Н. В. Юрченко, В. П. Рудько (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО СИЛОВСЬКІ 2-ПІДГРУПИ ПОВНОЇ ЛІНІЙНОЇ ГРУПИ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

The description of Sylow 2-subgroups of the general linear group over a field T of the characteristic zero is given in the paper. This results were obtained using the theory of group representations over the field T.

Приводиться описання силовських 2-підгруп повної лінійної групи над полем T характеристики нуль, яке базується на теорії зображень груп над полем T.

Описання силовських p-підгруп повної лінійної групи над полем, запропоноване Р. Т. Вольвачевим [1], містить результати теорем 2—5 цієї роботи, але для $p = 2$ це описання виявилось неповним, про що вперше відмічено в роботі [2]. Повне описання силовських 2-підгруп матричних груп над полем T одержав В. С. Конюх [3]. В. М. Петечук [4] запропонував свій підхід до описання силовських $p-$підгруп в матричних групах над довільним полем.

Нехай p — просте число, T — поле характеристики нуль. Будь-яка p-підгрупа групи $GL(n,T)$ є розв'язна, локально скінченна і цілком звідна над полем T. Якщо G — силовська p-підгрупа групи $GL(n,T)$, то група G спряжена з прямим добутком $G_1 \times \cdots \times G_s$, де G_j — незвідна силовська p-підгрупа групи $GL(n_j,T)$ $(j = 1,\ldots,s;\ n_1 + \cdots + n_s = n)$. Групи $G_1,\ldots,G_s$ визначені однозначно з точністю до спряженості у відповідних повних лінійних групах.

Теорема 1 ([5]). *Нехай G — незвідна силовська p-підгрупа групи $GL(n,T)$. Тоді $n = dp^k$ і група G спряжена з сплетінням $H \wr N_{p^k}$ деякої примітивної силовської p-підгрупи H в групі $GL(d,T)$ з силовською p-підгрупою N_{p^k} симетричної групи S_{p^k}.*

Твердження 1. *Нехай $G = G_1 \times \cdots \times G_s$ — силовська p-підгрупа групи $GL(n,T)$, де $G_1,\ldots,G_s$ — незвідні силовські p-підгрупи у відповідних групах матриць порядків $n_s,\ldots,n_s$ $(n = n_1 + \cdots + n_s)$. Нехай H — незвідна силовська p-підгрупа в групі $GL(m,T)$, яка не спряжена над полем T з жодною із груп $G_1,\ldots,G_s$. Тоді прямий добуток $G \times H$ буде силовською p-підгрупою групи $GL(n+m,T)$.*

Доведення побудоване на лемі Шура для незвідних зображень груп над полями.

Нехай ε — корінь степеня p із одиниці $(\varepsilon \neq 1)$, $F = T(\varepsilon)$, P_p — силовська p-підгрупа мультиплікативної групи F^* поля F, $\widetilde{P_p}$ — образ групи P_p в зображенні поля F матрицями порядку $d = (F : T)$. Відмітимо, що група $\widetilde{P_p}$ буде силовською p-підгрупою групи $GL(d,T)$, і, якщо $d > 1$ і $n < d$, то силовська p-підгрупа групи $GL(n,T)$ буде одиничною групою. Нехай далі

$$W_0 = \widetilde{P_p}, W_j = W_{j-1} \wr C_p$$

— сплетіння матричних груп W_{j-1} з циклічною порядку p групою C_p підстановок степеня p $(j = 1,2,\ldots)$.

Теорема 2. *Нехай виконується одна із наступних умов:*

(1) $p > 2$;

(2) $p = 2, \sqrt{-1} \in T$.

Нехай $d_0 = 0$ при $d = 1$ і $0 \leq d_0 < d$, якщо $d > 1$. Якщо

$$n = d_0 + d(n_0 + n_1 p + \cdots + n_s p^s) \quad (0 \leq n_j < p; \quad j = 0,1,\ldots,s; \quad n_s \neq 0),$$

то прямий добуток

$$\langle 1\rangle^{(d_0)} \times W_0^{(n_0)} \times W_1^{(n_1)} \times \cdots \times W_s^{(n_s)}$$

— буде силовською p-підгрупою групи $GL(n,T)$. Будь-яка силовська p-підгрупа в групі $GL(n,T)$ є спряжена з цим добутком.

(В цій теоремі і далі будемо вважати, що $H \times G^{(0)} = G^{(0)} \times H = H$ для матричних груп H, G).

Розглянемо випадок, що не описується теоремою 2. Нехай всюди далі $p = 2$, $charT = 0$ і $i = \sqrt{-1}$ не належить полю T.

Лема 1 ([6])**.** *Нехай H — незвідна силовська 2-підгрупа групи $GL(d,T)$. Тоді сплетіння $H \wr C_2$ буде незвідною силовською 2-підгрупою в групі $GL(2d,T)$, за виключенням, коли одночасно виконуються умови: $d = 1, H = \langle -1\rangle$, поле T містить $\sqrt{2}$ або $\sqrt{-2}$.*

Лема 2 ([5])**.** *Нехай 2-підгрупа H групи $GL(d,T)$ $(d > 1)$ є примітивною групою і нехай A — максимальна нормальна абелева підгрупа в групі H. Тоді існує таке розширення $F = T(\xi)$ (ξ - корінь деякого степеня $2^n > 1$), що група A буде ізоморфна деякій підгрупі в групі F^* і, якщо $H \neq A \subset F^*$, то для кожного елемента $g \in H$ $(g \notin A)$ знайдеться неодиничний автоморфізм σ_g поля F над полем T такий, що*

$$g^{-1}hg = \sigma_g(h) \quad (g \in H).$$

Нехай

$$\widetilde{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриці вигляду $\alpha E + \beta\widetilde{i}$ $(\alpha, \beta \in T)$ утворюють поле T_1, що ізоморфно полю $T(i)$.

Лема 3. *Група P, що породжується силовською 2-підгрупою $P_2(T_1)$ в групі T_1^* і матрицею $b = diag[1,-1]$, буде силовською 2-підгрупою в групі $GL(2,T)$.*

Доведення. Якщо $|P_2(T_1)| = 4$, то $P = \langle\widetilde{i}, b\rangle$, $P = \langle -1\rangle \wr C_2$, поле T не містить $\pm\sqrt{2}$ і, згідно леми 1, група P буде силовською 2-підгрупою групи $GL(2,T)$. Якщо $|P_2(T_1)| > 4$, то група P разом з підгрупою $P_2(T_1)$ будуть примітивними і доведення випливає з леми 2.

Нехай H — підгрупа групи $GL(s,T)$. Введемо позначення

$$W_0(H) = H,\, W_1(H) = H \wr C_2,\, W_{j+1}(H) = W_j(H) \wr C_2$$

— сплетіння матричної групи $W_j(H)$ з групою C_2 підстановок порядку 2; $(j = 0, 1, \ldots)$.

Твердження 2. *Нехай*

$$n = n_0 + 2n_1 + \cdots + 2^s n_s \quad (n_j \in \{0,1\},\, n_s \neq 0)$$

— 2-ічний розклад натурального числа n. Тоді прямий добуток

$$\langle -1\rangle^{n_0} \times (W_0(P))^{n_1} \times \cdots \times (W_{s-1}(P))^{n_s}$$

буде силовською 2-підгрупою групи $GL(n,T)$.

Доведення випливає з леми 1 і твердження 1.

Нехай ξ_s — корінь степеня 2^s із -1, вибраний так, що $\xi_s^2 = \xi_{s-1}$ $(s = 1, 2, \ldots;$ $\xi_0 = -1$, $\xi_1 = i)$,

$$\alpha_s = \xi_s + \xi_s^{-1}, \quad \beta_s = \xi_s - \xi_s^{-1} \quad (s = 1, 2, \ldots,).$$

Очевидно,

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 2\xi_1; \quad \alpha_2 = \sqrt{2}, \quad \beta_2 = \sqrt{-2}.$$

Легко бачити, що ξ_s буде коренем незвідних над полем T многочленів

$$x^2 - \alpha_s x + 1, \quad x^2 - \beta_s x - 1,$$

якщо $\alpha_s \in T$ або $\beta_s \in T$ відповідно. Відмітимо, що елементи α_s, β_s не можуть одноразово належати полю T. Якщо β_s належить T, то $\alpha_k \in T\,(k < s)$. Звідси слідує, що при $s \neq s'$ поле T не може містити β_s і $\beta_{s'}$ одноразово. Якщо $\alpha_s \in T$, $(s > 1)$, то $i\beta_s \in T$.

Теорема 3. *Нехай H — примітивна силовська 2-підгрупа групи $GL(n, T)$ і H — нескінченна група. Тоді $n = 2$, поле T містить всі α_s,*

$$P_2(T_1) = \langle a_s = \begin{pmatrix} \alpha_s & i\beta_s \\ -i\beta_s & \alpha_s \end{pmatrix} \mid s = 1, 2, \ldots \rangle$$

— група типу 2^∞, а група $U_1 = \langle P_1(T_1)$, $c = diag[1, -1]\rangle$ буде силовською 2-підгрупою групи $GL(2, T)$. Нехай рівняння $x^2 + y^2 = -1$ має розв'язок (γ, δ) над полем T. Тоді група $GL(2, T)$ містить ще одну не спряжену з U_1 силовську 2-підгрупу

$$U_2 = \langle P_2(T_1), \quad c' = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} \rangle.$$

Група H спряжена з однією з груп U_1, U_2.

Доведення. Використавши деякі ідеї Бермана С. Д., неважко показати, що коли група $P_1(T_1)$ є скінченною, то при всіх натуральних s група $P_2(T_1(\xi_s))$ буде також скінченною. Із умов леми витікає, що група $P_2(T_1)$ є нескінченною групою. Очевидно, що всі α_s належать полю T. Так як $(T_1 : T) = 2$, то $\sigma_g^2 = 1$ (див. лему 2) і тоді $g^2 \in P_2(T_1)$, а так як $\sigma_g(g^2) = g^2$, то $g^2 = \pm E$ і якщо $g^2 = -E$, то $g = c'$. Твердження доведено.

Знайдемо скінченні примітивні матричні групи над полем T.

Лема 4 ([7]). *Нехай H — скінченна 2-група, що містить циклічну нормальну підгрупу $A = \langle a \rangle$ порядку 2^n, яка співпадає із своїм централізатором в H. Якщо факторгрупа H/A циклічна, то група H є розщеплене розширення групи A у всіх випадках, окрім випадку, коли H — узагальнена група кватерніонів:*

$$H = \langle a, c : a^{2^n} = 1, c^2 = a^{2^{n-1}}, c^{-1}ac = a^{-1} \rangle \quad (n > 2);$$

якщо H/A — нециклічна, то групу H можна задати співвідношеннями:

$$H = \langle a, b, c : a^{2^n} = b^{2^k} = 1\,(k < n-1), \quad c^2 = a^{j2^{n-1}}\,(j = 0, 1),$$

$$b^{-1}ab = a^{1+2^{n-k}}, \quad c^{-1}ac = a{-}1, \quad bc = cb \rangle.$$

Лема 5. *Нехай H — скінченна примітивна силовська 2-підгрупа групи $GL(m,T)$ і A — нормальна максимальна абелева підгрупа в H. Тоді $(H:A)=2$ і H — одна з наступних груп :*

$$H_1 = \langle a, c : a^{2^n} = c^2 = 1, \quad c^{-1}ac = a^{-1+2^{n-1}}\ (n>2)\rangle,$$

$$H_2 = \langle a, c : a^{2^n} = c^2 = 1, \quad c^{-1}ac = a^{-1}\rangle,$$

$$H_3 = \langle a, c : a^{2^n} = 1, \quad c^2 = a^{2^{n-1}}, \quad c^{-1}ac = a^{-1}\rangle.$$

Доведення. Група H є образом $\Delta(H)$ деякого незвідного T-зображення Δ цієї групи. Зображення Δ отримується наступним шляхом. Нехай Γ — абсолютно незвідне зображення групи H, яке реалізоване над полем K розкладу цього зображення і степінь $d=(K:T)$ є найменша. Нехай $\rho : K \longrightarrow M(d,T)$ — точне зображення поля K матрицями порядку d над полем T. Якщо в зображені Γ кожний матричний елемент $\alpha \in K$ замінити матрицею $\rho(\alpha)$, то в результаті одержиться незвідне зображення $\rho\Gamma$ групи H над полем T. Тоді зображення Δ буде спряжене над полем T з деяким зображенням $\rho\Gamma$. Використаємо далі леми 2 і 4. Зображення Γ індукується деяким точним лінійним характером γ підгрупи A : $\gamma(a)=\xi$, де ξ — первісний корінь степеня 2^n із одиниці (відмітимо, що γ є зображенням степеня 1 над полем $T(\xi)$). Нехай $M=T(\xi)e$ — одновимірний лінійний простір над $T(\xi)$ з базисним елементом e буде модулем зображення γ і $ae=\xi e$. Знайдемо для зображення $\Gamma=\gamma^H$ його поле розкладу K. Нехай спочатку група H є нециклічна: $H=\langle a,\, b,\, c\rangle$. Тоді індукований модуль M^H має базис $\{b^jc^s : j=0,1,\ldots,2^k-1; s=0,1\}$ над полем $T(\xi)$. Неважко бачити, що поле $T(\chi)$ характера χ зображення Γ співпадає з полем $T_0=T(\xi^{2^k}+\xi^{-2^k})$. Відмітимо, що $T_0 \subset K$. Нехай

$$\omega = (1+b+\cdots+b^{2^k-1})(1+c)e.$$

Легко бачити, що

$$a^j(1+b+\cdots+b^{2^k-1})e = (\Sigma_s \xi^{j\mu^s} b^s)e, \quad (\mu = 1+2^{n-k});$$

$$a^{2^k}\omega = (1+b+\cdots+b^{2^k-1})(\xi^{2^k}+\xi^{-2^k}c)e.$$

Нехай

$$M_0 = T(\xi)\omega_1 + T(\xi)\omega_2, \quad (\omega_1=\omega,\, \omega_2 = a^{2^k}\omega),$$
$$M_j = a^jM_0 \quad (j=0,1,2^k-1).$$

Тоді

$$M^H = M_0 + M_1 + \cdots + M_t \quad (t=2^k-1)$$

— пряма сума підпросторів розмірності 2. Неважко показати, що

$$a^{2^k}\omega_1=\omega_2, \quad a^{2^k}\omega_2 = -\omega_1+\alpha\omega_2, \quad (\alpha = \xi^{2^k}+\xi^{-2^k}),$$

$$b\omega_j = \omega_j, \quad (j=1,2),$$

$$c\omega_1=\omega_1, \quad c\omega_2 = \alpha\omega_1-\omega_2,$$

якщо $c^2=1$ і

$$c\omega_1 = u\omega_1+v\omega_2, \quad c\omega\omega_2 = (u\alpha+v)\omega_1 - u\omega_2, \quad (u,v \in T(\xi),\, u^2+\alpha uv+v^2=-1),$$

якщо c — елемент порядку 4. Із одержаних формул можна зробити два висновки. По-перше, підпростори $M_0, \ldots, M_t$ будуть областями транзитивності для групи H. По-друге, поле K співпадає з полем $T(\alpha) = T_0$, якщо c — елемент порядку 2 або c — елемент порядку 4 і рівняння $x^2 + \alpha xy + y^2$ має розв'язок над полем T_0 , або поле K співпадає з розширенням $T_0(i) = T(\xi^{2^k})$. Отже, група $\Gamma(H)$ — імпрмітивна над полем K і тоді група $\Delta(H) = \rho\Gamma(H)$ — імпримітивна над полем T. Таким чином необхідною умовою примітивності групи H є умова циклічності факторгрупи H/A. Нехай ця умова виконується. Тоді для групи H, окрім випадків, перерахованих у формулюванні леми, можливі ще два випадки: 1) $H = \langle a, b\rangle$ і 2) $H = \langle a, c : c^{2^k} = 1, \quad c^{-1}ac = a^{-1+2^{n-k}}\rangle, \quad (1 < k < n-1)$. Збережемо попередні позначення. В першому випадку поле $T(\chi)$ співпаде з полем $T(\xi^{2^k})$, яке, в силу умови $k < n-1$ буде містити $i = \sqrt{-1}$. Але над таким полем не існує примітивних неабелевих 2-груп матриць. Отже, група $\Gamma(H)$ над полем $T(\xi^{2^k})$ і разом з нею група $\rho\Gamma(H)$ над полем T будуть імпримітивні. Розглянемо другий випадок. Неважко бачити, що поле $T(\chi)$ характера χ зображення $\Gamma = \gamma^H$ співпадає з полем $T(\xi^{2k-1} - \xi^{-2^{k-1}})$. Нехай

$$b = c^2, \quad \omega = (1 + b + \cdots + b^{2^{k-1}-1})(1 + c)e, \quad \omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = a^{2^{k-1}}.$$

Тоді

$$a^{2^{k-1}}\omega_2 = \omega_1 + \beta\omega_2 \quad (\beta = \xi^{2^{k-1}} - \xi^{-2^{k-1}});$$
$$c\omega_1 = \omega_1, \quad c\omega_2 = \beta\omega_1 - \omega_2.$$

Таким чином підпростір (в M^H) $M_0 = \langle\omega_1, \omega_2\rangle$ є інваріантний відносно підгрупи $\langle a^{2^{k-1}}, c\rangle$, а простір M^H буде прямою сумою підпросторів $M_0, aM_0, \ldots, a^{2^{k-1}-1}M_0$, яких оператори a і c переставляють між собою. Окрім цього, зображення Γ реалізується матрицями над полем $T(\beta) = T(\chi)$, тобто $K = T(\beta)$. Так як $k > 1$, то група $\Gamma(H)$ імпримітивна над полем K і тоді група $H = \rho\Gamma(H)$ імпримітивна над полем T. Отже, випадки 1) – 2) для примітивної групи H неможливі. Лема доведена.

Використаємо далі позначення леми 5. Нехай Γ_j — абсолютно незвідне зображення групи H_j, реалізоване над полем розкладу K_j $(j = 1, 2, 3)$. Тоді, як показано при доведені леми 5, маємо

$$K_1 = T(\beta) \quad (\beta = \xi - \xi^{-1}); \qquad K_2 = T(\alpha) \quad (\alpha = \xi + \xi^{-1});$$

$K_3 = T(\alpha)$ і рівняння $x^2 + \alpha xy + y^2 = -1$ має розв'язок над полем $T(\alpha)$ або $K_3 = T(\alpha)(i) = T(\xi)$ і вказане рівняння розв'язку не має. Відмітимо, що рівняння $x^2 + \alpha xy + y^2 = -1$ має розв'язок над полем $T(\alpha)$ тоді і тільки тоді, коли над цим полем існує розв'язок рівняння $x^2 + y^2 = -1$. У випадку $n = 2$ маємо $\alpha = 0$, $K_2 = T$ і група $\Gamma_2(H_2)$ буде спряжена з групою $\langle -1\rangle \wr C_2$ і не буде примітивною над полем T.

Лема 6. *Нехай* $n > 2$, $(n = \log_2 |P_2(T(i))|)$, $H = H_j$, $\Gamma = \Gamma_j\,(j = 1, 2)$. *Група* $\rho\Gamma(H)$ *буде примітивною над полем* T *тоді і тільки тоді, коли* $K_j = T$, $(1 \le j \le 2)$. *Нехай* $H = H_3$, $\Gamma = \Gamma_3$. *Група* $\rho\Gamma(H)$ *буде примітивною над полем* T *тоді і тільки тоді, коли рівняння* $x^2 + y^2 = -1$ *має розв'язок над полем* $T(\alpha)$ *і не має розв'язку над полем* $T(\alpha^2)$.

Нехай $n = 2$. *Єдиною примітивною* 2*-підгрупою в групі* $GL(2, T)$ *може бути лише наступна група кватерніонів порядку 8:*

$$H_3 = \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} \rangle,$$

де γ, $\delta \in T$, $\gamma^2 + \delta^2 = -1$.

Доведення. Неважко бачити, що

$$\Gamma_1 : a \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, c \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_2 : a \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, c \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_3 : a \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, c \longmapsto \begin{pmatrix} i & \alpha i \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

якщо $K_3 = T(\alpha)(i)$. Нехай $(T(\beta) : T) > 1$ або $(T(\alpha) : T) > 1$. Тоді $T(\beta) : T(\beta^2)) = 2$ або відповідно $T(\alpha) : T(\alpha^2)) = 2$. Відмітимо, що $T(\alpha^2) = T(\beta^2)$. Нехай ρ_j є зображення поля K_j матрицями порядку 2 над полем $T(\alpha^2)$ при $j = 1, 2$ і над полем $T(\alpha)$ для $j = 3$. Введемо позначення $\tilde{x}$ для матриці $\rho_j(x)$, $x \in K_j$. Тоді

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \beta^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = xE \quad (x \in T(\alpha^2),\, x \in T(\alpha)).$$

Щоб одержати зображення $\rho_j\Gamma_j$, досить в Γ_j всі матричні елементи x замінити матрицями $\tilde{x}$. Нехай $L = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ — модуль зображення $\rho_j\Gamma_j$. Нехай $L_1 = T(\alpha^2)e_1 + {}+T(\alpha^2)e_2$ для випадку зображень Γ_1, Γ_2. Тоді $a^2L_1 = cL_1 = L_1$, $L = L_1 + aL_1$ — представлення L через суму областей імпримітивності. У випадку зображення Γ_3 візьмемо $L_1 = T(\alpha)e_1 + T(\alpha)e_3$. Тоді $aL_1 = L_1$ і $L = L_1 + cL_1$. Таким чином група $\rho_j\Gamma_j(H_j)\,(1 \le j \le 2)$ буде імпримітивна над полем $T(\alpha^2)$, а група $\rho_3\Gamma_3(H_3)$ — імпримітивна над полем $T(\alpha)$. Отже, група $\rho\Gamma(H)$ буде імпримітивна над полем T. Розглянемо тепер випадок коли поле розкладу K абсолютно незвідного зображення Γ групи $H = H_3$ співпадає з полем $T(\alpha)$. Зручно за модуль зображення Γ взяти поле $K(i) = T(\alpha)(i)$, в якому дія операторів a, c має вид

$$a(x) = \xi x, \quad c(x) = \sigma(x)\nu \quad (x \in K(i)),$$

де σ — єдиний нетривіальний автоморфізм поля $K(i)$ над полем K,

$$\nu = \nu_1 + i\nu_2, \quad (\nu_1, \nu_2 \in K,\ \nu\sigma(\nu) = \nu_1^2 + \nu_2^2 = -1).$$

Одержаний KH-модуль позначимо через K_ν, а оператор c в ньому через c_ν. Нехай $\lambda \in K(i)$, $\sigma(\lambda)\lambda = -1$ і K_λ — відповідний KH-модуль. Так як $\sigma(\lambda/\nu)\lambda/\nu = {}= 1$, то $\lambda/\nu = \theta/\sigma(\theta)$ для деякого елемента $\theta \in K(i)$. Визначимо відображення $\varepsilon : K_\nu \longrightarrow K_\lambda$, поклавши $\varepsilon(x) = \theta x$ $(x \in K(i))$. Неважко перевірити, що ε буде ізоморфізмом KH-модулів. Припустимо існування такого елемента $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $(\lambda_1,\ \lambda_2 \in {}\in T(\alpha^2),\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = -1)$. Тоді $T(\alpha^2)(i)$ витримує дію операторів a^2 і c_λ і, окрім цього, $K_\lambda = T(\lambda\alpha^2)(i) + aT(\alpha^2)(i)$ — сума областей транзитивності групи H. Отже, група $\rho\Gamma(H)$ — імпримітивна над полем T.

Нехай $n = 2$. Тоді $\alpha = 0$ і група H_2 — імпримітивна. Залишилась вказана група H_3. Лема доведена.

Таким чином, скінченними примітивними 2-групами матриць порядку $m \ge 2$ над полем T можуть бути лише квазідіедральна група H_1 і діедральна група H_2 порядків 2^{n+1} $(n > 2)$, а також група H_3 кватерніонного типу порядка $2^n \ge 8$. При цьому $m = 2$ для перших двох груп і разом можуть з'явитись лише друга і третя групи.

Введемо в розгляд нормене відображення $N : T(i) \Rightarrow T$, поклавши

$$N(a + bi) = a^2 + b^2 \quad (a, b \in T).$$

Якщо $a \in T$, то $N(a) = a^2$. Якщо $w \in T(i)$, $w \notin T$, то норма $N(w)$ рівна вільному члену квадратного тричлена над T, коренем якого є w. Очевидно,

$$N(\alpha_s) = 1, \quad N(\beta_s) = -1.$$

Нехай σ — автоморфізм поля $T(i)$ такий, що $\sigma(i) = -i$. Тоді

$$N(w) = w\,\sigma(w), \quad w \in T(i).$$

Нехай $P_2 = Sl_2(T(i)^*)$ — силовська 2-підгрупа групи $T(i)^*$.

Можливі два випадки:

(1)$N(P_2) = \{1\}$;

(2)$N(P_2) = \{1, -1\}$.

В залежності від цих випадків проведемо описання силовських 2-підгруп групи $GL(m, T)$. Нехай всюди далі

$$m = m_0 + m_1 2 + \ldots + m_s 2^s$$

— 2-ічний розклад натурального числа m.

Теорема 4. *Нехай $N(H_2) = \{1, -1\}$ і $\beta = \beta_{n-1} \in T$. Тоді единою (відмінною від одиничної групи) примітивною силовською 2-підгрупою матриць над полем T є квазідіедральна група*

$$U_3 = \langle a = i/2 \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ -i\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$$

порядку 2^{n+1}.

Будь-яка силовська 2-підгрупа групи $GL(m, T)$ буде спряжена в цій групі з прямим добутком

$$(\langle -1 \rangle)^{m_0} \times (W_0(U_3))^{m_1} \times \cdots \times (W_{s-1}(U_3))^{m_s}.$$

Теорема 5. *Нехай $N(P_2) = 1$ і $\alpha = \alpha_{n-1} \in T$, але α_n не міститься в полі T. Тоді при $n > 2$ діедральна група*

$$U_4 = \langle a = 1/2 \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ -i\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$$

(порядку 2^{n+1}) буде примітивною неодиничною силовською 2-підгрупою матриць над полем T. Нехай існують такі елементи γ, δ поля T, що $\gamma^2 + \delta^2 = -1$. Тоді кватерніонна група

$$U_5 = \langle a = 1/2 \begin{pmatrix} \alpha & i\beta \\ -i\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix} \rangle$$

(порядку 2^{n+1}) буде примітивною силовькою 2-підгрупою матриць над полем T. Нехай G — довільна силовська 2-підгрупа групи $GL(m, T)$. Тоді існує представлення $m - m_0 = 2u + 2v$ у виді суми двох невід'ємних цілих чисел, що коли

$$u = u_0 + 2u_1 + \cdots + 2^t u_t, \quad v = v_0 + 2v_1 + \cdots + 2^r v_r$$

— 2-ічні розклади, то група G буде спряжена з прямим добутком

$$(\langle -1 \rangle)^{m_0} \times (W_0(H))^{u_0} \times \cdots \times (W_t(H))^{u_t} \times (W_0(U_5))^{v_0} \times \cdots \times (W_r(U_5))^{v_r},$$

де $H = U_4$ при $n > 2$ або $H = \langle \tilde{i}, b = diag[1, -1] \rangle$ — силовська 2-підгрупа в $GL(2, T)$.

Число всіх попарно неспряжених силовських 2-підгруп групи $GL(m, T)$ рівно $[m/2] + 1$.

Теорема 6. *Нехай $N(P_2) = 1$, $\alpha_{n-1} \in T$, $\alpha_n \notin T$ і рівняння $x^2 + y^2 = -1$ не має розв'язку над полем T, але існують такі α_s $(s \geq n)$, що вказане рівняння розв'язується над полем $T(\alpha_s)$. Якщо r — найменше з таких s, і (γ, δ) — розв'язок рівняння $x^2 + y^2 = -1$ над полем $T(\alpha_r)$, то кватерніонна група*

$$U_6 = \langle a = 1/2 \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha_r} & \widetilde{i\beta_r} \\ \widetilde{-i\beta_r} & \widetilde{\alpha_r} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma} & \widetilde{\delta} \\ \widetilde{\delta} & -\widetilde{\gamma} \end{pmatrix} \rangle$$

порядку 2^{r+1} буде примітивною силовською 2-підгрупою групи $GL(2d, T)$, $d = (T(\alpha_r) : T)$. Нехай $m = d_0 + 2d\,m'$, $d_0 < 2d$ і P_0 — силовська 2-підгрупа групи $GL(d_0, T)$. Нехай G — довільна силовська 2-підгрупа групи $GL(m, T)$. Тоді існує представлення $m' = u + v$, що коли

$$u = u_0 + 2u_1 + \cdots + 2^t u_t, \quad v = v_0 + 2v_1 + \cdots + 2^k v_k$$

— 2-ічні розклади, то група G буде спряжена з добутком

$$P_0 \times (W_0(V))^{u_0} \times \cdots \times (W_t(V))^{u_t} \times (W_0(U_6))^{v_0} \times \cdots \times (W_k(U_6))^{v_k},$$

де $V = W_l(H)$, H — силовська 2-підгрупа в $GL(2, T)$, $l = \log_2 d$.

Число всіх попарно неспряженних силовських 2-підгруп групи $GL(m, T)$ рівно $[m/2d] + 1$.

Теорема 7. *Нехай $N(P_2) = 1$ і рівняння $x^2 + y^2 = -1$ не розв'язується над полями $T(\alpha_s)$, $s = 1, 2, \ldots$. Якщо $m = m_0 + m_1 2 + \cdots + m_s 2^s$ — 2-ічний розклад натурального числа m, то будь-яка силовська 2-підгрупа групи $GL(m, T)$ буде в цій групі спряжена з добутком*

$$(\langle -1 \rangle)^{m_0} \times (W_0(H))^{m_1} \times \cdots \times (W_{s-1}(H))^{m_s},$$

де H — силовська 2-підгрупа групи $GL(2, T)$ $(H = U_4,\ n > 2;\ H = \langle -1 \rangle \wr C_2,\ n = 2)$.

Теорема 8. *При будь-якому m силовські 2-підгрупи групи $GL(m, T)$ спряжені в цій групі тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов $1) N(P_2) = \langle -1 \rangle$; $2) N(P_2) = 1$ і рівняння $x^2 + y^2 = -1$ не розв'язується над полями $T(\alpha_s)$, $s = 1, 2, \ldots$.*

Доведення теорем 4 — 8 випливає з описання примітивних 2-підгруп матриць над полем T, теореми 1 і твердження 1. Відмітимо, що при доведеннях модулем зображеня Γ відповідної примітивної групи H взято поле $T(i)$ або поле $T(\alpha_r, i)$ для групи $H = H_3$. В теоремі 6 позначення типу $\widetilde{x}$ використано для образа елемента $x \in T(\alpha_r)$ при зображені поля $T(\alpha_r)$ над полем T.

1. *Вольвачев Р. Т.* p-подгруппы Силова полной линейной группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, № 5. – С. 1031–1054.
2. *Leedham-Green C. R., Plesken W.* Some remarks of Sylow subgroups of general linear groups // Math. Z. – 1986. – **191**. – P. 529–535.
3. *Конюх В. С.* О линейных p-подгруппах // Изв. АН БССР. Сер. физ-мат. наук. – 1987. – № 1. – С. 3–8.
4. *Петечук В. М.* Линейные p-группы над телами // Докл. АН Украины. Сер. мат. Наук. – 1997. – № 11. – С. 21–24.
5. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. – М.: Наука, 1972, – 351 с.
6. *Gudivok P. M., Rudko V. P.* On isomorphism of sylow subgroups of the general linear group over the ring of integers // Jornal of Mathematical Sciences. – 2000. – **102**, – № 3. – P. 3998–4008.
7. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука, 1969, – 448 с.

Одержано 03.09.2006