УДК 512.647.2+512.562

В. М. Бондаренко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ⊥-ЗОБРАЖЕННЯ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН

In this paper we introduce the notion of ⊥-representations of posets and study some properties of such representations.

У цій статті вводиться поняття ⊥-зображень частково впорядкованих множин і вивчаються деякі властивості таких зображень.

Зображення частково впорядкованих множин (на мові матриць) були введені в статті [1] в зв'язку з розглядом проблеми Брауера-Тролла. Пізніше з'ясувалося, що це поняття може бути використано також при розгляді інших питань.

Зображення скінченної частково впорядкованої (скорочено ч. в.) множини S над полем k — це довільна матриця R з коефіцієнтами із k, розбита на вертикальні смуги, які занумеровані елементами ч. в. множини S; матрицю, що стоїть в смузі з номером x будемо позначати через R^x. Зображення R і R' називаються еквівалентними, якщо R' може бути одержаним з R за допомогою таких перетворень:

1') довільні елементарні перетворення із рядками матриці R;

2') довільні елементарні перетворення зі стовпцями кожної із матриць R_x;

3') додавання стовпців із R^x (помножених на елементи поля) до стовпців із R^y, якщо $x < y$.

Пряма сума зображень та нерозкладні зображення визначаються стандартним чином.

Для зображень ч. в. множини стандартним способом доводиться теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного зображення в пряму суму нерозкладних зображень (див. загальну теорему в [2]).

Введене таким чином зображення будемо називати горизонтальним зображенням ч. в. множини S.

Можна ввести дуальне поняття — вертикальне зображення ч. в. множини S. Це довільна матриця R з коефіцієнтами із k, розбита на горизонтальні смуги, які занумеровані елементами ч. в. множини S; матрицю, що стоїть в смузі з номером x будемо позначати через R_x. Зображення R і R' називаються еквівалентними, якщо R' може бути одержаним з R за допомогою таких перетворень:

1) довільні елементарні перетворення зі стовпцями матриці R;

2) довільні елементарні перетворення із рядками кожної із матриць R_x;

3) додавання стовпців із R_x (помножених на елементи поля) до стовпців із R_y, якщо $x < y$.

Легко бачити, що між горизонтальними зображеннями ч. в. множини S та вертикальними зображеннями дуальної ч. в. множини S^{op} існує природна взаємно однозначна відповідність (яка здійснюється за допомогою транспонування матриць).

У першій частині цієї статті ми вводимо один клас матричних задач, що є "гібридом" горизонтальних та вертикальних зображень ч. в. множини S. Ми називаємо ці матричні задачі $\perp$-зображеннями ч. в. множини S. У другій частині статті ми вивчаємо деякі властивості таких зображень.

1. Означення $\perp$-зображень частково впорядкованих множин. Нехай S — скінченна ч. в. множина і k — поле; $\perp$-зображенням S над k ми називаємо пару матриць $T = (A, B)$ з коефіцієнтами із k, таку, що виконуються наступні умови:

I) A — горизонтальне зображення ч. в. множини S;

II) B — вертикальне зображення ч. в. множини S^{op};

III) число рядків матриці A дорівнює числу стовпців матриці B;

IV) число стовпців матриці A^x дорівнює числу рядків матриці B_x ($x \in S$).

Два $\perp$-зображення $X = (A, B)$ і $X' = (A', B')$ назвемо еквівалентними, якщо X' може бути одержаним із X за допомогою таких перетворень:

1) з рядками матриці A можна робити довільне елементарне перетворення, але при цьому із стовпцями матриці B треба зробити обернене елементарне перетворення;

2) із стовпцями матриці A^x можна робити довільне елементарне перетворення, але при цьому із рядками матриці B_x треба зробити обернене елементарне перетворення ($x \in S$);

3) якщо $x, y \in S$ і до того ж $x < y$, то i-ий стовпець, помножений на довільний елемент $a \in k$, матриці A^x можна додати до j-го стовпця матриці A^y, але при цьому від i-го рядка матриці B_x треба відняти j-ий рядок матриці B_y, помножений на a.

Пряма сума $\perp$-зображень та нерозкладні $\perp$-зображення визначаються природнім чином. Для $\perp$-зображень ч. в. множини стандартним способом доводиться теорема Крулля-Шмідта (див. загальну теорему в [2]).

Дамо означення еквівалентності $\perp$-зображень ч. в. множини S в термінах матричних рівностей.

S-блоковою матрицею назвемо всяку блокову матрицю N, горизонтальні і вертикальні смуги якої занумеровані елементами множини S: $N = (N_{xy})$, x, $y \in S$. S-блокову матрицю N назвемо S-матрицею, якщо всі її діагональні блоки N_{xx} є квадратними (тоді квадратною є і сама N). Множину всіх S-матриць над полем k позначимо через $\mathcal{M}_k(S)$. Далі позначимо через $\mathcal{M}_k^<(S)$ множину всіх матриць $N \in \mathcal{M}_k(S)$, таких, що $N_{xy} = 0$ кожного разу, коли $x \nleq y$.

Має місце наступна теорема, яка дає означення еквівалентності $\perp$-зображень в термінах матричних рівностей.

Теорема 1. *Два $\perp$-зображення $T = (A, B)$ і $T' = (A', B')$ ч. в. множини S еквівалентні тоді і лише тоді, коли існують оборотні матриці P і $N \in \mathcal{M}_k^<(S)$, такі, що виконуються матричні рівності*

$$AN = PA'$$

та

$$N^{-1}B = B'P^{-1},$$

які слід розглядати як рівності блокових матриць (це, зокрема, означає, що в усіх випадках, коли перемножуються дві матриці, їх розбиття відповідно на вертикальні і горизонтальні смуги є узгодженими).

Теорема 1 доводиться таким же чином, як подібне твердження для зображень в'язок напівланцюгів (див. підрозділ 3.1 монографії [3]).

2. Основні результати. Будемо говорити, що частково впорядкована множина S має $\perp$-скінченний (відповідно $\perp$-ручний, $\perp$-дикий) тип, якщо задача про опис $\perp$-зображень S має скінченний (відповідно ручний, дикий) тип.

У цій статті ми доведемо наступні теореми.

Теорема 2. *Частково впорядкована множина S має $\perp$-скінченний тип тоді і лише тоді, коли вона порожня.*

Теорема 3. *Непорожня частково впорядкована множина S має $\perp$-ручний тип, якщо $|S| = 1$ і $\perp$-дикий тип, якщо $|S| > 1$.*

3. Доведення теорем. Доведемо спочатку теорему 2.

Очевидно, що S має $\perp$-скінченний тип, якщо S порожня.

Нехай тепер $S \neq \varnothing$. Покажемо, що S має $\perp$-нескінченний тип. Достатньо, очевидно, вважати, що $|S| = 1$. Легко бачити (якщо використати теорему 1), що $\perp$-зображення (E, B) і (E, C), де E — одинична матриця деякого розміру, еквівалентні тоді і лише тоді, коли матриці B і C подібні; значить S має $\perp$-нескінченний тип.

Теорема 2 доведена.

Переходимо до доведення теореми 3.

Нехай спочатку $|S| = 1$; покладемо $S = \{c\}$. Розглянемо два $\perp$-зображення ч. в. множини S — $T = (A, B)$ і $T' = (A', B')$. Зауважимо, що $A = A_c, B = B_c$ і $A' = A'_c, B' = B'_c$. Згідно теореми 1 $\perp$-зображення T і T' будуть еквівалентними тоді і лише тоді, коли існують оборотні матриці P і N, такі, що $AN = PA'$ і $N^{-1}B = B'P^{-1}$. Це означає, що задача про опис $\perp$-зображень S — це задача про опис зображень сагайдака, що складається із двох вершин 1 і 2 та двох стрілок $1 \to 2$ і $2 \to 1$. Оскільки вказаний сагайдак має ручний тип, то ч. в. множина $S = \{c\}$ має $\perp$-ручний тип.

Нехай тепер $|S| > 1$. Покажемо, що S має $\perp$-дикий тип. Достатньо, очевидно, вважати, що $S = \{1, 2 \,|\, 1 < 2\}$.

Розглянемо $\perp$-зображення $X = \{T_{A,B}, S_{A,B}\}$ ч. в. множини S наступного вигляду:

$$(T_{A,B})_1 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (T_{A,B})_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix},$$

$$(S_{A,B})_1 = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}, \quad (S_{A,B})_2 = \begin{pmatrix} E & 0 \end{pmatrix},$$

де E — одинична матриця і A та B — довільні матриці (які є квадратними і мають той же розмір, що і одинична матриця E). При цьому вважаємо, що в матриці $T_{A,B}$ вертикальна смуга $(T_{A,B})_1$ стоїть лівіше вертикальної смуги $(T_{A,B})_2$, а в матриці $S_{A,B}$ горизонтальна смуга $(S_{A,B})_1$ стоїть вище горизонтальної смуги $(S_{A,B})_2$.

Нехай два такі $\perp$-зображення — $X = \{T_{A,B}, S_{A,B}\}$ і $\overline{X} = \{T_{\overline{A},\overline{B}}, S_{\overline{A},\overline{B}}\}$ — є еквівалентними. Тоді згідно теореми 1 існують оборотні матриці

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{pmatrix},$$

такі, що $T_{A,B}N = PT_{\overline{A},\overline{B}}$ та $S_{A,B}P = NS_{\overline{A},\overline{B}}$.

Оскільки $T_{A,B} = ((T_{A,B})_1 \ (T_{A,B})_2)$ та $T_{\overline{A},\overline{B}} = ((T_{\overline{A},\overline{B}})_1 \ (T_{\overline{A},\overline{B}})_2)$ — одиничні матриці, то перша вказана рівність еквівалентна рівності $P = N$, тобто $P_{11} = N_{11}$, $P_{12} = N_{12}$, $P_{21} = 0$, $P_{22} = N_{22}$. Тоді друга вказана рівність еквівалентна системі наступних рівностей:

$$AN_{11} = N_{11}\overline{A} + N_{12}, \tag{11}$$

$$AN_{12} + BN_{22} = N_{11}\overline{B}, \tag{12}$$

$$N_{11} = N_{22}, \tag{21}$$

$$N_{12} = 0. \tag{22}$$

із рівностей (11) і (22) випливає, що $AN_{11} = N_{11}\overline{A}$, а із рівностей (12), (21) і (22) випливає, що $BN_{11} = N_{11}\overline{B}$; звідси $\overline{A} = (N_{11})^{-1}AN_{11}$ і $\overline{B} = (N_{11})^{-1}BN_{11}$. Отже, якщо $\perp$-зображення $X = \{T_{A,B}, S_{A,B}\}$ і $\overline{X} = \{T_{\overline{A},\overline{B}}, S_{\overline{A},\overline{B}}\}$ еквівалентні, то пари матриць (A, B) і $(\overline{A}, \overline{B})$ подібні. Із викладеного легко бачити, що вірне і обернене твердження. Таким чином, задача про опис $\perp$-зображень S має дикий тип, що і треба було довести.

1. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множества // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.
2. *Дрозд Ю. А.* Матричные задачи и категории матриц // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 144–153.
3. *Бондаренко В. М.* Зображення гельфандових графів. – Київ: Вид-во ін-ту математики НАН України, 2005. – 228 с.

Одержано 10.07.2007