УДК 519.7

А. Ю. Брила (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЯЖНІСТЬ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛЕКСИКОГРАФІЧНО-ПАРЕТІВСЬКОЇ ТА ПАРЕТО-ЛЕКСИКОГРАФІЧНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА ЗВАЖЕНОЮ СУМОЮ РІЗНОВАЖЛИВИХ КРИТЕРІЇВ

In this paper the possibility of search the optimal solutions of lexicographic-pareto and pareto-lexicographic tasks of multicriteria optimization by reduction them to the task of the linear programming is considered.

В даній статті розглядається можливість відшукання розв'язків лексикографічно-паретівської та парето-лексикографічної задач оптимізації шляхом зведення цих задач до задач лінійного програмування.

В даній роботі використовуються поняття, означення і терміни, які введені в [1].

Розглянемо задачу лексикографічно-паретівскої оптимізації:

$$\max{}^{LP}\overline{c}\,(x)\,,\ x \in X. \tag{1}$$

$X \subset R^n$ — множина допустимих розв'язків визначається системою лінійних обмежень.

Цільова функція $\overline{c}\,(x)$, за якою порівнюються допустимі альтернативи $x \in X$, є векторнозначною функцією:

$$\overline{c}\,(x) = (c_1\,(x)\,, c_2\,(x)\,, \ldots, c_q\,(x)),$$

де

$$c_k\,(x) = (c_{k1}\,(x)\,, c_{k2}\,(x)\,, \ldots, c_{kq_k}\,(x)),\ \ k = 1, 2, \ldots, q;$$

$c_{ki}\,(x)$ — лінійна скалярна функція залежна від n змінних, яка є функцією однієї з числових оцінок альтернативи $x \in X$. Тобто, допустимі альтернативи порівнюються за допомогою числових оцінок. Альтернатива $x \in X$ вважається кращою за альтернативу $y \in X$ за кожною з цих оцінок, якщо і тільки якщо значення оцінки для альтернативи x більше за значення цієї оцінки для альтернативи y. Якщо значення оцінки для альтернатив рівні, тоді ці альтернативи вважаються рівноцінними.

Відомо, якщо задача (1) має розв'язки, то серед них є оптимальні розв'язки, які є крайніми точками множини X.

Нехай

$$f_k\,(x) = \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{ki} c_{ki}\,(x), \tag{2}$$

де $\sum\limits_{i=1}^{q_k} \alpha_{ki} = 1$, $\alpha_{ki} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, q_k$, $k = 1, 2, \ldots, q$;

$$f\,(x) = (f_1\,(x)\,, f_2\,(x)\,, \ldots, f_q\,(x)).$$

Розглянемо задачу лексикографічної оптимізації

$$\max{}^{L} f\,(x)\,,\ x \in X. \tag{3}$$

Справедлива теорема.

Теорема 1 ([1]). *Оптимальний розв'язок лексикографічної задачі* (3) *є оптимальним розв'язком лексикографічно-паретівської задачі* (1).

Нехай

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_d(x))$$

— довільна лінійна вектор-функція ($g_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, d$ — лінійні скалярні функції, залежні від n змінних). Розглянемо задачу лексикографічної оптимізації

$$\max{}^L g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_d(x)), \ x \in X. \tag{4}$$

Відомо, якщо задача (4) має оптимальні розв'язки, то серед них є оптимальний розв'язок, який є крайньою точкою множини допустимих розв'язків X. А, отже, для знаходження такого оптимального розв'язку достатньо розглядати тільки ті допустимі альтернативи, які є крайніми точками допустимої множини X. Множину допустимих розв'язків $x \in X$, які є її крайніми точками позначимо через X^V.

Постає питання, чи існує такий фунціонал

$$L(x) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i g_i(x), \ \alpha_i > 0, \ i = 1, 2, \ldots, d, \tag{5}$$

який би представляв лексикографічний порядок віддачі переваги на множині X^V, тобто такий, що множина розв'язків задачі

$$\max L(x), \ x \in X, \tag{6}$$

буде множиною розв'язків задачі (4).

Має місце теорема.

Теорема 2 ([2]). *Якщо множина $X \subset R^n$ — замкнений обмежений опуклий багатогранник з скінченою множиною вершин X^V, а всі часткові критерії лінійні, то існують додатні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$, такі, що множина точок максимуму функціоналу* (5) *на множині X є множиною розв'язків задачі* (4). *Число $\alpha_d > 0$ можна взяти довільним чином, а інші числа $\alpha_{d-1}, \alpha_{d-2}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$ поступово визначити згідно умови*

$$\alpha_r > \frac{1}{\mu_r} \sum_{k=r+1}^{d} \alpha_k M_k,$$

де

$$0 < \mu_r \leq \inf_{\substack{x,y \in X^V \\ g_r(x) \neq g_r(y)}} |g_r(x) - g_r(y)|,$$

$$M_k \geq \max_{x \in X} g_k(x) - \min_{x \in X} g_k(x).$$

Повернемось до розгляду задачі (3). Введемо величини μ^*, M_k^*, m_k^*:

$$0 < \mu^* \leq \inf_{\substack{x,y \in X^V \\ c_{ki}(x) \neq c_{ki}(y)}} |c_{ki}(x) - c_{ki}(y)|, \ i = 1, 2, \ldots, q_k, \ k = 1, 2, \ldots, q, \tag{7}$$

$$M_k^* = \max\{c_{ki}(x) | i = 1, 2, .., q_k,\ x \in X^V\},\ k = 1, 2, \ldots, q, \tag{8}$$
$$m_k^* = \min\{c_{ki}(x) | i = 1, 2, .., q_k,\ x \in X^V\},\ k = 1, 2, \ldots, q. \tag{9}$$

Розглянемо функціонал

$$B\,(x) = \sum_{k=1}^{q} \beta_k f_k\,(x), \tag{10}$$

де β_q — довільне додатне число, а всі інші $\beta_{q-1}, \beta_{q-2}, \ldots, \beta_1$ знаходяться з умови

$$\beta_r > \frac{1}{\mu^*} \sum_{k=r+1}^{q} \beta_k (M_k^* - m_k^*),\ r = q-1, q-2, \ldots, 1. \tag{11}$$

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\max B\,(x) = \sum_{k=1}^{q} \beta_k f_k\,(x),\ x \in X. \tag{12}$$

Теорема 3. *Розв'язок задачі* (12) *є розв'язком лексикографічно-паретівської задачі* (1) *при довільних*

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_{ki} = 1, \quad \alpha_{ki} > 0,\ i = 1, 2, \ldots, q_k,\ k = 1, 2, \ldots, q.$$

Доведення. Покажемо, що фунціонал (10) представляє лексикографічний порядок на множині X^V в задачі (3), тобто, що множина розв'язків задачі (12) є множиною розв'язків задачі (3). Дійсно, за правилами (2), (7)–(9) визначення функції $f_k\,(x)$ і величин μ^*, M_r^*, m_r^* одержимо:

$$\begin{gathered} 0 < \mu^* = \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{ki} \mu^* \le \sum_{i=1}^{q_k} \alpha_{ki} \inf_{\substack{x,y \in X^V \\ c_{ki}(x) \ne c_{ki}(y)}} |c_{ki}\,(x) - c_{ki}\,(y)\,| \le \\ \le \inf_{\substack{x,y \in X^V \\ f_r(x) \ne f_r(y)}} |f_r\,(x) - f_r\,(y)\,|,\ k = 1, 2, \ldots, q-1, \end{gathered} \tag{13}$$

$$M_k^* = \sum_{i=1}^{q} \alpha_{ki} M_k^* \ge \sum_{i=1}^{q} \alpha_{ki} \max_{x \in X^V} c_{ki}\,(x) \ge \max_{x \in X^V} f_k\,(x)\,,\ k = 2, \ldots, q, \tag{14}$$

$$m_k^* = \sum_{i=1}^{q} \alpha_{ki} m_k^* \le \sum_{i=1}^{q} \alpha_{ki} \min_{x \in X^V} c_{ki}\,(x) \le \min_{x \in X^V} f_k\,(x)\,,\ k = 2, \ldots, q. \tag{15}$$

З умов (14), (15) випливає:

$$M_k = M_k^* - m_k^* \ge \max_{x \in X^V} f_k\,(x) - \min_{x \in X^V} f_k\,(x)\,,\ k = 2, \ldots, q. \tag{16}$$

Таким чином, так як виконуються умови (13) і (16), то за теоремою 2 отримуємо, що функціонал (10) представляє лексикографічний порядок на множині X^Vв задачі (3), а, отже, розв'язок задачі (12) є розв'язком задачі (3). Згідно ж теореми 1 розв'язок задачі (3) є розв'язком задачі (1). А, отже, розв'язок задачі (12) є розв'язком задачі (1), тобто розв'язок лексикографічно-паретівської задачі (1) є досяжним за зваженою сумою різноважливих критеріїв. Теорема доведена.

Аналогічне твердження можна сформулювати для парето-лексикографічної задачі оптимізації. В парето-лексикографічній задачі допустимий розв'язок $\hat{x} \in X$ є оптимальним розв'язком цієї задачі, якщо і тільки якщо не існує допустимого розв'язку $x \in X$, що $\bar{c}(x) >^{PL} \bar{c}(\hat{x})$ ($>^{PL}$ — знак відношення "паретівськи-лексикографічно більше"). Ця задача коротко записується так:

$$\max{}^{PL} \bar{c}(x), \ x \in X. \tag{17}$$

Відомо, якщо задача (17) має розв'язки, то серед них є оптимальні розв'язки, які є крайніми точками множини X.

Як показано в [1], не зменшуючи загальності міркувань, можна вважати, що всі векторні функції $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_q(x)$ мають одне і те ж число компонент, тобто $q_1 = q_2 = \ldots = q_q = p$.

Розглянемо задачу лексикографічної максимізації

$$\max{}^{L} l(\bar{c}(x)), \ x \in X, \tag{18}$$

де

$$l(\bar{c}(x)) = \alpha_1 c_1(x) + \alpha_2 c_2(x) + \cdots + \alpha_q c_q(x), \ \alpha_k > 0, \ k = 1, 2, \ldots, q, \ \sum_{k=1}^{q} \alpha_q = 1. \tag{19}$$

Справедлива теорема.

Теорема 4 ([1]). *Оптимальний розв'язок задачі* (18) *є оптимальним розв'язком задачі* (17).

Враховуючи, що

$$c_k(x) = (c_{k1}(x), c_{k2}(x), \ldots, c_{kq_k}(x)), k = 1, 2, \ldots, q$$

з (19) одержимо:

$$l(\bar{c}(x)) = (h_1(x), h_2(x), \ldots, h_p(x)),$$

де $h_i(x) = \sum\limits_{k=1}^{q} \alpha_k c_{ki}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$, $\sum\limits_{k=1}^{q} \alpha_k = 1$.

Введемо величини M_i^{**} і m_i^{**}:

$$M_i^{**} = \max\{c_{ki}(x) | k = 1, 2, .., q, \ x \in X^V\}, \ i = 1, 2, \ldots, p, \tag{20}$$

$$m_i^{**} = \min\{c_{ki}(x) | k = 1, 2, .., q, \ x \in X^V\}, \ i = 1, 2, \ldots, p. \tag{21}$$

Нехай

$$H(x) = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i h_i(x), \tag{22}$$

де γ_p — довільне додатне число, а всі інші $\gamma_{p-1}, \gamma_{p-2}, \ldots, \gamma_1$ знаходяться згідно умови

$$\gamma_r > \frac{1}{\mu^*} \sum_{i=r+1}^{p} \gamma_i (M_i^{**} - m_i^{**}), \ r = p-1, p-2, \ldots, 1. \tag{23}$$

Розглянемо задачу лінійного програмування

$$\max H(x) = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i h_i(x), \ x \in X. \tag{24}$$

Теорема 5. *Розв'язок задачі* (24) *є розв'язком парето-лексикографічної задачі* (17) *при довільних*

$$\alpha_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, q,\ \sum_{k=1}^{q} \alpha_k = 1.$$

Дана теорема доводиться аналогічно теоремі 3. Отже, розв'язок парето-лексикографічної задачі (17) є досяжним за зваженою сумою різноважливих критеріїв.

1. *Червак Ю. Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. – 312 с.
2. *Подиновский В. В., Гаврилов В. М.* Опимизация по последовательно применяемым критериям.— М.: Наука, 1975. – 192 с.

Одержано 10.05.2007