n$ – abszolút konvergens;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{in}{3n+i}\right)^n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{9n^2+1}}\right)^n$$

$$-\text{ konvergens; }\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{\sqrt{9n^2+1}}\right)^n}=\frac{1}{3}.$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\sqrt{n}}=\frac{i}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{i}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{i}{\sqrt{7}}+\cdots=$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}+i\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

$$=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}-\text{ konvergens;}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}$ *és* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ – divergensek, mivel $\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{n}}$ – feltételesen konvergens.

Házi feladat:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + i\sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n!} + i\frac{2n-1}{3^n} \right)$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2i)^{n^2}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n2^n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(in)^{n^2}}$.

Komplex változós függvények

Tételezzük fel, hogy adva van két nem üres halmaz $D_z \subset \bar{\mathbb{C}}$ és $D_w \subset \bar{\mathbb{C}}$. Hogyha bármelyik $z \in D_z$ számnak megfelel egy konkrét törvény szerint egy vagy néhány komplex szám a D_w –ből akkor az ilyen megfelelőséget függvénynek nevezzük. Hogyha bármelyik $z \in D_z$ számnak megfelel egy konkrét törvény szerint egyetlen komplex szám $w \in D_w$ akkor az ilyen megfelelőséget egyértelmű függvénynek nevezzük. Jelölése: $w = f(z)$. Ellentétes esetben sokjegyű függvénynek nevezzük. Jelölése: $w = F(z)$.

Az egyértelmű függvények példája:

1) $w = z$, 2) $w = |z|$, 3) $w = z^2$.

A sokjegyű függvények példája:

1) $w = Argz$, 2) $w = \sqrt[n]{2}$.

Definíció: A $w = f(z)$ függvényt egyhelyű függvénynek nevezzük, hogyha $\forall z_1, z_2 \in D_z$, $z_1 \neq z_2$, $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Példa: $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

$$z = x + iy, \qquad \bar{z} = x - iy \to x = \frac{z+\bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i};$$

$$w = f(z) = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

A komplex változós függvények határa

Tételezzük fel, hogy $D_z \subset \bar{\mathbb{C}}$ és z_0 a határpontja a D_z halmaznak $z \to z_0$.

Definíció: A W_0 számot a $w = f(z)$ függvény határának nevezik, hogyha $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon),\ \forall z \in D,\ z \neq z_0,\ |z - z_0| < \delta,$ $|f(z) - W_0| < \varepsilon$.

Jelölése: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = W_0$.

Lehetségesek a következő változatok:

1) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty;\quad \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon), \forall z \in D, z \neq z_0, |z - z_0| < \delta, |f(z)| > \varepsilon$;

2) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = W_0;\quad \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon), \forall z \in D, |z| > \delta, |f(z) - W_0| < \varepsilon$;

3) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty;\quad \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon), \forall z \in D, |z| > \delta, |f(z)| > \varepsilon$.

Tétel: Hogyha $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z) = W_1$ és $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z) = W_2$ akkor

1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f_1(z) + f_2(z)) = W_1 + W_2$;

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z) \cdot f_2(z) = W_1 \cdot W_2$;

3) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)} = \dfrac{W_1}{W_2},\quad W_2 \neq 0.$

Tétel: Ahhoz, hogy az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvénynek a $z \to z_0$ létezzen határa szükséges és elegendő, hogy a

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad \text{és} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

teljesüljenek egyidejűleg.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy az $f(z)$ függvénynek létezik véges határa, vagyis $\lim_{z\to z_0} f(z) = W_0$ ez pedig azt jelenti, hogy $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon),\ \forall z \in D,\ z \neq z_0,\ |z - z_0| < \delta,\ |f(z) - W_0| < \varepsilon$.

Most az egyértelmű egyenlőtlenségből megkapjuk a tétel állítását

$$\begin{cases} |u(x,y) - u_0| \\ |v(x,y) - v_0| \end{cases} \leq |f(z) - W_0| \leq |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| < \varepsilon.$$

Tétel: Tételezzük fel, hogy $w = f(t),\ t = \varphi(z)$. Hogyha létezik $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = t_0;\ \exists \lim\limits_{t\to t_0} f(t) = W_0$ akkor $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(\varphi(z)) = W_0$.

Definíció: A W_0 számot az $f(z)$ függvény határának nevezik, hogyha $\forall\{z_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0,\ f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} W_0$.

A komplex változós függvények folytonossága

Tételezzük fel, hogy az $f(z)$ függvény megvan határozva a $D_z \subset \overline{\mathbb{C}}$ halmazon és z_0 e függvény határpontja. Az $f(z)$ függvényt a z_0 pontban folytonosnak nevezzük, hogyha $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ vagyis $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon),\ \forall z \in D,\ z \neq z_0,\ |z - z_0| < \delta$, $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Definíció: Az $f(z)$ függvényt a $z_0 = \infty$ pontban folytonosnak nevezzük, hogyha $f\left(\frac{1}{z}\right)$ függvény folytonos a $z_0 = 0$ pontban.

Tétel: Ahhoz, hogy az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény folytonos legyen egy adott halmazon belül a z_0 pontban szükséges és elegendő, hogy e halmazon belül az (x_0, y_0) pontban folytonosak legyenek az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvények.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy $f(z)$ folytonos egy halmazon belül a z_0 pontban. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Akkor az egyértelmű egyenlőtlenségből megkapjuk, hogy

$$\begin{cases} |u(x,y) - u(x_0,y_0)| \\ |v(x,y) - v(x_0,y_0)| \end{cases} \leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Vagyis az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvények folytonosak.

Tétel: Hogyha $f(z)$ függvény folytonos egy zárt és korlátozott tartományban, akkor ez a függvény korlátozott.

Tétel: Hogyha $f(z)$ függvény folytonos egy tartományon belül, akkor a $|f(z)|$ e tartományon belül eléri a legnagyobb értékét.

Definíció: Az $f(z)$ függvényt egyenletesen folytonosnak nevezik egy halmazon belül, hogyha $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon),\ \forall z_1, z_2 \in D_z,\ |z_1 - z_2| < \delta, |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Cantor-tétel: Hogyha egy függvény folytonos egy halmazon belül, akkor ez a függvény egyenletesen folytonos e halmazon belül.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy $f(z)$ folytonos egy halmazon belül, akkor folytonosak lesznek az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvények. Akkor a Cantor valós számú tételének megfelelően ezek a függvények egyenletesen folytonosak.

Tétel: Ahhoz, hogy az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény egyenletesen folytonos legyen egy halmazon belül szükséges és elegendő, hogy egyenletesen folytonosak legyenek az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvények.

Tétel: Hogyha $f(z)$ és $g(z)$ függvények folytonosak a z_0 pontban, akkor az összegük, szorzatuk és hányadosuk is folytonosak lesznek.

A sokjegyű függvény egyértelmű ágai.

Definíció: Tételezzük fel, hogy a G tartományban adva van egy sokjegyű függvény $F(z)$ és a $D \subset G$ tartományban adva van egy folytonos egyértelmű függvény $f(z)$, akkor hogyha $\forall z \in G$, $f(z) \in F(z)$ akkor ebben az esetben az $F(z)$ függvény felbontható egyértelmű ágakra.

Példa: 1) Bontsa egyértelmű ágakra a következő függvényt

$$F(z) = \begin{cases} z, & |z| \leq 1 \\ \{0,1\}, & |z| > 1 \end{cases}$$

$W = z, \ |z| < +\infty, \qquad W = 1, \qquad |z| < 1$

2) $F(z) = \begin{cases} z, & z \neq 0 \\ \{0,2\}, & z = 0 \end{cases}$

Ezt a függvényt nem lehet ágakra bontani, mivel ez a függvény nem folytonos.

Alapvető komplex változós függvények

Hatvány- és gyökfüggvények. Riemann felületének a definíciója

$W = z^n$ –az ilyen függvényeket hatványfüggvényeknek természetes kitevővel nevezik. Hogyha $n = 1$, akkor $W = z$. Ebben az esetben az egész komplex sík átalakul az egész komplex síkba.

Hogyha $n \geq 2$, akkor azok a szögek, melyeknek nagysága $0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{n}$ átalakulnak az egész komplex síkba a pozitív tengely kimetszésével, de a 0 pont beletartozik a síkba.

Megtaláljuk az egyrétegűség tartományát, vagyis megmutatjuk, hogy $\forall z_1, z_2 \in G, \ z_1 \neq z_2, \ z_1^n \neq z_2^n$.

$(z_1^n = z_2^n) \equiv (|z_1|^n = |z_2|^n) \cup (Arg z_1^n = Arg z_2^n) \equiv$

$\equiv (|z_1|^n = |z_2|^n) \cup (nArg z_1 = nArg z_2) \equiv$

$\equiv (|z_1|^n = |z_2|^n) \cup (narg z_1 = narg z_2 + 2\pi k) \equiv$

$$\equiv (|z_1|^n = |z_2|^n) \cup \left(argz_1 = argz_2 + \frac{2\pi k}{n}\right).$$

Vagyis a $W = z^n$ függvény egyrétegű lesz abban a tartományban, amely nem tartalmaz két közös pontot és a két pont arkuszának a különbsége $\frac{2\pi k}{n}$.

A $W = \sqrt[n]{z}$ föggvényt n – gyökfüggvénynek nevezik. Ez a függvény a $W = z^n$ függvény fordítottja, amely folytonos függvény az összes véges pontokban és általánosított függvény a $z = \infty$ pontban.

A (W) síkon az origóból kivezetünk $n+1$ sugarat $L_0, L_1, \dots, L_n$. Az L_0 sugár egybeesik az u tengely pozitív részével. Akkor a (W) sík eloszlik n tartományra: $g_1, \dots, g_n$. A g_k tartomány korlátozott L_{k-1} *és* L_k sugarakkal, amelyek a pozitív tengellyel $\frac{2\pi}{n}(k-1)$ és $\frac{2\pi}{n}k$ szögeket alkotnak.

Kiderítjük, hogy fog kinézni a g_k tartomány a $z = W^n$ leképzése után és meghatározzuk, hogy mibe alakulnak át a g_k tartomány határai.

Felírjuk a W komplex szám trigonometriai formáját:
$W = |W|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z = |W|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Amikor a W szám az $L_k -$ hoz tartozik, akkor ez a szám lehet 0-tól ∞-ig és a $|W|$ ugyanúgy $0 < |W| < \infty$ marad a $z = W^n$ leképzés után. A $\frac{2\pi}{n}(k-1)$ és $\frac{2\pi}{n}k$ szögek a leképzés után átalakulnak $2\pi(k-1)$ és $2\pi k -$ba, vagyis átalakulnak a valós szám pozitív tengelyébe. Ez azt jelenti, hogy a sokjegyű $W = \sqrt[n]{z}$ függvény feloszlik n egyértelmű ágakra.

A Riemann felszín definíciója: Figyelembe veszünk n síkot $W_1, \dots, W_n$. Hogy jobban szemügyre vehető lehessen azt fogjuk feltételezni, hogy ezek a síkok nagy lapok. Mindegyik lap $ReW_i \geq 0$ félsíkot kimetszük a pozitív tengely mentén a 0 – val együtt. Akkor a mi félsíkunk feloszlik két félsíkra, az alsó $ImW_i \leq 0$ és $ImW_i \geq 0$. Ezeket a lapokat összefogjuk hozni a következőképpen: az első lap alsó részét összehozzuk a második lap felső részével, a második lap alsó részét a harmadik lap felső részével és így tovább az $(n-$

1) $-$edik lap alsó részét az n $-$edik lap felső részével és az n $-$edik lap alsó részét az első lap felső részével.

De igazából ilyen összehozás lehetetlen, mert az első és az n $-$edik lap között $n-1$ lap van. Ezért feltételezni fogjuk, hogy az n $-$edik lap alsó pontja azonos az első lap felső pontjával. E művelet végén kapunk egy réteges felszínt, amelyet Riemann felszíneknek neveznek.

Exponenciális függvény

Az exponenciális függvényt úgy definiáljuk, mint a $W_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ sorozatának a határát, ha $n \to \infty$. Figyelembe vesszük ezt a sorozatot.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{x+iy}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right|^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)\frac{n}{2}} = e^x.$$

Elég nagy n esetén $\left|1+\frac{z}{n}\right| \to 1$ ez pedig azt jelenti, hogy $\left|\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)\right| < \frac{\pi}{2}$. Mivel az arg az első félsíkba tartozik, akkor

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = \arg\left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right) = arctg\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)$$

$$= arctg\frac{y}{x+n} \quad \text{és}$$

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = narctg\frac{y}{x+n}.$$

Akkor

$$\lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\frac{arctg\frac{y}{x+n}}{\frac{y}{x+n}}\cdot\frac{y}{x+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{ny}{x+n} = y.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\left|1+\frac{z}{n}\right|^n = e^x$ és $\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = y \rightarrow$
$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Az exponenciális függvény tulajdonságai:

1.Hogyha $x = 0$ akkor $e^z = e^{iy} = \cos y + i\sin y -$ Euler-képlete.

2. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

<u>Bizonyítás:</u> Tételezzük fel, hogy $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2$. Euler képletéből kifolyólag
$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)$ és $e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2))$$
$$= e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

3. $e^{z_1} \cdot e^{-z_1} = 1$;

4. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;

5.A trigonometriai és exponenciális függvények kapcsolata. Euler képletéből kifolyólag $\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i\sin y \\ e^{-iy} = \cos y - i\sin y \end{cases}$

Összeadjuk ezeket a függvényeket $\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} = \cos y$. Most pedig kivonjuk az első függvényből a másodikat $\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} = \sin y$.
Tételezzük fel, hogy $y \rightarrow z$, akkor

$\begin{cases} \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{cases}$ $-$az exponenciális és a trigonometrikus függvények kapcsolata

$$\cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = chz\,, \qquad \sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}i = ishz.$$

6. $\sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2 =$

$$= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} =$$
$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)}}{4i}$$
$\times$

$$\times \frac{e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{1} = \frac{2\left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right)}{4i}$$
$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} =$$
$= \sin(z_1 \pm z_2).$

7. $\cos z_1 \cdot \cos z_2 \pm \sin z_1 \cdot \sin z_2 = \cos(z_1 \mp z_2).$

8. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z.$

9. $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy =$
$= \sin x \, chy + i \cos x \, shy = u + iv \;\rightarrow$

$\begin{cases} u = \sin x \, chy \\ v = \cos x \, shy \end{cases}$ $-$a $sinz$ függvény valós és feltételezett tagjai.

10.$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy =$
$= \cos x \, chy - i \sin x \, shy = u + iv \;\rightarrow$

$\begin{cases} u = \cos x \, chy \\ v = \sin x \, shy \end{cases}$ $-$a $cosz$ függvény valós és feltételezett tagjai.

Logaritmus függvény

Logaritmus függvénynek egy olyan függvényt nevezünk, amely $\forall z \in \mathbb{C}/\{0\}$ számára megfeleltet egy értékhalmazt $W \in \mathbb{C}$. Jelölése: $W = Lnz$. Vagy másképpen logaritmus függvénynek egy olyan W függvényt neveznek, hogy $e^W = z$.

Hogyha $W = u + iv$ akkor $e^W = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v) = x + iy = z$.

Vagyis $Lnz = \ln|z| + iArgz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$.

$Lnz = u + iv = \ln|z| + iArgz$ $-$képlet a logaritmikus függvény értékének a kiszámításához.

$Lnz = \ln|z| + i \arg z -$ a logaritmikus függvény főértéke.

A logaritmikus függvény tulajdonságai:

1) $Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$;

Bizonyítás: A logaritmikus függvény definíciójából megkapjuk, hogy:

$Ln(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1 \cdot z_2| + i\, Arg(z_1 \cdot z_2) =$
$= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(Argz_1 + Argz_2)$
$$= \ln|z_1| + iArgz_1 + \ln|z_2| + Argz_2 =$$
$$= Lnz_1 + Lnz_2.$$

2) $Ln\frac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2$;

3) $Lnz^n \neq nLnz$;

Bizonyítás: Bebizonyítjuk ezt az egyenlőtlenséget $n = 2$ számára, vagyis $Lnz^2 \neq 2Lnz$.

$Lnz^2 = Ln(z \cdot z) = Lnz + Lnz = 2Lnz,$

$Lnz + Lnz = \ln|z| + iArgz + \ln|z| + iArgz =$

$= 2\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) + i(\arg z + 2\pi n), \quad n, k\epsilon\mathbb{Z}.$

$2Lnz = 2\ln|z| + \ 2iArgz = 2\ln|z| + 2i\arg z + 4\pi ki, k\epsilon\mathbb{Z}.$

Szemmel látható, hogy a két képlet nem egyenlő.

4) $A \ W = {z_1}^{z_2} = e^{z_2 Lnz_1}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ – függvényt általános exponenciális függvénynek nevezik.

Példa: Számítsa ki a kifejezés összes értékét:

1) $W = i^i = e^{iLni} = e^{i(\ln|i| + iArgi)} = e^{i\left(i\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi ki}$, $k\epsilon\mathbb{Z}$.

2) $W = (1+i)^{1+i} = e^{(1+i)Ln(1+i)} = e^{(1+i)\left(\ln|1+i| + iArg(1+i)\right)} =$

$= e^{(1+i)(ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)}, \quad k\epsilon\mathbb{Z}.$

Arkusz-függvények

Az arkusz-függvények sokjegyű függvények.

1) $W = Ar\sin z \ \rightarrow z = \sin W,$

2) $W = Arc\cos z \ \rightarrow z = \cos W,$

3) $W = Arc\,\mathrm{tg}\, z \ \rightarrow z = \mathrm{tg}\, W,$

4) $W = Arc\,\mathrm{ctg}\, z \ \rightarrow z = \mathrm{ctg}\, W,$

5) $W = Arc\,\mathrm{sh}\, z \ \rightarrow z = \mathrm{sh}\, W,$

6) $W = Arc\,\mathrm{ch}\, z \ \rightarrow z = \mathrm{ch}\, W,$

7) $W = Arc\,\mathrm{th}\, z \ \rightarrow z = \mathrm{th}\, W,$

8) $W = Arc\,\mathrm{cth}\, z \ \rightarrow z = \mathrm{cth}\, W,$

1. bizonyítása: $z = \sin W$, $z = \frac{e^{iW} - e^{-iW}}{2i}$, behelyettesítjük az $e^{iW} = t$.

$$z = \frac{t - \frac{1}{t}}{2i} \ \rightarrow \ 2iz = t - \frac{1}{t} \ \rightarrow \ 2izt = t^2 - 1;$$

$t^2 - 2izt - 1 = 0;$

$(t - iz)^2 + z^2 - 1 = 0;$

$(t - iz)^2 = 1 - z^2;$

$t - iz = \sqrt{1 - z^2};$

$t = iz + \sqrt{1 - z^2};$

$e^{iW} = iz + \sqrt{1 - z^2}$ – ez a logaritmus főggvény definíciója.

$$iW = Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \rightarrow W = -iLn\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$
$$= Arc\sin z.$$

4.bizonyítása: $z = \operatorname{ctg} W$, $z = \frac{\cos W}{\sin W} = \frac{\frac{e^{iW}+e^{-iW}}{2}}{\frac{e^{iW}-e^{-iW}}{2i}} = i\frac{e^{iW}+e^{-iW}}{e^{iW}-e^{-iW}}.$

Behelyettesítjük $e^{iW} = t.$

$$z = i\frac{t + \frac{1}{t}}{t - \frac{1}{t}} \rightarrow z = i\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \rightarrow z(t^2 - 1) - i(t^2 + 1) = 0,$$

$$t^2(z - i) = z + i \rightarrow t^2 = \frac{z + i}{z - i} \rightarrow e^{2iW} = \frac{z + i}{z - i},$$

$$2iW = Ln\left(\frac{z + i}{z - i}\right) \rightarrow W = -\frac{i}{2}Ln\left(\frac{z + i}{z - i}\right) = -iLn\sqrt{\frac{z + i}{z - i}}.$$

6.bizonyítása: $z = \operatorname{ch} W = \frac{e^W+e^{-W}}{2}$. Behelyettesítjük: $e^W = t.$

$$z = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} \rightarrow 2zt = t^2 + 1 \rightarrow t^2 - 2zt + 1 = 0$$
$$\rightarrow (t - z)^2 - z^2 + 1 = 0,$$

$(t - z)^2 = z^2 - 1 \rightarrow t = z + \sqrt{z^2 - 1} \rightarrow e^W = z + \sqrt{z^2 - 1},$

$W = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) = Arcchz.$

8.bizonyítása: $z = \operatorname{cth} W = \frac{chW}{shW} = \frac{\frac{e^W+e^{-W}}{2}}{\frac{e^W-e^{-W}}{2}} =$
$\frac{e^W+e^{-W}}{e^W-e^{-W}}$. Behelyettesítjük: $e^W = t.$

$$z = \frac{t + \frac{1}{t}}{t - \frac{1}{t}} \rightarrow z = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \rightarrow t^2 + 1 - (t^2 - 1)z = 0,$$

$$t^2(1-z)+z+1=0 \ \rightarrow\ t^2(1-z)=-1-z \ \rightarrow\ t^2=\frac{z+1}{z-1}$$
$$\rightarrow$$
$$\rightarrow\ \ t=\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} \ \rightarrow\ e^W=\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} \ \rightarrow\ W=Ln\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}=Arccthz.$$

Megjegyzés: Szemmel látható, hogy a komplex arkusz-függvények könnyen összefüggésbe hozhatóak a logaritmus fügvénnyel.

Példák:

I.Mi az E halmaz képe a W leképzést követően?

a) $W=z^2;\qquad E: x=c;$

$u+iv=(x+iy)^2;\ \rightarrow\ u+iv=x^2-y^2+2xyi;$

$$\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} u=c^2-y^2 & \rightarrow & u=c^2-\dfrac{v^2}{4c^2}=\dfrac{4c^4-v^2}{4c^2} \\ v=2cy \ \rightarrow y=\dfrac{v}{2c}, & & \dfrac{v^2}{4c^2}=c^2\ \rightarrow v=\pm 2c^2 \end{matrix}$$

b) $W=\frac{z}{z+1};\ \ E: |z|=2;$

$W(z+1)=z\ \ \rightarrow\ \ Wz-z+W=0\ \rightarrow (W-1)z=-W\ \rightarrow$

$|z|=\left|\frac{-W}{W-1}\right|=2$

$$\left|\frac{u+iv}{u-1+iv}\right|=2\ \rightarrow \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{(u-1)^2+v^2}}=2 \rightarrow\ \sqrt{u^2+v^2}$$
$$=2\sqrt{(u-1)^2+v^2}\rightarrow$$
$$u^2+v^2=4(u-1)^2+4v^2\ \rightarrow\ u^2-4u^2+8u-4-4v^2+v^2$$
$$=0\ \rightarrow$$
$$3u^2-8u+4+3v^2=0\ \rightarrow\ u^2-\frac{8}{3}u+\frac{4}{3}+v^2=0$$
$$\rightarrow\left(u-\frac{4}{3}\right)^2+v^2=\frac{4}{9};$$

$\left|W-\frac{4}{3}\right|=\frac{2}{3}.$

II.Számítsa ki:

1) $2^i = e^{i\ln 2} = e^{i(\ln|2|+iArg2)} = e^{i(\ln 2+i2\pi k)}$;

2) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{1-i} = \left(-1+\sqrt{3}i\right)\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{-i} =$

$= \left(-1+\sqrt{3}i\right)e^{-i\left(\ln 2+Arg\left(-1+\sqrt{3}i\right)\right)}$

$$= \left(-1+\sqrt{3}i\right)e^{-i\left(\ln 2+i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)\right)}.$$

III. Oldja meg az egyenletet: $\sin z - \cos z = i$.

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} - \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = i; \quad e^{iz} = t.$$

$$\frac{t-\frac{1}{t}}{2i} - \frac{t+\frac{1}{t}}{2} = i \ \rightarrow \ \frac{t^2-1-i(t^2+1)}{2it} = i$$

$$\rightarrow (1-i)t^2 + 2t - 1 - i = 0$$

$$D = 12 \quad \rightarrow \quad e^{iz} = \frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2(1-i)} = \frac{\left(-1\pm\sqrt{3}\right)(1+i)}{2};$$

$$z_1 = -i\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right);$$

$$z_2 = -i\left(\ln\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right).$$

A kompex változós függvény deriváltja és differenciálja

Tételezzük fel, hogy az $f(z)$ függvény definiálva van a D tartományban és a z_0 pont az $f(z)$ függvény határpontja, akkor ez az $f(z)$ függvény $z_0 -$ beli deriváltja:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

$\Delta f = f(z_0+\Delta z) - f(z_0) -$ az f függvény növekedése.

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) + \alpha(|\Delta z|) \ \rightarrow \ \Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(|\Delta z|) \quad (*)$$

Definíció: Hogyha az f függvény növekedését reprezentálni lehet a komplex számsíkon belül a $(*)$ alakban, akkor az $f(z)$ függvényt differenciálhatónak nevezik a z_0 pontban.

Tételezzük fel, hogy $W = u(x,y) + iv(x,y)$.

$\Delta W = \Delta u + i\Delta v$ vagy másképpen $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(|\Delta z|)$ és $\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha(|\Delta z|)$, $|\Delta z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \partial z$.

Akkor $\Delta W = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + \alpha(|\Delta z|) =$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + \alpha(|\Delta z|)$$
$$= f'_x\Delta x + f'_y\Delta y + \alpha(|\Delta z|).$$

Most logikus a kérdés, hogy milyen feltételeknek kell, hogy megfeleljen az f függvény ahhoz, hogy differenciálható legyen.
Tételezzük fel, hogy $f(z) = z$, $\Delta W = \Delta f = \Delta z$ és $f(\bar{z}) = \bar{z}$, $\Delta W = \Delta f = \overline{\Delta z}$.

$z = x + iy \qquad \Delta z = \Delta x + i\Delta y \quad (1)$

$\bar{z} = x - iy \qquad \overline{\Delta z} = \Delta x - i\Delta y \quad (2)$

Összeadjuk és kivonjuk az (1) és (2) képleteket.

$$\Delta x = \frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2}, \qquad \Delta y = \frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i}.$$

$$\Delta W = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + \alpha(|\Delta z|)$$
$$=$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\Delta z + \overline{\Delta z}}{2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\Delta z - \overline{\Delta z}}{2i}\right)$$
$$+ \alpha(|\Delta z|) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta z + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\overline{\Delta z}\right.$$
$$\left. + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\overline{\Delta z}\right) + \alpha(|\Delta z|)$$
$$= \frac{1}{2}\left(f'(z) + f'(\bar{z})\right) + \alpha(|\Delta z|).$$

Ahhoz, hogy az $f(z)$ függvény differenciálható legyen szükséges, hogy $f'_{\bar{z}} = 0$. Ez pedig csak abban az esetben lehetséges, ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

ezt az utolsó képletet Cauchy – Riemann – Euler – d'Alembert feltételnek nevezik.

Monogen és analitikus függvények. A monogenesség és analitikusság feltételei. Laplace-egyenlet

Definíció: Tételezzük fel, hogy a z_0 pont környezetében definiálva van az $f(z)$ függvény. Az $f(z)$ függvényt a z_0 pontban monogennek nevezik, hogyha az f függvénynek létezik véges deriváltja ebben a pontban.

Definíció: Az $f(z)$ függvényt a D tartományban monogennek nevezik, hogyha e tartomány minden pontjában az $f(z)$ függvény monogen.

Definíció: Az $f(z)$ függvényt analitikusnak nevezzük a z_0 pontban, hogyha e pontban létezik folytonos deriváltja az f függvénynek.

Definíció: Az $f(z)$ függvényt analitikusnak nevezzük a D tartományban, hogyha létezik egy olyan nyílt tartomány $G \subset D$, amelyben e függvény analitikus lesz.

Tétel: Tételezzük fel, hogy az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény definiálva van a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban. Az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvények differenciálhatóak az (x_0, y_0) pontban. Ahhoz, hogy az $f(z)$ függvény monogen legyen a z_0 pontban szükséges és elegendő, hogy e függvény megfeleljen a Cauchy – Riemann feltéteeknek:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

<u>Bizonyítás:</u>

Szükséges feltétel: Tételezzük fel, hogy az $f(z)$ függvény monogen a z_0 pontban. Akkor a definícióból kifolyólag e pontban létezik véges deriváltja az f függvénynek.

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = f'(z_0).$$

A komplex számsíkon figyelembe veszünk $\Delta y = 0$ és $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = \Delta x$. Akkor $\Delta W = \Delta x u + i \Delta x v$.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x u + i\Delta x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'(z_0).$$

Mosttételezzük fel, hogy $\Delta x = 0 \ \rightarrow \ \Delta z = i\Delta y$. Akkor $\Delta W = \Delta y u + i\Delta y v$.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y u + i\Delta y v}{i\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z_0).$$

Vagyis

$$\begin{cases} f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ f'(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

Elégséges feltétel: Tételezzük fe, hogy helyénvaló a Cauchy – Riemann feltétel. Bebizonyítjuk, hogy az $f(z)$ függvény monogen a z_0 pontban.

$$\Delta W = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)$$
$$= \frac{\partial v}{\partial y}(\Delta x + i\Delta y) -$$
$$-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = \frac{\partial v}{\partial y}\Delta z + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) = \frac{\partial v}{\partial y}\Delta z + i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta z =$$
$$= \left(\frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z.$$

$$\Delta W = \left(\frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z \rightarrow \frac{\Delta W}{\Delta z} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = f'(z_0)$$
$$= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tételezzük fel, hogy teljesülnek a Cauchy – Riemann feltételek vagyis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

Az első egyenletet differenciáljuk x szerint, a másodikat pedig y szerint és összeadjuk őket.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases} \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

Most pedig a Cauchy – Riemann első feltételét differenciáljuk y szerint, a másodikat pedig x szerint és összeadjuk.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases} \rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (4)$$

A (3) és (4) egyenleteket Laplace egyenleteknek nevezik és az $u(x,y)$ és $v(x,y)$ függvényeket, amelyek megfelelnek ezeknek a feltételeknek, harmónikus függvényeknek nevezik.

Megjegyzés: Hogyha az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény analitikus és megvan adva a valós vagy az immaginárius része, akkor ez alapján vissza lehet állítani az f függvényt a konstans pontosságával.

<u>Példa:</u> Állítsa vissza az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvényt, hogyha
$u(x,y) = x^2 - y^2$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x \;\rightarrow\; v = \int 2x dy = 2xy + C(x)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -2y \;\rightarrow\; \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \;\rightarrow\; \frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x) = 2y \;\rightarrow$$

$$C'(x) = 0 \;\rightarrow\; C(x) = C_1 \;\rightarrow\; v = 2xy + C_1 .$$

$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi + iC_1 = (x+iy)^2 + iC_1 = z^2 + iC_1$.

Példák:

I.Milyen pontokban monogen a függvény: $x^2 + iy^2,\ u = x^2, v = y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \to x = y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 -$$ vagyis a függvény monogen az

$x = y$ pontokban.

II.Állítsa vissza az $f(x,y)$függvényt ha $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \to$$

$$v = \int \left(2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) dy =$$

$$= 2xy + 5y + x\int \frac{d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} + C(x);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1 - \dfrac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -2y + 1 - \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y - \dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(x) = 2y - \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(x) \end{cases}$$

$$\to$$

$$-2y + 1 + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = -2y + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - C'(x)$$

$$C'(x) = -1 \quad \to \quad C = -x + C_0$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2} + i\left(2xy + 5y - \frac{x}{x^2+y^2} - x + C_0\right) =$$

$$= (x+iy)^2 + 5(x+iy) + (y - ix) + \frac{-ix - y}{x^2+y^2} + iC_0 =$$

$$= z^2 + 5z - iz - \frac{z}{|z|^2} + iC_0.$$

Házi:

I.Mi az E halmaz képe a W leképzést követően.

1) $W = \frac{1}{z}$ $\qquad E = \{|z-1| = 1\}$;

2) $W = \frac{1}{z}$ $\qquad E: x = c;\ y = c;\ |z| = r,\ \ \arg z = \alpha$.

II.Oldja meg az egyenletet: $\sin z - \cos z = 2$.

III.Számítsa ki: $(1-i)^{1+i}$; $\quad i^i$.

IV.Állítsa vissza az $f(z)$ függvényt ha $u(x,y) = x + arctg\,\frac{y}{x}$, $x > 0$.

A differenciálás szabályai és képletei

1.Hogyha $f(z) = C \ \rightarrow\ f'(z) = 0$.

2.Hogyha $f(z) = z \ \rightarrow\ f'(z) = 1$.

3.Hogyha $f(z)$ és $g(z)$ differenciálható függvények, akkor differenciálhatóak lesznek az ők összegük, szorzatuk és hányadosuk is.

$\big(f(z) + g(z)\big)' = f'(z) + g'(z)$,

$\big(f(z) \cdot g(z)\big)' = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$,

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{\big(g(z)\big)^2}.$$

4.Hogyha a $W = f(\xi)$ differenciálható a $\xi_0 = \varphi(z_0)$ pontban és a $\varphi(z)$ függvény differenciálható a z_0 pontban, akkor az összetett függvény $f\big(\varphi(z)\big)$ differenciálható lesz a z_0 pontban $W' = f'\big(\varphi(z_0)\big) \cdot \varphi'(z_0)$.

5.Hogyha az $f(z)$ függvény differenciálható a z_0 pontban, $f'(z) \neq 0$ és e függvénynek létezik folytonos inverz függvénye, amely differenciálható $z = \varphi(W)$, akkor

$$f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(W_0)}.$$

6.Hogyha $W = z^n \ \rightarrow\ W' = nz^{n-1}$.

<u>Bizonyítás:</u> Bebizonyítjuk ezt matematikai indukció segítségével.

1) $n = 1,\ W = z \ \rightarrow\ W' = 1$.

2) Tételezzük fel, hogy $\forall n,\ W' = nz^{n-1}$.

3) $n + 1:\ W = z^{n+1} = z \cdot z^n \rightarrow W' = (z \cdot z^n)' = z^n + znz^{n-1}$
$= (n+1)z^n$.

7. $W=\sqrt[n]{z} \quad \rightarrow \quad z=W^n -$ inverz függvény

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)'=\frac{1}{(W^n)'}=\frac{1}{nW^{n-1}}=\frac{W}{nW^n}=\frac{\sqrt[n]{z}}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)^n}=\frac{\sqrt[n]{z}}{nz}.$$

8. $W=Lnz,\ z=e^W -$ a logaritmikus inverz függvénye

$$(Lnz)'=\frac{1}{(e^W)'}=\frac{1}{e^W}=\frac{1}{z}.$$

9. $W=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \rightarrow \begin{cases} u=e^x\cos y \\ v=e^x\sin y \end{cases} \rightarrow$

$$(e^z)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)$$
$$=e^z.$$

10. $W=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$$W'=(\sin z)'=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)'=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z\,.$$

11. $\begin{cases} W=\operatorname{tg} z, \quad W'=\dfrac{1}{\cos^2 z}\,, \\ W=\operatorname{ctg} z, \quad W'=\dfrac{1}{\sin^2 z}. \end{cases}$

A komplex szám arkuszának és modulusának a mértani értelme. A komplex leképzések fogalma.

Tételezzük fel, hogy a D tartományban adva van egy folytonos $f(z)$ függvény és $f'(z_0)\neq 0$. Akkor

$$|f'(z_0)|=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta W}{\Delta z}\right|=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta W|}{|\Delta z|}. \qquad (1)$$

A $W=f(z)$ leképzést, amely megfelel az (1) feltételnek a lineáris széthúzás állandóságának a leképzésének nevezik és a $|f'(z_0)|=A$ a széthúzás együtthatójának nevezik. A –const.

Hogyha Δz elég kicsi, akkor $|f'(z_0)|\approx\frac{|\Delta W|}{|\Delta z|}$.

$|\Delta z|$ –távolság a z_0 és a z pontok között.

$|\Delta W|$ –távolság a W_0 és a W pontok között.

Bárhogyan jutunk el a z_0 pontból a z pontba a távolság e két pont között nem változik és a távolság a W_0 és a W pontok között változik arányilag a $W = f(z)$ leképzés után.

A komplex síkon figyelembe veszünk egy görbét $\gamma = \{z\colon\ z = z(t)\}$, amely a z_0 pontból indul ki. A $W = f(z)$ leképzést követően ennek a görbének megfelel $\Gamma = \{W\colon\ \ W = f(z(t))\}$ görbe, amely a W_0 pontból indul ki.

Érintőket építünk a γ és a Γ görbékhez. Akkor a derivált mértani értelméből kifolyólag az $z'(t_0)$ és $f'(z_0)$ iránya egybeesik az érintő irányával és

$$ArgW' = Arg\big(f'(z_0) \cdot z'(t_0)\big) = Argf'(z_0) + Argz'(t_0)$$

$$\varphi = Argf'(z_0) + \alpha.$$

$Argf'(z_0)$ −ez az a szög, amelyre el kell fordítani a Γ görbe érintőjét a W_0 pontban. Ez definiálja az arkusz mértani értelmét.

Tételezzük fel, hogy adva van két görbe γ_1 és γ_2 és ennek a két görbének megfelel Γ_1 és Γ_2 a $W = f(z)$ leképzés után.

A két görbe között a szög ez az a szög, amely a két görbe érintője között van.

$$\alpha' = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad \text{és} \qquad \varphi' = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\begin{matrix} ArgW' = Argf(z_0) + \alpha_1 \\ ArgW' = Argf(z_0) + \alpha_2 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \varphi' = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha'$$

A $W = f(z)$ leképzést követően a szögek nagysága nem változik.

Definíció: A $W = f(z)$ leképzést a z_0 pontban konformnak nevezik, hogyha $f'(z_0) \neq 0$.

A leképzést konformnak nevezik a D tartományban, hogyha e leképezés konform e tartomány minden pontjában.

A konform leképzés tulajdonságai:

1. A lineári széthúzás állandósága.
2. Megőrzi a szögek nagyságát és irányát.

A $W = f(z)$ leképzést konformnak nevezik a $z_0 = \infty$ pontban, hogyha a $W = f\left(\frac{1}{z}\right)$ leképzés konform a $z_0 = 0$ pontban.

Hogyha $W_0 = \infty$, akkor a $W = f(z)$ leképzést konformnak nevezik a z_0 pontban, ha a $W = \frac{1}{f(z)}$ leképzés is konform a z_0 pontban.

Hogyha $W_0 = \infty$ és $z_0 = \infty$, akkor a $W = f(z)$ leképzést konformnak nevezik, ha a $W = \frac{1}{f(z)}$ leképzés konform a $z_0 = 0$ pontban.

Szimmetrikus pontok

Figyelembe veszünk egy kört, amelynek M_0 a középpontja és R a sugara. A kör középpontjából felépítünk egy sugarat. Az M_1 és M_1 pontokat a körhöz viszonyítva szimmetrikus pontoknak nevezzük, hogyha ők egy sugaron vannak elhelyezve a kör belső és külső oldalán és $|M_0M_1| \cdot |M_0M_2| = R^2$.

Figyelembe veszünk egy kört és felépítünk hozzá egy érintőt. Akkor az ABM és ABC hasonló háromszögekből kifolyólag megkapjuk, hogy

$$\frac{AM}{BM} = \frac{CM}{AM} \rightarrow AM^2 = BM \cdot CM.$$

Tétel: Ahhoz, hogy a z_1 és z_2 pontok szimmetrikusok legyenek a körhöz képest szükséges és elegendő, hogy bármelyik kör, amely e két ponton ponton áthalad, ortogonális legyen az adotthoz.

Leképzések, amelyeket végre lehet hajtani fő alapvető függvények segítségével

I. Lineáris függvény

A $W = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}$ függvényt, lineáris függvénynek vagy lineáris leképzésnek nevezik.

Tulajdonságok:

1. Ellenőrizzük a konformságát.

$$W' = (az + b)' = a \neq 0.$$

Vagyis a lineáris függvény konform és leképezi a $\mathbb{C}$ síkot a $\mathbb{C}$ síkba. Ellenőrizzük a $W_0 = \infty$ és $z_0 = \infty$ pontban a konformságot.

$$W = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{a \cdot \frac{1}{z} + b} = \frac{z}{a + bz} \qquad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad W' = \left(\frac{z}{a + bz}\right)' = \frac{a + bz - bz}{(a + bz)^2} = \frac{a}{(a + bz)^2}\bigg|_{z_0=0} = \frac{1}{a}.$$

Vagyis a lineáris függvény konform és leképezi az egész általánosított komplex síkot az egész általánosított komplex síkba, $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$.

2. Ellenőrizzük azegyrétegűségét.

$$\forall z_1, z_2 \in D, \qquad z_1 \neq z_2 \quad \rightarrow \quad f(z_1) \neq f(z_2),$$

$$W_1 - W_2 = az_1 + b - az_2 - b = a(z_1 - z_2) \neq 0 \ \rightarrow \ W_1 \neq W_2.$$

Vagyis a lineáris függvény egyrétegű.

3. A lineáris leképezés a kört leképezi a körbe.

Tételezzük fel, hogy adva van egy kör $|z - z_0| = R$. Akkor

$$|W - W_0| = |az + b - az_0 - b| = |a||z - z_0| = |a|R = R_1.$$

Vagyis a kör a leképzés után is kör marad.

4. A lineáris leképzés után az egyenes egyenes marad.

5. A lineáris leképzés után a szimmetrikus pontok szimmetrikusok maradnak.

Tételezzük fel, hogy a z_1 és z_2 szimmetrikus pontok, vagyis

$$|z_0 - z_1| \cdot |z_0 - z_2| = R^2.$$

Figyelembe vesszük

$$|W_0 - W_1| \cdot |W_0 - W_2| = |az_0 + b - az_1 - b||az_0 + b - az_2 - b| =$$

$$= |a|^2|z_0 - z_1||z_0 - z_2| = |a|^2R^2 = R_1^2.$$

6. A lineáris leképzést meglehet adni néhány leképzés szuperpozíciójaként:

a) $W_1 = |a|z -$ hasonlósági transzformáció;

b) $W_2 = W_1 e^{i\varphi}$, hol $\varphi = \arg a -$ megfordítás φ szögre;

c) $W = W_2 + b -$ párhuzamos eltolás b egységre.

7. A lineáris leképzés a legáltalánosabb leképzés, amely megőrzi a mértani testek hasonlóságát.

<u>Példa:</u> 1. A lineáris függvény segítségével képezze le a háromszöget, amelynek a csúcsai $0; 1; i$, egy hátomszögbe melynek a csúcsai $0; 1 + i; 2$.

$z_k \to W_k, \quad W_k = az_k + b$

$$\begin{cases} 0 \to 1+i \\ i \to 2 \\ 1 \to 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1+i = a\cdot 0 + b \\ 2 = a\cdot i + b \\ 0 = a\cdot 1 + b \end{cases} \to \begin{cases} b = 1+i \\ a = -1-i \end{cases} \to W$$

$$= (-1-i)z + 1 + i.$$

2. Találja meg a kör képét $|z+i| < 1$ a $W = 2iz + 4$ leképezés után.

$$\begin{cases} 0 \to 4 \\ -2i \to 8 \\ -i \to 6 \end{cases} \to \quad |W-6| < 2.$$

II. Törtlineáris függvény

$$W = \frac{az+b}{cz+d}, \text{hol } ad - bc \neq 0, c$$

$$\neq 0 - \text{törtlineáris függvénynek vagy}$$

törtlineáris leképzésnek nevezik.

Tulajdonságok:

1. Ellenőrizzük a konformságot.

$$a)\ W' = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)' = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0,$$

$$z \neq -\frac{d}{c}.$$

b) Ha $z = -\frac{d}{c} \to W = \infty$, vagyis figyelembe kell venni a $W = \frac{1}{f(z)}$ függvényt.

$$W' = \left(\frac{1}{f(z)}\right)' = \left(\frac{cz+d}{az+b}\right)' = \frac{c(az+b) - a(cz+d)}{(az+b)^2}$$

$$= -\frac{ad-bc}{(az+b)^2} \neq 0.$$

Vagyis a $\mathrm{W} = \dfrac{az+b}{cz+d}$ függvény konform a $z = -\dfrac{d}{c}$ pontban.

c) Hogyha $z_0 = \infty$ akkor $W = \frac{d}{c}$. Ebben az esetben figyelembe kell venni a $W = f\left(\frac{1}{z}\right)$ függvényt.

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a\frac{1}{z} + b}{c\frac{1}{z} + d} = \frac{a + bz}{c + dz} \to f'\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{a + bz}{c + dz}\right)'$$

$$= \frac{b(c + dz) - d(a + bz)}{(c + dz)^2} =$$

$$= -\frac{ad - bc}{(c + dz)^2}\bigg|_{z_0=0} = -\frac{ad - bc}{c^2} \neq 0.$$

Vagyis a törtlineáris függvény konform a $z_0 = \infty$ pontban. Ezért a törtlineáris leképzés konform a komplex sík minden pontjában.

2. Ellenőrizzük az egyrétegűségét.

Tételezzük fel, hogy $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 \neq z_2$. Bekell bizonyítani, hogy $W_1 \neq W_2$.

$$W_1 - W_2 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}$$

$$= \frac{(az_1 + b)(cz_2 + d) - (az_2 + b)(cz_1 + d)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} =$$

$$= \frac{acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd - acz_1z_2 - adz_2 - bcz_1 - bd}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} =$$

$$= \frac{ad(z_1 - z_2) - bc(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \neq 0 \ \to W_1 \neq W_2.$$

Vagyis a törtlineáris függvény egyrétegű a $\mathbb{C}$ minden pontjában.

3. Három pont z_1, z_2, z_3 és az ők képük W_1, W_2, W_3 egyértelműen meghatározzák a törtlineáris leképzést:

$$\frac{W - W_1}{W - W_2} : \frac{W_3 - W_1}{W_3 - W_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Ezt összetett nemharmónikus leképzésnek nevezzük.

4. A törtlineáris függvény inverze törtlineáris lesz.

Tételezzük fel, hogy $\mathrm{W} = \dfrac{az + b}{cz + d} \to W(cz + d) = az + b \to$

$$\to (Wc - a)z + Wd = b \to z = \frac{b - Wd}{Wc - a}.$$

5. A törtlineáris leképzést meglehet adni néhány leképzés szuperpozíciójaként

Tételezzük fel, hogy $W = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d}$

$$= \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}.$$

a) $W_1 = cz + d$ – lineáris leképzés;

b) $W_2 = \frac{1}{W_1}$ – inverz leképzés;

c) $W_3 = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right) W_2$ – lineáris leképzés.

A $W = \frac{1}{z}$ függvényt inverz leképezésnek nevezzük.

6. A kör és az egyenes a törtlineáris leképzés után kör és egyenes marad.

Példaként megmutatjuk ezt az inverz függvényen.

$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ – a kör egyenlete.

$W = \frac{1}{z}$, a 4) tulajdonságból $\rightarrow z = \frac{1}{W}$.

$$\begin{cases} z = x + iy \\ W = u + iv \end{cases} \rightarrow x + iy = \frac{1}{u+iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = -\dfrac{v}{u^2+v^2} \end{cases}.$$

A kör egyenletébe behelyettesítve az x és az y:

$$A\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right) + B\frac{u}{u^2+v^2} - C\frac{v}{u^2+v^2} + D = 0$$

$$\rightarrow$$

$\rightarrow A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0.$

Vagyis a kör kör marad.

7. A körhöz viszonyított szimmetrikus pontok szimmetrikusok lesznek a törtlineáris leképzés után.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy a z_1 és z_2 szimmetrikus pontok a γ körhöz viszonyítva. Akkor e pontokon keresztül fellehet építeni egy ortogonális C kört a γ körhöz. A törtlineáris leképzés után a γ kör Γ kör lesz és a Γ kör C' kör lesz. A törtlineáris függvény inverze törtlineáris lesz, emiatt a C' kör képe C lesz. A z_1 és z_2 szimmetrikus pontok a konform leképezés után megőrzik a szögek nagyságát, ezért $\angle 90° \rightarrow \angle 90°$, akkor pedig a Γ és C' körök ortogonálisok lesznek és emiatt az W_1 és W_2 pontok szimmetrikusok.

8. Tételezzük fel, hogy a $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ – különböző fixált pontok. Akkor létezik olyan kör, amely áthalad a z_3 ponton és amelyhez képest a z_1 és z_2 pontok szimmetrikusak.

9. Hogyha $ad - bc > 0$, akkor a törtlineáris függvény leképezi a felső félsíkot $Imz > 0$, a felső félsíkba $Imz > 0$. Hogyha $ad - bc < 0$, akkor a törtlineáris függvény leképezi a felső félsíkot $Imz > 0$, az alsó félsíkba $Imz < 0$.

10. A felső félsík $Imz \geq 0$ leképződik a $|W| < 1$ körbe a törtlineáris függvény segítségével.

$$W = e^{i\varphi}\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}\ , \quad \varphi = \arg z_0.$$

11. A $W = e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{1-z\overline{z_0}}$ törtlineáris leképzés segítségével a $|z| < 1$ kör átalakul $|W| < 1$ körbe.

12. Tételezzük fel, hogy $z_1, z_2, z_3 \in \gamma$ és $W_1, W_2, W_3 \in \gamma$ különböző fixált pontok. Akkor létezik egyetlen olyan törtlineáris leképzés, amely átalakítja a z_i pontokat a W_i pontokba $i = 1,2,3$ és a kör belseje átalakul a kör belsejébe vagy ilyen leképezés nem létezik. Abban az esetben ha adva van két fixált pont z_1 és z_2 és a harmadik tetszőleges, akkor végtelen számú leképzés létezhet.

III. Zsukovszkij függvény

A $W = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ függvényt Zsukovszkij függvénynek nevezik.

1. Ellenőrizzük a konformságot.

$$W' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \neq 0, \quad z \neq \pm 1.$$

Vagyis a Zsukovszkij függvény konform a komlex számsíkon, kivétel a $z \neq \pm 1$ pont.

2. Ellenőrizzük az egyrétegűségét.

Tételezzük fel, hogy $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 \neq z_2$.

$$W_1 - W_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) - \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = \frac{1}{2}\left(z_1 - z_2 + \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right)\right) \neq 0, \qquad \text{ha a } z_1 z_2 \neq 0.$$

Vagyis a Zsukovszkij függvény egyrétegű a kör belsejébe és külsejébe.

Tételezzük fel, hogy $\begin{cases} |z| < 1 & |z_1|\,|z_2| < 1 \\ |z| > 1 & |z_1|\,|z_2| > 1 \end{cases}$.

3. Tételezzük fel, hogy $|z| = r,\ \arg z = \varphi$. Akkor $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

$$W = u + iv = \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$$

$$\to \begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi \\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi \end{cases} \qquad (*)$$

Ez a kapcsolat az (u, v) és (r, φ) koordináták között.

a) Rögzítsük a $0 < r < 1$, akkor $0 < \varphi < 2\pi$ és a kört az óramutató mozgásával ellentétes irányba kerüljük meg. A $(*)$ képletből kifolyólag

$$\begin{cases} \dfrac{u}{\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)} = \cos\varphi \\ \dfrac{v}{\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)} = \sin\varphi \end{cases}$$

Négyzetre emeljük az első és a második egyenlőséget és összeadjuk.

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right)^2} = 1.$$

Vagyis a kör átalakul elipszisbe $a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ és $b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$ féltengelyekkel.

$$c^2 = a^2 - b^2 = \left(\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right)^2 = 1 \to c^2 = 1 \to c = \pm 1.$$

$$F_1 = -1, \qquad F_2 = 1.$$

Nagyobb r –nek megfelel kisebb ellipszis és kisebb r – nek nagyobb. Ha $r = 0$, akkor az ellipszis terjedni fog. Hogyha $r = 1 \to$

$v = 0, u = \cos\varphi$. Akkor a $[-1; 1]$ szakaszt kétszer kerüljük meg. Ebben az esetben a felső félkör leképződik az alsó félsíkba a $[-1; 1]$ szakasz kimetszésével.

b) Rögzítsük a $\varphi = \varphi_0$. Akkor a $(*)$ képletből kifolyólag

$$\begin{cases} \dfrac{u}{\cos\varphi_0} = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right) \\ \dfrac{v}{\sin\varphi_0} = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right) \end{cases}.$$

Négyzetre emeljük mind a két egyenletet és kivonjuk az elsőből a másodikat

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = 1.$$

Vagyis egy hiperbolát kapunk $a = |\cos\varphi_0|, b = |\sin\varphi_0|$ féltengelyekkel.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 \ \rightarrow c = \pm 1.$$

Hogyha $\varphi = 0 \ \rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \\ v = 0 \end{cases}$ és a $[-1; 1]$ szakaszt kétszer kerüljük meg.

4. A Zsukovszkij függvény megadható két leképzés segítségével: inverz és lineáris.

IV. Exponenciális függvény

$W = e^z$ függvényt exponenciális függvénynek nevezik.

1. Ellenőrizzük a konformságot.

$W' = e^z \neq 0$. Vagyis az exponenciális leképzés konform a $\mathbb{C}$ minden pontjában.

2. A $W = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ leképezés egyrétegű az $\alpha < Imz < \alpha + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ sávban.

3. Az exponenciális leképzés átalakítja a $0 < Imz < 2\pi$ sávot az egész komplex síkba a pozitív tengely kimetszésével. A $-\pi < Imz < \pi$ sávot pedig az egész komplex síkba a negatív tengely kimetszésével. A $0 < Imz < \pi$ sávot a felső komplex síkba.

4. Átmeneti képletek

$$W = u + iv = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$
$$\rightarrow \begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}.$$

A $0 < Imz < 2\pi$ sávban rögzítünk egy $x = x_0$ pontot. Akkor

$$\begin{cases} \dfrac{u}{e^{x_0}} = \cos y \\ \dfrac{v}{e^{x_0}} = \sin y \end{cases} \rightarrow \frac{u^2}{e^{2x_0}} + \frac{v^2}{e^{2x_0}} = 1 \rightarrow u^2 + v^2 = e^{2x_0}.$$

Hogyha $x = c$, akkor az egyenesek családja átalakul a körök családjába.

A $0 < Imz < 2\pi$ sávban rögzítünk egy $y = y_0$ pontot. Akkor

$$\begin{cases} u = e^x \cos y_0 \\ v = e^x \sin y_0 \end{cases} \rightarrow \frac{v}{u} = tgy_0 \rightarrow y_0 = arctg\,\frac{v}{u}.$$

Vagyis az $y = y_0$ egyenesek átalakulnak hajlásszögekké.

A $0 < Imz < 2\pi$ sávban rögzítünk két pontot $x = x_0,\ x = x_1,$ $x_0 < x_1$ $y = y_0,\ y = y_1,\ y_0 < y_1.$

IV. Trigonometriai függvények

$$W = \sin z$$

1. Ellenőrizzük a konformságot.

$$W' = \cos z \neq 0, \qquad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n\epsilon\mathbb{Z}.$$

Vagyis a leképzés konform a $\mathbb{C}$ sík minden pontjában, kivéve a $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$ pontokat.

2. Ellenőrizzük a egyrétegűséget.

$$W_1 - W_2 = \sin z_1 - \sin z_2 = 2 \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \neq 0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{z_1 - z_2}{2} \neq \pi n \\ \dfrac{z_1 + z_2}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 \neq 2\pi n \\ z_1 + z_2 \neq \pi + 2\pi n \end{cases}$$

Vagyis a leképzés egyrétegű a $z_1 - z_2 = 2\pi n$ és $z_1 + z_2 = \pi + 2\pi n$ pontok kivételével. Mivel ilyen pontok nincsenek a $-\frac{\pi}{2} < Rez < \frac{\pi}{2}$ sávban, ezért e sávban a leképzés egyrétegű.

A $W = \sin z$ leképzés a $-\frac{\pi}{2} < Rez < \frac{\pi}{2}$ sávot átalakítja az egész komplex síkba a $[-\infty; -1]$ és $[1; +\infty]$ tengelyek kimetszésével.

3. Átmeneti képletek

$W = u + iv = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy =$

$= \sin x \, chy + i \cos x \, shy \; \rightarrow \begin{cases} u = \sin x \, chy \\ v = \cos x \, shy \end{cases}.$

A $-\frac{\pi}{2} < Rez < \frac{\pi}{2}$ sávban rögzítünk $x = x_0$ pontot

$$\begin{cases} \dfrac{u}{\sin x_0} = chy \\ \dfrac{v}{\cos x_0} = shy \end{cases} \rightarrow \frac{u^2}{\sin^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1.$$

Vagyis az egyenesek átalakulnak hiperbolákba.

Hogyha rögzítünk egy $y = y_0$ pontot, akkor az egyenesek átalakulnak elipszisbe.

$$\frac{u^2}{\mathrm{ch}^2\, y_0} - \frac{v^2}{\mathrm{sh}^2\, y_0} = 1.$$

4. A $W = \sin z$ függvényt meglehet adni néhány alapvető leképzés segítségével

$W = \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{iz}}{i} + \dfrac{i}{e^{iz}}\right)$

a) $W_1 = iz,$

b) $W_2 = e^{W_1},$

c) $W_3 = \frac{W_2}{i}$ − lineáris;

d) $W_4 = \frac{1}{2}\left(W_3 + \frac{1}{W_3}\right)$ − Zsukovszkij.

Az 1 – 4. tulajdonságok igazak lesznek a $\cos z$ függvényre is, mivel $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

<u>Példák:</u>

I.Találja meg azt a lineáris leképzést, amely leképzi az i pontot a $-i$ pontba, hogyha $1 + 2i$ pont a leképzés fix pontja.

$z_1 = 1 + 2i \qquad W_1 = 1 + 2i \qquad W = az + b$

$z_2 = i \qquad W_2 = -i$

$\begin{cases} W_1 = az_1 + b \\ W_2 = az_2 + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2i = a(1 + 2i) + b \\ -i = ai + b \end{cases} \rightarrow$

$1 + 3i = a + ai \; \rightarrow \; a = \dfrac{1 + 3i}{1 + i} = 2 + i$

$-i = 2i - 1 + b \ \rightarrow \ b = -3i + 1$

$W = (2 + i)z + (-3i + 1).$

II.Mi a félsíkok képe $\{Rez > 0\}$, $\{Imz > 0\}$ ha $W = (1 - i)z + i.$

1) $W_1 = |1 - i|z = \sqrt{2}z$

$W_2 = W_1 \cdot e^{i\varphi}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$

$W = W_2 + i$

2) $u + iv = (1 - i)(x + iy) + i \rightarrow \dfrac{u + iv - i}{1 - i} = x + iy \rightarrow$

$$\frac{(u + iv - 1)(1 + i)}{2} = x + iy \ \rightarrow \ \begin{cases} x = \dfrac{u - v + 1}{2} \\ y = \dfrac{v + u - 1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} u - v + 1 > 0 \\ v + u - 1 > 0 \end{matrix}.$$

III.Melyik az a lineáris leképzés, amely a $|z + 1 - i| < 3$ kört leképzi a $|W - z| < 1$ körbe és a függőleges sugarat vízszintesbe.

$z_1 = -1 - 2i \qquad W_1 = 1$

$z_2 = -1 + 4i \qquad W_2 = 2.$

$$\begin{cases} 1 = a(-1 - 2i) + b \\ 3 = a(-1 + 4i) + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = -a - 2ai + b \\ 3 = -a + 4ai + b \end{cases} \rightarrow -2 = -6ai \ \rightarrow$$

$$a = \frac{-2}{-6i} = -\frac{i}{3} \ \rightarrow 1 = \frac{i}{3} - \frac{2}{3} + b \ \rightarrow b = \frac{5}{3} - \frac{i}{3}.$$

IV.Melyik az a törtlineáris függvény, amely leképzi a $(-1; i; 1 + i)$ pontot az $(i; \infty, 1)$ pontba.

$$\frac{W - W_1}{W - W_2} : \frac{W_3 - W_1}{W_3 - W_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \ \rightarrow$$

$$\frac{W - i}{W - \infty} : \frac{1 - i}{1 - \infty} = \frac{z + 1}{z - i} : \frac{1 + i - 1}{1 + i - i} \ \rightarrow \ \frac{W - i}{1 - i} = \frac{z + 1}{z - i} : i$$

$$W - i = -i(1 - i)\frac{z + 1}{z - i} \ \rightarrow \ W - i = \frac{(-i - 1)(z + 1)}{z - i} \ \rightarrow$$

$$W = \frac{(-i - 1)(z + 1) + zi + i}{z - i} \ \rightarrow W = \frac{-z - i}{z - i} = -\frac{z + i}{z - i}.$$

V.Képezze le az $Imz > 0$ az $|W| < 1$ úgy, hogy $W(i) = 0$ és $\arg W'(i) = -\frac{\pi}{2}$

$$W = e^{i\varphi}\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}};\quad W(i) = e^{i\varphi}\frac{z - i}{z + i} \to W'(i) = e^{i\varphi}\frac{2i}{(z+1)^2}$$

$$= e^{i\varphi}\frac{2i}{(2i)^2} =$$

$$= -e^{i\varphi}\frac{1}{2}i = -e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{i}{2}.$$

$$W = -e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{z - i}{z + i} = i\frac{z - i}{z + i}.$$

Házi:

I.Adja meg azt a lineáris leképzést, amely az $1 + i, 2 + 4i, 3 + i$ pontokat leképzi az $1, 1 + 4i, 7 + 2i$ pontokba.

II.Mibe képezi le a $W = \frac{1}{z}$ függvény az $x^2 + y^2 = ax$ kört.

III.Adja meg azt a törtlineáris leképzést, amely a $-1, i, 1 + i$ pontot leképzi a $0, 2i, 1 - i$ pontba.

IV.Mibe képzi le $W = \frac{z}{1-z+i}$ függvény a $D = \{z\colon Rez < 1\}$.

Integrálok komplex változós függvényektől

Tételezzük fel, hogy adva van egy szakaszonként sima rektifikálható görbe $\mathcal{L}$, amely A és B pontok között van megadva.

Felosztjuk az $\mathcal{L}$ görbét $z_0, z_1, \dots, z_n$ pontokkal a következőképpen

$$A = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = B.$$

A $[z_{k-1}; z_k]$ szakaszon kiválasztunk egy ξ_k pontot. Egyértelmű, hogy e szakasz hossza $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Jelölése: $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|$.

Akkor felírhatjuk az integrál összegét:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k.$$

Hogyha ilyen összegnek létezik véges határa amikor a max átmérő tart a nullához, akkor ezt a határt a komplex változós függvény integráljának nevezik és jelölése:

$$\int_{\mathcal{L}} f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k.$$

Tételezzük fel, hogy $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k,\ \xi_k = x'_k + iy'_k$.

$$f(\xi_k) = u(x'_k, y'_k) + iv(x'_k, y'_k)$$

Akkor

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\big(u(x'_k, y'_k) + iv(x'_k, y'_k)\big)\,(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\big(u(x'_k, y'_k)\Delta x_k - v(x'_k, y'_k)\Delta y_k$$

$$+ i(v(x'_k, y'_k)\Delta x_k + u(x'_k, y'_k)\Delta y_k)\big).$$

Akkor felírhatjuk az integrálösszeg valós és immaginárius részét

$$Re\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} u(x'_k, y'_k)\Delta x_k - v(x'_k, y'_k)\Delta y_k\,;$$

$$Im\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} v(x'_k, y'_k)\Delta x_k + u(x'_k, y'_k)\Delta y_k.$$

Hogyha az integrál összegének létezik véges határa, akkor létezik határa az integrál valós és immaginárius részének is, sőt

$$\int_{\mathcal{L}} f(z)dz = \int_{\mathcal{L}} udx - vdy + i\int_{\mathcal{L}} vdx + udy$$

Ez a képlet a komplex változós függvény integráljának a kiszámításához. Vagyis a komplex válltozós függvény integrálja átalakul másodfokú görbementi integrállá $(u, -v)$ és (v, u) vektorfüggvényektől.

Komplex változós függvények integráljának a tulajdonságai

1. Tételezzük fel, hogy az $\mathcal{L}$ görbe parametrikus képen van megadva $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, hol $\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \\ y(t) = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Akkor

$$\int_{\mathcal{L}} f(z)dz = \int_{\mathcal{L}} \Big(u\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t) - v\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\psi'(t)\Big)\,dt +$$

$$+i\int_{\mathcal{L}} \Big(v\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t) + u\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\psi'(t)\Big)\,dt.$$

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy $z(t) = x(t) + iy(t)$; $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$. $\alpha \to A,\ \beta \to B,\ \xi_k \to t_k,\ \Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \Delta x(t_k) = \varphi'(\overline{t_k})\Delta\overline{t_k} + o(\Delta\overline{t_k}),\ \Delta y(t_k) = \psi'(\overline{t_k})\Delta\overline{t_k} + o(\Delta\overline{t_k})$. Akkor

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} u\big(\varphi'(\overline{t_k})\Delta\overline{t_k} + o(\Delta\overline{t_k})\big) - v\big(\psi'(\overline{t_k})\Delta\overline{t_k} + o(\Delta\overline{t_k})\big)$$

$$+$$

$$+i\Big(v\big(\varphi'(\overline{t_k})\Delta\overline{t_k} + o(\Delta\overline{t_k})\big) + u\big(\psi'(\overline{t_k})\Delta\overline{t_k} + o(\Delta\overline{t_k})\big)\Big).$$

Hogyha $\max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta\overline{t_k}| \to 0$, akkor megkapjuk a keresett képletet.

2. $\int\limits_{A}^{B} dz = B - A.$

3. $\int\limits_{A}^{B} kf(z)dz = k\int\limits_{A}^{B} f(z)dz.$

4. $\int\limits_{\mathcal{L}} \big(f_1(z) \pm f_2(z)\big)dz = \int\limits_{\mathcal{L}} f_1(z)dz \pm \int\limits_{\mathcal{L}} f_2(z)dz.$

5. Hogyha $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, akkor

$$\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)dz = \int\limits_{\mathcal{L}_1} f(z)dz + \int\limits_{\mathcal{L}_2} f(z)dz.$$

6. $\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)dz = -\int\limits_{\mathcal{L}^-} f(z)dz.$

7. $\left|\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)dz\right| \le \int\limits_{\mathcal{L}} |f(z)||dz|, \qquad |f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}.$

8. Hogyha létezik $f(z)$ függvény, amely analitikus az $\mathcal{L}$ görbe minden pontjában és $\exists M > 0,\ |f(z)| \le M$, akkor

$$\left|\int\limits_{\mathcal{L}} f(z)dz\right| \le Ml, \qquad \text{hol } l = \int\limits_{\mathcal{L}} |dz| - \text{az } \mathcal{L} \text{ hossza.}$$

Példa: Számítsa ki az integrált az $\mathcal{L}$ görbén, hogyha $\mathcal{L}: y = x^2, 0 \le x \le 1, z = 0$ $\int_{\mathcal{L}}(z^2 + z\bar{z})dz$

$f(z) = z^2 + z\bar{z} = (x + iy)^2 + (x + iy)(x - iy) =$

$$= x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 + 2xyi \rightarrow \begin{cases} u = 2x^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

$$= \int_0^1 2x^2 dx - \int_0^1 (2xx^2 2x) dx + i\left(\int_0^1 2xx^2 dx + \int_0^1 2x2x^2 dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 - \frac{4}{5}x^5\Big|_0^1 + i\frac{2}{4}x^4\Big|_0^1 + i\frac{4}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2}i + i$$

$$= -\frac{2}{15} + \frac{3}{2}i.$$

Cauchy tételek

Tétel: Hogyha az $f(z)$ függvény analitikus a G tartományban és folytonos a Jordan görbe minden pontjában, amely teljesen a G $-$ben fekszik, akkor

$$\int_{\mathcal{L}} f(z)dz = 0.$$

Bizonyítás: A másodfokú görbementi integrál számára egy zárt kontúron érvényes a Green képlet:

$$\int_{\mathcal{L}} Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,, \qquad P = u, Q = v$$

akkor

$$\int_{\mathcal{L}} udx - vdy = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy,$$

$$\int_{\mathcal{L}} vdx - udy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.$$

Az $f(z)$ függvény analitikus, ezért érvényes a Cauchy – Riemann feltétel, mégpedig

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}.$$

Vagyis

$$\int_{\mathcal{L}} f(z)dz = 0.$$

Tétel: Hogyha az $f(z)$ függvény analitikus az egy összefüggő G tartományban és folytonos e tartomány határán, akkor

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 0.$$

Tétel: Hogyha az $f(z)$ függvény analitikus az $(m+1)$ összefüggő G tartományban és folytonos e tartomány „bezárásán", akkor

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 0.$$

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy az $f(z)$ függvény analitikus az $(m+1)$ összefüggő G tartományban $G = \Gamma_0 \cup (-\gamma_1) \cup \ldots \cup (-\gamma_m)$. A Γ_0 görbén kiválasztunk egy pontot és egyesítjük a γ_1 bármelyik pontjával, $l_1 -$ el jelöljük e pontok halmazát.

Figyelembe veszünk egy D tartományt

$$D = G \setminus \bigcup_{i=1}^{m} l_i.$$

Akkor a D tartomány egy összefüggő tartomány és ezért helyénvaló a 2.tétel

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} f(z)dz - \sum_{i=1}^{m} \int_{l_i} f(z)dz$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int_{l_i} f(z)dz =$$

$$= \int_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Következmény: Hogyha az $f(z)$ függvény analitikus a G tartományban, G ez egy $\Gamma_0, (-\gamma_1), \ldots, (-\gamma_m)$ zárt kontúrral korlátozott tartomány, akkor

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

Ha két összefüggő tartományunk van akkor

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Cauchy típusú integrálok

Tételezzük fel, hogy az $f(z)$ függvény analitikus a G tartományban és L egy rektifikálható görbe, amely teljesen a $G-$ ben fekszik, akkor $\forall z_0 \in G$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = F(z_0)$$

Ezt nevezzük Cauchy típusú integrálnak.

Tétel: A Cauchy típusú integrál analitikus függvény, méghozzá e függvénynek létezik n −edik deriváltja és

$$F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\,;\; F^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,.$$

Bizonyítás: Matematikai indukció szerint

1) A derivált definíciójából kifolyólag

$$F'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h},$$

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz\,, \qquad F(z_0+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_0-h}dz,$$

$$F(z_0+h)-F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)\left(\frac{1}{z-z_0-h}-\frac{1}{z-z_0}\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{hf(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}dz.$$

Akkor

$$\left|\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0-h)(z-z_0)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{|f(z)||dz|}{|z - z_0 - h||z - z_0|}.$$

Mivel az $f(z)$ függvény analitikus ezért $\exists M > 0,\ \forall z \in G,$ $|f(z)| \leq M.$

Jelöljük: $\rho(z_0, L) = 2d$. Kiválasztjuk a h-t úgy, hogy $|h| < d$. Akkor

$$|z - z_0 - h| \geq |z - z_0| - |h| \geq 2d - d = d.$$

$$\left| F'(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_L |f(z)| \left| \frac{1}{(z - z_0)^2} - \frac{1}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} \right| |dz| \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{2\pi} \int_L \frac{|f(z)||dz|}{|z - z_0 - h||z - z_0|^2} \leq \frac{M|h|}{2\pi d^3} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

2) Tételezzük fel, hogy a Cauchy típusú integrálnak létezik $(n - 1)$ deriváltja,

$$F^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} dz.$$

3) $F^{(n)}(z_0) = \dfrac{F^{(n-1)}(z_0 + h) - F^{(n-1)}(z_0)}{h} =$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i h} \int_L f(z) \left(\frac{1}{(z - z_0 - h)^n} - \frac{1}{(z - z_0)^n} \right) dz \qquad (*)$$

Figyelembe veszünk egy következő $(**)$ integrált

$$\int_0^1 (z - z_0 - ht)^{-n-1} dt = \left. \frac{(z - z_0 - ht)^{-n}}{-n(-h)} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{nh(z - z_0 - ht)^n} - \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

A $(*)$ −ban lévő különbséget behelyettesítjük a $(**)$ −ban lévő különbséggel

$$\frac{F^{(n-1)}(z_0+h)-F^{(n-1)}(z_0)}{h} = \frac{(n)!}{2\pi i h}\int_L \left(f(z) \int_0^1 \frac{dt}{(z-z_0-ht)^{n+1}} \right) dz.$$

$$\left| F^{(n)}(z_0) - \frac{F^{(n-1)}(z_0+h)-F^{(n-1)}(z_0)}{h} \right| =$$

$$= \left| \frac{(n)!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} - \frac{(n)!}{2\pi i}\int_L \left(f(z) \int_0^1 \frac{dt}{(z-z_0-ht)^{n+1}} \right) dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi}\int_L |f(z)| \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{(z-z_0-ht)^{n+1}} - \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \right| |dt| \right) |dz| \leq$$

A $\frac{1}{z-z_0-ht}$ folytonos függvény a $h=0$ pontban, ez pedig azt jelenti, hogy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon), \forall z, |h| < \delta.$

$$\left| \frac{1}{(z-z_0-ht)^{n+1}} - \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \right| < \varepsilon.$$

Az $f(z)$ függvény folytonos, ezért $\exists M > 0, |f(z)| \leq M.$

$$\leq \frac{n!\, M\varepsilon L}{2\pi} \to 0.$$

Vagyis

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Cauchy integrál folytonos függvény és integrált, ezért analitikus is.

Cauchy integrál képlete

Tétel: Tételezzük fel, hogy az $f(z)$ függvény analitikus a D tartományban és folytonos e tartomány határán, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0), \qquad \forall z_0 \in G.$$

Bizonyítás: Figyelembe veszünk, egy γ kört $\gamma: |z-z_0| = d$ és $K: |z-z_0| < d$ körlapot. Akkor $D = G/K$ és a 2. Cauchy tételből kifolyólag

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0 \rightarrow$$

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Tételezzük fel, hogy adva van $|z| = R$ kör és figyelembe veszünk

$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases} \qquad (*)$$

Továbbá tételezzük fel, hogy $z - z_0 = Re^{i\varphi}$, $|z-z_0| = R$, $dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$, $0 < \varphi < 2\pi$. Akkor

$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = Ri \int_0^{2\pi} R^n e^{in\varphi} d\varphi = R^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} d\varphi\,;$$

1) Legyen $n \neq -1$

$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = R^{n+1} i \frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\varphi} \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{(n+1)} (\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n - \cos 0 - i \sin 0) = 0.$$

1) Legyen $n = -1$

$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = R^{-1+1} i \int_0^{2\pi} e^{-0\varphi} d\varphi = 2\pi i.$$

Akkor

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz \right|$$

$$\leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z-z_0|} |dz| = \frac{2\pi d\varepsilon}{2\pi d} = \varepsilon.$$

Mivel az $f(z)$ függvény folytonos, ezért $\forall \varepsilon > 0$, $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Az általánosított Cauchy integrál képlete és tétele

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

A Cauchy-féle integrál analitikus függvény és e függvénynek létezik n −edik deriváltja, ezért

$$\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}, z_0 \in L \\ 0, \qquad z_0 \notin L \end{cases}$$

− Cauchy általánosított képlete.

Következmény a Cauchy integrál tételéből

Liouville tétel: Hogyha az $f(z)$ függvény egész a bezárt G tartományban és e függvénynek korlátozott a modulusa, $\exists M > 0$, $\forall z \in G$, $|f(z)| \leq M$, akkor e függvény azonos konstanssal.

Definíció: Az $f(z)$ függvényt egésznek nevezzük, hogyha e függvény analitikus.

Bizonyítás: Figyelembe veszünk egy körlapot $|z| < R, \forall z \in G$.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \rightarrow |f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^2} |dz| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M 2\pi R}{|R - z_0|^2} = \frac{MR}{|R - z_0|^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Vagyis $|f'(z_0)| = 0 \rightarrow f(z_0) = C = const.$

Példák:

I.Számítsa ki:

1) $\int_L |z|\bar{z}\, dz$, hol L a $|z| = 1$ kör része $0 \leq \arg z \leq \pi$, a z

$= 1$ ponttól kezdve.

$z = e^{it}, \qquad 0 \leq t \leq \pi,$

$dz = ie^{it}dt; \quad |z| = 1, \quad \bar{z} = e^{-it}$

$$\int_L |z|\bar{z}\, dz = \int_0^\pi e^{-it} ie^{it} dt = i\pi.$$

2) $\int\limits_L (i\arg z - 1)dz\,, \quad L\colon\ y = x^2, \qquad 0 \le x \le 1$

$$\begin{cases} x = x & z = x + iy = x + ix^2 \\ y = x^2 & \arg z = arctg\dfrac{y}{x} = arctgx \end{cases} \qquad dz = (1 + 2ix)dx$$

$$\int\limits_L (i\arg z - 1)dz = \int\limits_0^1 (iarctgx - 1)(1 + 2ix)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (iarctgx - 1 - 2xarctgx - 2ix)d\,x =$$

$$= -x\left|_0^1\right. - ix^2\left|_0^1\right. + \begin{vmatrix} u = arctgx & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1 + x^2} & v = x \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} u = arctgx & dv = -2xdx \\ du = \dfrac{dx}{1 + x^2} & v = -x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 - i + xarctgx\left|_0^1\right. - \int\limits_0^1 \frac{xdx}{1 + x^2} + x^2arctgx\left|_0^1\right. + \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1 + x^2} =$$

$$= -1 - i + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\left|_0^1\right. - \frac{\pi}{4} + \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} =$$

$$= -1 - i - \frac{1}{2}\ln 2 + 1 - arctgx\left|_0^1\right. = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}ln2 - i.$$

3) $\int\limits_L \dfrac{zdz}{\bar{z}}, \qquad L\colon\ |z| = 1;\ \ |z| = 2;\ \ 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}.$

$AD\colon\ y = 0, \qquad x\epsilon[1;2], \qquad \int\limits_{AD} \dfrac{zdz}{\bar{z}} = \int\limits_1^2 \dfrac{xdx}{x} = 1$

$DC\colon\ z = 2e^{it}, \qquad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2e^{it} \cdot 2ie^{it}dt}{2e^{-it}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2ie^{3it}dt = \frac{2}{3}e^{3it}\left|_0^{\frac{\pi}{2}}\right. = \frac{2}{3}e^{\frac{3\pi}{2}i} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}i - \frac{2}{3}.$$

CB: $x = 0$; $2 \le y \le 1$, $\displaystyle\int_2^1 \frac{iyidy}{-iy} = i.$

BA: $z = e^{it}$, $\dfrac{\pi}{2} \le t \le 0$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{ie^{it}e^{it}dt}{e^{-it}} = i\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{3it}\,dt = \frac{1}{3}\left(1 - e^{\frac{3\pi}{2}i}\right) = \frac{1}{3}(1+i).$$

II.Számítsa ki

$$\int_C \frac{zdz}{z^4-1}, \qquad C = \{|z-i| = 1\}.$$

$z = \pm 1;\ \pm i$ a $|z-i| < 1$ csak a $z_0 = i$ tartozik.

$$\int_C \frac{zdz}{(z^2-1)(z-i)(z+i)} = 2\pi i \frac{z}{(z^2-1)(z+i)}\bigg|_{z=i} = -\frac{\pi i}{2}.$$

Házi feladat:

1) $\displaystyle\int_L (Imz^2 + Rez)dz, L -$ négyszög $1; i, -1; -i$ csúccsal.

2) $\displaystyle\int_C \frac{(z+i)\sin^2 z}{z^2+9}dz, \quad C = \{z\text{: } |z+3| + |z-3| = 10\}.$

3) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, hogyha az a pont a $C-$ be tartozik.

4) $\displaystyle\int_L \frac{zdz}{|z|}$, L: $|z| = 1$; $0 \le \arg z < \pi$; $y = 0$; $1 \le \text{Re} z \le z$.

5) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{chz}{(z+1)^3(z-1)}dz.$

Az algebra alaptétele

Tétel: Az n fokú polinomnak létezik legalább egy gyöke.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \qquad a_k \in \mathbb{C}, \qquad k = \overline{0,n}$$

n fokú polinom. Tételezzük fel, hogy az n fokú polinomnak nem létezik gyöke $n \ge 1$. Akkor $P_n(z) \ne 0$.

Figyelembe veszünk $f(z)=\frac{1}{P_n(z)}$ függvényt. Mivel $P_n(z)$ folytonos függvény, ezért $f(z)$ is folytonos függvény és

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}$$

$$= \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^n\left(\frac{a_0}{z^n}+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\cdots+a_n\right)} = 0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0,\ |z|>\delta, |f(z)|<\varepsilon.$ Mivel a kör bezárt halmaz és a függvény e körben véges, ezért $\exists k>0, |f(z)|\le k,$ vagy $P_n(z)=\frac{1}{k}\neq 0, k\neq 0.$ Ez lehetséges akkor és csakis akkor, ha $n=0$, de a tétel feltevése szerint $n\ge 1.$ Ez pedig azt jelenti, hogy a feltételezés a bizonyítás elején téves.

Példa: A Cauchy integrál segítségével számítsa ki a következő integrálokat:

1) $$\int\limits_{|z-2i|=2}\frac{ze^{2z}}{z-\pi i}dz = 2\pi i(ze^{2z})|_{z=\pi i} = 2\pi i\pi i e^{2\pi i} =$$

$$= -2\pi^2(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = -2\pi^2;$$

2) $$\int\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z}{(z-i)^{10}}dz = \frac{2\pi i}{9!}(e^z)^{(9)}\Big|_{z=i} = \frac{2\pi i}{9!}e^i$$

$$= \frac{2\pi i}{9!}(\cos 1 + i\sin 1);$$

3) $$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^3 shz}{(z-1)^4}dz = \frac{2\pi i(z^3shz)'''}{3!}\Bigg|_{z=1} =$$

$$(z^3shz)''' = (3z^2shz+z^3chz)''$$

$$= (6zshz+3z^2chz+3z^2chz+z^3shz)' =$$

$$= 6shz+6zchz+12zchz+6z^2shz+3z^2shz+z^3chz =$$

$$= 6shz+18zchz+9z^2shz+z^3chz.$$

$$= \frac{\pi i}{3}(6sh1+18ch1+9sh1+ch1) = \frac{\pi i}{3}(15sh1+19ch1);$$

4) $$\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z-1}{z(z-i)}dz = \int\limits_{L_1}\frac{\frac{e^z-1}{z}}{z-i}dz + \int\limits_{L_2}\frac{\frac{e^z-1}{z-i}}{z}dz =$$

$$= 2\pi i \frac{e^z - 1}{z}\bigg|_{z=i} + 2\pi i \frac{e^z - 1}{z - i}\bigg|_{z=0} = 2\pi i \left(\frac{e^i - 1}{i} + 0\right)$$
$$= 2\pi(e^i - 1);$$
5) $$\int_C \frac{(z+i)\sin^2 z}{z^2 + 9} dz = \ |C = \{z:\ |z+3| - |z-3| = 10\}| =$$
$$= \int_{L_1} \frac{\frac{(z+i)\sin^2 z}{z+3i}}{z-3i} dz + \int_{L_2} \frac{\frac{(z+i)\sin^2 z}{z-3i}}{z+3i} dz =$$
$$= 2\pi i \left(\frac{(z+i)\sin^2 z}{z+3i}\bigg|_{z=3i} + \frac{(z+i)\sin^2 z}{z-3i}\bigg|_{z=-3i}\right) = -2\pi i sh^2 3.$$

A komplex változós primitív függvény

Az $F(z)$ függvényt primitív függvénynek nevezik, hogyha $F'(z) = f(z)$.

Megjegyzés: Hogyha az $F(z)$ függvény primitívje az $f(z)$ függvénynek, akkor az $F(z)$ függvény analitikus és ha az $f(z)$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor az $f(z)$ függvény analitikus.

A primitív függvény tulajdonságai

1) Hogyha $F(z)$ az $f(z)$ primitív függvénye, akkor bármelyik L görbe számára, amely egyesíti az A és B pontokat
$$\int_L f(z)dz = F(z)|_A^B = F(B) - F(A).$$
Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy az L görbe parametrikus formában van megadva, $z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$. Akkor
$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)dt.$$
Tételezzük fel, hogy $\Phi(t)$ az $f\big(z(t)\big)z'(t)$ függvény primitív függvénye és $F(z)$ az $f(z)$ függvény primitív függvénye. Megmutatjuk, hogy $F(z) = \Phi(t)$.
$$\Phi'(t) = F'(t) = f\big(z(t)\big)z'(t).$$

Mivel az $\int_L f(z)dz$ integrál nem függ az integrálás útjától, ezért

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz - \int_{L_2} f(z)dz = 0 \;\rightarrow\; \int_{L_1} f(z)dz$$
$$= \int_{L_2} f(z)dz \;\rightarrow$$
$$\rightarrow \int_L f(z)dz = 0.$$

Ebből következik, hogy $f(z)$ analitikus, vagyis létezik $F(z)$ primitív függvény, melyre

$$\int_A^B f(z)dz = F(B) - F(A).$$

2) Hogyha $F(z)$ primitív függvénye az $f(z)$ függvénynek és $F_1(z)$ egy másik primitív függvénye az $f(z)$ függvénynek, akkor $F(z) = F_1(z) + C$.

Bizonyítás: Tételezzük fel, hogy $F(z)$ és $F_1(z)$ az $f(z)$ ptórimitív függvényei, akkora definíció szerint $F'(z) = F_1'(z) = f(z)$. Figyelembe veszünk

$$\psi(z) = F(z) - F_1(z) \;\rightarrow\; \psi'(z) = F'(z) - F_1'(z) = 0.$$

Tételezzük fel, hogy z_0 fix pont, z_1 tetszőleges pont, akkor

$$0 = \int_{z_0}^{z_1} 0dz = \int_{z_0}^{z_1} \psi'(z)dz = \psi(z_0) - \psi(z_1) = C \;\rightarrow\; F(z)$$
$$= F_1(z) + C.$$

A primitív függvény létezésének a feltételei

Tétel: Tételezzük fel, hogy az $f(z)$ függvény folytonos egy összefüggő G tartományban. Ahhoz, hogy az $f(z)$ függvénynek létezzen primitív függvénye a G tartományban szükséges és elegendő, hogy bármelyik rektifikálható Jordan götbe mentén

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

Bizonyítás:

Szükséges feltétel: Tételezzük fel, hogy az $f(z)$ függvény folytonos és az $F(z)$ függvény a primitív függvénye, ebből következik, hogy az $f(z)$ függvény analitikus. Akkor az 1. Cauchy tételből kifolyólag

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

Elégséges feltétel: Tételezzük fel, hogy

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

Megmutatjuk, hogy az $f(z)$ függvénynek létezik primitív függvénye $F(z)$. Figyelembe veszünk egy következő integrált

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z).$$

Az L menti integrál nem függ a görbétől, hanem függ a pontoktól, amelyek egyesítik e görbét. Növeljük a z-t Δz-vel, akkor

$$F(z+\Delta z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)dz.$$

Figyelembe vesszük, hogy

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)dz - \int_{z_0}^{z} f(z)dz =$$

$$= \int_{z_0}^{z} f(z)dz + \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz - \int_{z_0}^{z} f(z)dz = \int_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt\,, \qquad t \in \mathbb{C}.$$

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt - \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dt\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z} |f(t) - f(z)||dt| <$$

Mivel az $f(z)$ folytonos, ezért a definícióból kifolyólag $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall z \in G,\ |\Delta z| < \delta, |f(t) - f(z)| < \varepsilon$.

$$< \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \int_{z}^{z+\Delta z} |dt| = \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| = \varepsilon.$$

Tétel: Tételezzük fel, hogy az $f(z)$ függvény folytonos a K körben. Ahhoz, hogy az $f(z)$ függvénynek létezzen primitív függvénye a K körben szükséges és elegendő, hogy bármelyik háromszög mentén a K körből

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0.$$

Bizonyítás:
Szükséges feltétel: Ugyanúgy, mint az 1. tételnél.
Elégséges feltétel: Ugyanúgy, mint az 1. tételnél

$$\int_{z,z_0,z+\Delta z} f(z)dz = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz, \qquad F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)dz.$$

Összefüggés az analitikusság és a primitív függvények létezése között. Morera és Hurs tételek

Tétel: Ahhoz, hogy a folytonos $f(z)$ függvénynek létezzen primitív függvénye szükséges és elegendő, hogy e függvény analitikus legyen.

Bizonyítás: Az $f(z)$ függvény folytonos és analitikus, akkor a Cauchy tételből

$$\int_{L} f(z)dz = 0,$$

és az 1.tételből az $f(z)$ függvénynek létezik primitív függvénye.

Tétel: Hogyha az $f(z)$ függvény folytonos a G tartományban, akkor ahhoz, hogy e függvénynek létezzen primitív függvénye szükséges és elegendő, hogy az $f(z)$ függvény analitikus legyen a G tartományban.

Tétel: Tételezzük fel, hogy az $f(z)$ függvény folytonos az egy összefüggő G tartományban és bármely rektifikálható görbe mentén

$$\int_{L} f(z)dz = 0,$$

akkor az $f(z)$ függvény analitikus.
Ez a tétel a Cauchy tétel fordítottja.
Tétel: Hogyha az $f(z)$ függvény folytonos a K körben és bármelyik háromszög számára a K $-$ból

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0,$$

akkor az $f(z)$ függvény analitikus.
Bizonyítás: Az előző téma 2. tételéből kifolyólag, ha $f(z)$-nek létezik primitjv függvénye, akkor $f(z)$ analitikus.
Tétel: Hogyha az $f(z)$ függvény analitikus az egy összefüggő G tartományban, de egy szakasz pontjain nem, akkor az $f(z)$ függvény analitikus a szakasz pontjaiban is.
Bizonyítás: Figyelembe veszünk két esetet:
I. Tételezzük fel, hogy a háromszögnek és a szakasznak nincsenek közös pontjaik. Bármelyik háromszög mentén a K $-$ból

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0,$$

ebből következik, hogy az $f(z)$ függvény analitikus a G tartományban, ezért a szakasz pontjaiban is.
II. Tételezzük fel, hogy a háromszögnek és a szakasznak van közös pontja.

$$\int_{z_1z_2} f(z)dz = \int_{z_2z_1} f(z)dz \ \rightarrow \int_{z_1z_2} f(z)dz - \int_{z_2z_1} f(z)dz = 0;$$

$$\int_{L} f(z)dz = \int_{\Delta} f(z)dz + \int_{z_1z_2} f(z)dz - \int_{z_2z_1} f(z)dz = \int_{\Delta} f(z)dz.$$

Az $f(z)$ függvény folytonos az L_1 és L_2 görbe minden pontjában. A szakasz véges halmaz, ezért lefedhető véges számú körökkel. Minden ilyen körben

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0.$$

Ebből kifolyólag az $f(z)$ függvény analitikus a szakasz minden pontjában.
Hurs tétel: Hogyha az $f(z)$ függvény monogen és folytonos a G tartomány minden pontjában, akkor e függvény analitikus.

Bizonyítás: Bekell bizonyítani, hogy

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0.$$

Feltételezzük az ellenkezőjét,

$$\left|\int_{\Delta} f(z)dz\right| = M > 0.$$

Figyelembe veszünk egy háromszöget, amelynek l a hossza és felosszuk a háromszöget a háromszög középvonalával. Jelölése: $\Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}, \Delta_3^{(1)}, \Delta_4^{(1)}$.

Akkor legalább egyik háromszög számára

$$\left|\int_{\Delta_i^{(1)}} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4}, \quad i = \overline{1,4}.$$

Jelölése: $\Delta^{(1)}$. A $\Delta^{(1)}$-t ismét felosztjuk a háromszög középvonalával. Jelölése: $\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_3^{(2)}, \Delta_4^{(2)}$. A háromszög hossza $\frac{l}{2^2}$. Akkor legalább egyik háromszög számára

$$\left|\int_{\Delta_i^{(2)}} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4^2}.$$

Jelölése: $\Delta^{(2)}$. Ezt a műveletet ismételjük n −szer, $\forall n \in N$

$$\left|\int_{\Delta_i^{(n)}} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4^n},$$

méghozzá $\Delta^{(n)} \subset \Delta^{(n-1)}$. Ebből kifolyólag a háromszögek összehúzódnak a z_0 pontba. A tétel feltételezése szerint $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall z \in G$, $|z - z_0| < \delta$, $\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$.

Tételezzük fel most, hogy $\forall N$ számára $\Delta^{(N)} \subset \Delta^{(N-1)}$ és $\delta = \frac{l}{2^N}$

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

Az $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ függvény egész, ezért a Cauchy tételből kifolyólag

$$\left|\int_{\Delta}\big(f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)\big)dz\right| = 0.$$

Akkor

$$\left|\int_{\Delta^N} f(z)dz\right| = \left|\int_{\Delta^N}\big(f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)\big)dz\right|$$

$$\leq \int_{\Delta^N} \varepsilon|z-z_0||dz| =$$

$$= \int_{\Delta^N} \varepsilon\frac{l}{2^N}|dz| = \frac{l\varepsilon l}{2^N 2^N}.$$

Másrészt pedig

$$\left|\int_{\Delta^N} f(z)dz\right| \leq \frac{l^2\varepsilon}{4^N} \to M = 0.$$

Vagyis a mi feltételezésünk téves és az $f(z)$ függvény analitikus.

Függvénysorok. Egyenletesen konvergens függvénysorok tulajdonságai

Legyen megadva

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (1)$$

függvénysor. Hogyha z fixált, akkor ez egy egyszerű számsor, ha a z változó, akkor az (1) sort függvénysornak nevezik. A z értékhalmazát, amelyben az (1) sor konvergens, a konvergensség halmazának nevezzük.

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

az (1) sor részösszegének nevezzük.

Hogyha

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z),$$

akkor az $S(z)$-t a sor összegének nevezzük.

Tétel: Ahhoz, hogy az (1) sor egyenletesen konvergens legyen szükséges és elegendő, hogy

$$\sup_z |S_n(z) - S(z)| \to \infty.$$

Weierstrass tétel: Hogyha $\forall z \in G,\ \forall n \geq 1,\ |f_n(z)| \leq C_n$ és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n$$

sor konvergens, akkor az (1) sor egyenletesen konvergens.

Tulajdonságok:

1. Hogyha a függvénysor elemei folytonos függvények a G tartományban és a függvénysor egyenletesen konvergens, akkor az összege folytonos függvény.

2. Hogyha a sor elemei folytonosak a G tartományban, a sor egyenletesen konvergens, akkor bármelyik rektifikálható L görbe számára, amely együtt a belsőségével a G-be tartozik, igaz, hogy

$$\int_L f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z)dz.$$

3. Hogyha

a) a sor elemei folytonos függvények a G tartományban,

b) a sor elemei analitikus függvények,

c) a sor egyenletesen konvergens,

akkor a sor összege analitikus függvény, méghozzá $S_n^{(k)}(z_0) \rightrightarrows S^{(k)}(z_0)$.

Exponenciális sorok

Definíció: A következő függvénysort exponenciális sornak nevezik

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n. \qquad (1)$$

Hogyha $z - z_0$ behelyettesítjük z-vel, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n. \qquad (1')$$

Abel lemma: Hogyha az $(1')$ sor konvergens a z_1 pontban, akkor ez a sor abszolút konvergens $\forall z,\ |z| \leq |z_1|$.

Abel lemma: Hogyha az $(1')$ sor divergens a z_2 pontban, akkor ez a sor divergens $\forall z,\ |z| > |z_2|$.

Cauchy-Hadamard tétel: Legyen

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|} \tag{2}$$

$$R = \begin{cases} 0, & \rho = \infty \\ \dfrac{1}{\rho}, & 0 < \rho < \infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{cases} \tag{3}$$

1. Hogyha $R = 0$, akkor az $(1')$ sor konvergens a $z = 0$ pontban.
2. Hogyha $R = \frac{1}{\rho}$, akkor az $(1')$ sor konvergens $\forall z,\ |z| < R$ és divergens $\forall z,\ |z| > R$.
3. Hogyha $R = \infty$, akkor az $(1')$ sor konvergens $\forall z \in \mathbb{C}$.

Az R számot az exponenciális sor konvergens sugarának nevezik.
A $(-R; R)$ szakaszt a konvergensség szakaszának nevezik.
Tulajdonságok:
1. Az exponenciális sor egyenletesen konvergens a konvergensség körében.
2. Az exponenciális sor összege folytonos függvény a konvergensség körében.
3. Az exponenciális sort lehet tagonként integrálni bármely rektifikálható görbe mentén, amely együtt a belsőségével a G-ben fekszik.
4. Az $(1')$ sor összege analitikus függvény.

Tétel (Az $(1')$ sor koeficienseinek kiszámításáról): Legyen $S(z)$ az $(1')$ sor összege $\forall z,\ |z - z_0| = d < \rho$, akkor az $(1')$ sor koeficienseit a következőképpen lehet kiszámítani

$$C_n = \frac{S^n(z_0)}{n!}.$$

Taylor-sorok

Az

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots$$

Taylor sornak nevezik.

Ha $f(z)$ az exponenciális sor összege

$$f(z) \sim f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Taylor tétele: Hogyha $f(z)$ az exponenciális sor összege és analitikus függvény a G tartományban, akkor az $f(z)$ függvényt fel lehet írni exponenciális sor segítségével a körben és a koeficiensek kiszámíthatóak

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad \gamma_\rho\colon\ |z - z_0| \leq \rho.$$

Méghozzá a C_n koeficienseket egyértelműen lehet meghatározni.

Következmények:

1. Az (1)-es sor az $f(z)$ függvény Taylor sora.
2. a) Hogyha $f(z)$ analitikus a konvergensség körében, akkor $R \geq d$.
   b) Hogyha $f(z)$ analitikus a $\mathbb{C}$ sík minden pontjában, akkor $R = \infty$.
3. **Cauchy-egyenlőtlensége:** Hogyha az $f(z)$ függvénynek korlátozott a modulusa, akkor $0 < \rho < \infty$, $|z - z_0| = \rho$, $|C_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$.
4. **Liouville egyenlőtlensége:** Hogyha az $f(z)$ függvény egész a G tartományban, akkor ez a függvény konstans.
5. Ahhoz, hogy az $f(z)$ függvény homomorf legyen szükséges és elegendő, hogy ez a függvény analitikus legyen.
6. Hogyha $\forall z,\ |f(z)| \leq M z^n$, akkor az $f(z)$ függvény polinom, amelynek a foka nem nagyobb n-nél.

Általánosított exponenciális sorok. Laurent-sorok. Laurent tétele.

Definíció: Az

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n}_{I} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{II}$$

sort általánosított exponenciális sornak nevezik a z_0 körzetében.

Az *I* sor konvergens a $|z - z_0| < R$ körben, hol

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}}.$$

Figyelembe vesszük a II sort. Legyen $\frac{1}{z-z_0} = t$ és $C_{-n} = a_n$. Akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n.$$

A konvergensség sugara

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ez a sor konvergens a $|t| < R_1$ tartományban. $\frac{1}{z-z_0} < R_1 \rightarrow$ $|z-z_0| > \frac{1}{R_1} = r$.

Vagyis

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_{-n}|}.$$

Akkor az általánosított sor konvergens az $r < |z-z_0| < R$ körben.

Figyelembe veszünk különböző eseteket:

1) Hogyha $r > R$, akkor a halmazoknak nincs közös pontjuk, vagyis a sor divergens.

2) Legyen $r < R$:

a) $r = 0,\ 0 < R < \infty$, akkor a sor konvergens a $|z-z_0| < R$ minden pontjában, kivéve a z_0 pontot.

b) $r = 0,\ R = \infty$, akkor a sor konvergens a $0 < |z-z_0| < R$ minden pontjában, kivéve a z_0 pontot.

c) r $-$véges, $R = \infty$, akkor a sor konvergens a $r < |z-z_0| < \infty$ kör külsejében.

Laurent tétel: Hogyha az $f(z)$ analitikus függvény a $K = \{z: r < |z-z_0| < R\}$ körben, akkor $\forall z \in K,\ f(z) = S(z) + T(z)$ függvényt sorba lehet bontani

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n \qquad (1)$$

hol

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$$

a sor összege a $|z-z_0| < R$ tartományban,

$$T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

a sor összege a $|z - z_0| > r$ tartományban. A

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad \gamma_\rho\colon |z - z_0| = \rho, \qquad r < \rho < R.$$

Definíció: A

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n}_{I} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(z - z_0)^{-n}}_{II}$$

sort, hol

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

Laurent sornak nevezik. Hogyha $z_0 \neq \infty$, akkor az I-et a sor igaz részének nevezik, a II-őt a sor fő részének nevezik.

A modulus maximuma

Hogyha az $f(z)$ függvény analitikus a G tartományban, nem konstans és folytonos a $\bar{G}$ tartományban, akkor $|f(z)|$ nem érheti el a legnagyobb értékét a G tartomány belsejében.

Az analitikus függvény nullái

Definíció: Hogyha az $f(z)$ függvény analitikus a G tartományban, akkor a z_0 pontot az $f(z)$ függvény nullájának nevezik, ha

$$f(z_0) = 0.$$

Definíció: A z_0 pontot az $f(z)$ függvény n-edik rendű nullájának nevezik, ha $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, de

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Definíció: A z_0 pontot az $f(z)$ függvény végtelen rendű nullájának nevezik, ha $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n)}(z_0) = 0$.

Tétel (az n-edik rendű nulla kanonikus ábrázolása): Legyen az $f(z)$ függvény analitikus a G tartományban. Ahhoz, hogy a z_0 pont az $f(z)$ függvény n-edik rendű nullája legyen szükséges és elegendő, hogy a z_0 pont körzetében az $f(z)$ függvényt ábrázolni lehessen a következőképpen:

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$$

hol $\varphi(z) -$ analitikus függvény, $\varphi(z_0) \neq 0$.

A nulla tulajdonságai

1. Hogyha a z_0 pont az $f(z)$ függvény n-edik rendű nullája és a $g(z)$ függvény m-edik rendű nullája, akkor a z_0 pont $n+m$-edik rendű nullája az $f(z) \cdot g(z)$ függvénynek. Hogyha $n > m$ akkor a z_0 pont $n-m$-edik rendű nullája az $\frac{f(z)}{g(z)}$ függvénynek.
2. Ahhoz, hogy az $f(z)$ analitikus függvénynek létezzen a z_0 pont körzetében n-edik rendű nullája szükséges és elegendő, hogy $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1} = 0,\ C_n \neq 0$, hol C_i az exponenciális sor koeficiensei.
3. Hogyha az $f(z)$ függvény analitikus a G tartományban és $\forall K \in G,\ z_0 \in K, n$-edik rendű nullája az $f(z)$ függvénynek és $f(z) \neq 0$ a K körben, akkor a nullák izoláltak.
4. Hogyha a z_0 pont az $f(z)$ függvény végtelen rendű nullája, akkor $f(z) = 0$.

Definíció: A $z_0 = \infty$ pont az $f(z)$ függvény nullája, hogyha $z_0 = 0$ pot az $f\left(\frac{1}{z}\right)$ függvény nullája.

Izolált szinguláris pontok

Megkülönböztetünk 3 típusú szinguláris pontot:

1. A z_0 pontot kiküszöbölhető szinguláris pontnak nevezik, hogyha
$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty.$$
2. A z_0 pontot az $f(z)$ függvény fokának nevezik, hogyha
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$
3. A z_0 pontot az $f(z)$ függvény lényegesen szingláris pontjának nevezik, hogyha
$$\nexists \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Tétel (a kiküszöbölhető szinguláris pontról): Hogyha az $f(z)$ függvény analitikus a G tartományban, akkor a következő állítások ekvivalensek:

1. z_0 kiküszöbölhető szinguláris pont.
2. $\exists M > 0, \exists \delta > 0,$ hogy a $\{z: |z - z_0| < \delta\}$ tartományban

$$|f(z)| \leq M.$$

3. A függvény kibontakozása Laurent sorba tartalmazza csak az igaz részét.

A függvény foka. Tételek a függvény fokáról

Tétel: Legyen az $f(z)$ függvény analitikus a z_0 pont kilyukasztott körzetében. Ahhoz, hogy a z_0 pont az $f(z)$ függvény foka legyen szükséges és elegendő, hogy a z_0 pont az $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ függvény nullája legyen.

Definíció: A z_0 pontot az $f(z)$ függvény n-edik rendű fokának nevezik, ha ez a pont az $\frac{1}{f(z)}$ függvény n-edik rendű nullája.

Tétel (a fok kanonikus ábrázolásáról): Legyen az $f(z)$ függvény analitikus a z_0 pont kilyukasztott körzetében. Ahhoz, hogy a z_0 pont n-edik rendű foka legyen az $f(z)$ függvénynek szükséges és elegendő, hogy ebben a körzetben az $f(z)$ függvényt ábrázolni lehessen a következőképpen

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}, \quad \varphi(z_0) \neq 0,$$

$\varphi(z) -$ analitikus.

3.Tétel: Ahhoz, hogy a z_0 pont n-edik rendű foka legyen az $f(z)$ függvénynek szükséges és elegendő, hogy a z_0 pont körzetében a Laurent sor fő része tartalmazzon véges számú tagokat.

Lényegesen szinguláris pont. Szochotszki tétel

Tétel: Ahhoz, hogy a z_0 pont lényegesen szinguláris pont legyen szükséges és elegendő, hogy a Laurent sor fő része tartalmazzon végtelen számú tagokat.

Tétel (Szochotszki): Hogyha a z_0 pont pont lényegesen szinguláris pontja az $f(z)$ függvénynek, akkor $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$, $\exists\{z_n, n \geq 1\}$ sorozat, hogy $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$, $f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A$.

Példák:

I.Találja meg az $f(z)$ függvény nullájának a rendjét.

1) $f(z) = \ln\cos z$; $\ln\cos z = 0$; $\to \cos z = 1$; $\to z_n = 2\pi n$, $n\epsilon\mathbb{Z}$.

$$f'(z) = -\frac{\sin z}{\cos z} = -tgz, \quad f'(z_n) = -tg(2\pi n) = 0;$$

$$f''(z) = -\frac{1}{\cos^2 z}, \quad f''(z_n) = -\frac{1}{\cos^2(2\pi n)} = -1 \neq 0 \ \to$$

$z_n = 2\pi n -$ az $f(z)$ függvény másodrendű nullája.

2) $f(z) = \dfrac{\sin^2(z-1)}{\cos\frac{\pi z}{2}}$,

$$g(z) = \sin^2(z-1) = 0 \ \to z - 1 = \pi n, n\epsilon\mathbb{Z} \ \to \ z = \pi n + 1, n\epsilon\mathbb{Z}.$$

$$g'(z) = 2\sin(z-1)\cos(z-1) = \sin 2(z-1), \ \ g'(\pi n + 1) = 0,$$

$$g''(z) = 2\cos 2(z-1),$$

$$g''(\pi n + 1) \neq 0$$

$\to \pi n + 1 -$ másodrendű nulla.

$$\varphi(z) = \cos\frac{\pi z}{2} = 0 \ \to \frac{\pi z}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \ \to z = 1 + 2n.$$

$$\varphi'(z) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi z}{2} \ \to \ \varphi'(1+2n) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \neq 0 \ \to$$

$\to 1 + 2n$ elsőrendű nulla.

$z_n = \pi n + 1 -$ az $f(z)$ függvény másodrendű nullája.

3) $\varphi(z) = z^2\left(e^{z^2} - 1\right)$, $\quad z = 0$.

$$f(z) = z^2 \quad g(z) = e^{z^2} - 1$$

$$f'(z) = 2z; \ \ f'(0) = 0; \ f''(z) = 2; \ f''(0) = 2 \neq 0,$$

$z_0 = 0 -$ másodrendű nullája az $f(z)$függvénynek.

$$g(z) = \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{2!} + o(z^6) = z^2\left(1 + \frac{z^2}{2} + o(z^6)\right) \ \to$$

$z_0 = 0 -$ másodrendű nullája az $g(z)$függvénynek.

Akkor a $z_0 = 0$ negyedrendű nullája a $\varphi(z)$ függvénynek.

II.1.Bizonyítsa be, hogy a $z=\infty$ pont az $f(z)=\frac{z^5}{(z-1)^2}$ függvény foka és számítsa ki a rendjét.

Figyelembe vesszük, hogy $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-1)^2}{z^5}$. A $z=\infty$ pont a $\varphi(z)$ függvény nullája, ez pedig azt jelenti, hogy az $f(z)$ függvény foka, mivel

$\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=0.$

Figyelembe vesszük, hogy $\Psi(\xi)=\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{\left(\xi^{-1}-1\right)^2}{\xi^{-5}}=\xi^3(1-\xi)^2$. A $\xi=0$ pont a $\Psi(\xi)$ függvény harmadrendű nullája, akkor a $z=\infty$ az $f(z)$ függvény harmadrendű foka.

2.Találja meg az $f(z)=tg\pi z$ fokát és rendjét.

$$f(z)=tg\pi z=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z},\cos\pi z=0\ \to\pi z=\frac{\pi}{2}+\pi n\ \to\ z_n=\frac{1}{2}+n,n\epsilon\mathbb{Z}.$$

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'=(ctgz)'=-\frac{\pi}{\sin^2\pi z},$$

$\to z_n-$ elsőrendű foka az $f(z)$ függvénynek.

Maradékok. A maradékok alaptétele. Tétel az összes maradék összegéről

Definíció: Legyen az $f(z)$ függvény analitikus a z_0 pont kilyukasztott körzetében, $\{z\colon 0<|z-z_0|<\delta\}$. z_0 lehet szinguláris pont is. Legyen $\gamma_\rho=\{z\colon |z-z_0|=\rho<\delta\}$ Akkor az

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}f(z)dz=\operatorname*{res}_{z_0}f(z)$$

az $f(z)$ függvény maradékának nevezik a z_0 pontban.

Definíció: Legyen az $f(z)$ függvény analitikus a $|z|>\delta$ tartományban. Akkor a

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}f(z)dz=\operatorname*{res}_{\infty}f(z)$$

az $f(z)$ függvény maradékának nevezik a $z_0=\infty$ pontban.

Tétel (a maradékok alaptétele): Hogyha az $f(z)$ függvény analitikus a G tartományban, kivéve a $z_1, \dots, z_{m-1}, z_m$ véges mennyiségű pontot és folytonos a tartomány határán, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z_k} f(z).$$

Tétel (az összes maradék összegéről): Hogyha az $f(z)$ függvény analitikus a G tartományban, kivéve a $z_1, \dots, z_{m-1}, z_m = \infty$ véges mennyiségű pontot, akkor

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

<u>Példák:</u>

1) $I = \int_C \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}, \qquad C = \{z: |z| = 1\},$

$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}, \qquad z_1 = 0;\ z_2 = 3;\ z_3 = -3;\ z_1 \in C \rightarrow$

$I = 2\pi i\, res_0 \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}$

Mivel a z_1 másodrendű foka az $f(z)$ függvénynek, ezért

$$I = 2\pi i \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z}{z^2-9}\right)' = 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{(z^2-9)e^z - 2ze^z}{(z^2-9)^2} = -\frac{2\pi i}{9}.$$

2) $\int_C \frac{z^2+1}{z^2(z-2)}dz \quad C = \{z: |z+1| + |z-1| = 6\}$

$z_1 = 0, z_2 = 2.$

$$\int_C \frac{z^2+1}{z^2(z-2)}dz = 2\pi i\left(res_0 \frac{z^2+1}{z^2(z-2)} + res_2 \frac{z^2+1}{z^2(z-2)}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2+1}{z-2}\right)' + \lim_{z\to 2}\left(\frac{z^2+1}{z^2}\right)'\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to 0}\frac{2z(z-2)-(z^2+1)}{(z-2)^2} + \frac{5}{4}\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right) = 2\pi i.$$

3) $\int_C z^2 tg\pi z dz, \qquad C = \{z: |z| = 1\}$

$$tg\pi z = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} \to \ z_n = \frac{1}{2} + n, n\epsilon\mathbb{Z} \ \ z_1 = \frac{1}{2},\ z_2$$

$$= -\frac{1}{2}. -\text{elsőrendű fokok}$$

$$\int_C z^2 tg\pi z dz = 2\pi i \left(res_{\frac{1}{2}} z^2 \sin \pi z + res_{-\frac{1}{2}} z^2 \sin \pi z \right)$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \right) = 0.$$

Irodalom

1. Александров И.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного. – М.: Высшая школа, 1984. – 186 с. 2. Алешков Ю.З., Смышляев П.П. Теория функций комплексного переменного и ее приложения. – Л.: Изд-во Ленигр. ун-та, 1986. – 247 с. 3. Араманович А.А., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
2. Диференціювання функцій комплексної змінної. Конформні відображення. Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Комплексний аналіз" для студентів механіко-математичного факультету / Упорядники: В.Г. Самойленко, А.М. Кириченко, А.В. Ловейкін, І.Б. Романенко, Г.В. Верьовкіна. – К.: ВПЦ "Київський університет" , 2002. – 84 с
3. Мартиненко М.А., Юрик І.І. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. – К.: Слово, 2008. – 295 с.
4. Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Теорія функцій комплексної змінної" для студентів механіко-математичного факультету / О.О. Капшивий, А.М. Кириченко. – К.: ВПЦ "Київський університет" , 1992. – 60 с. 39.
5. Обчислення інтегралів у сенсі головного значення. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Комплексний аналіз" для студентів механіко-математичного факультету / Упорядники: І.Б.Романенко, В.Г. Самойленко. – К., 2008. – 20 с. 40. Операційне числення. Методичні вказівки для студентів механікоматематичного факультету / Упорядники: В.Г. Самойленко, А.В. Ловейкін, В.А. Бородін. – К.: ВПЦ "Київський університет" , 2007. – 32 с.
6. Поляк І.Й., Погоріляк О.О. Теорія функцій комплексної змінної. - Ужгород – 2012 – 32с.