

УДК 512.547.25

П. М. Гудивок, М. П. Желізняк (Ужгородський нац. ун-т)

**ПРО НЕРОЗКЛАДНІ МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ
СКІНЧЕННИХ p -ГРУП НАД ЛОКАЛЬНИМИ ОБЛАСТЯМИ
ЦІЛІСНОСТІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ**

It's making up clear in the paper, when an finite p -group has a infinite number of nonequivalent indecomposable matrix representations of any high degree over some local rings of characteristic zero.

Виясняється, коли скінченна p -група має нескінченне число нееквівалентних нерозкладних матричних зображень як завгодно високого степеня над деякими локальними кільцями характеристики нуля.

Роггенкамп [1] показав, що множина нееквівалентних нерозкладних матричних K -зображень скінченної групи G порядку $|G| > 1$, степені яких не перевищують порядок групи G , нескінченна, якщо K така нетерова область цілісності характеристики нуля, у якої існує такий простий ідеал P , що факторкільце K/P не є полем і $|G| \equiv 0 \pmod{P}$.

Лема 1 ([2]). *Нехай K — комутативне кільце з одиницею, G — скінченна група, $\Gamma : g \rightarrow \Gamma(g)$ — матричне K -зображення групи G ($g \in G, \Gamma(g) \in GL(n, K)$) і $W(\Gamma) = \{C \in M(n, K) \mid C\Gamma(g) = \Gamma(g)C, g \in G\}$, де $M(n, K)$ — множина всіх матриць порядку n над кільцем K . Якщо $W(\Gamma)$ — локальне кільце, то Γ є нерозкладним матричним K -зображенням групи G .*

Теорема 1. *Нехай G — скінченна нециклічна p -група, K — локальна область цілісності характеристики нуля з полем лишків характеристики p , $\varepsilon \in K$ ($\varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1$) і $K/(1 - \varepsilon)K$ — нескінченне кільце. Тоді число нееквівалентних нерозкладних матричних K -зображень степеня $4n$ групи G нескінченне (n — довільне натуральне число).*

Доведення. Очевидно, теорему досить довести для абелевої групи G типу (p, p) : $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ ($a^p = b^p = e$).

Нехай E_n — одинична матриця порядку n і $I_n(\lambda)$ ($\lambda \in K$) — клітка Жордана порядку n над кільцем K з елементом λ по головній діагоналі.

Неважко перевірити, що відображення $\Gamma(\lambda)$ вигляду:

$$\begin{aligned}
 a &\rightarrow \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & \varepsilon E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} = A, \\
 b &\rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda) \\ 0 & E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} = B(\lambda)
 \end{aligned} \tag{1}$$

є матричним зображенням групи G над кільцем K .

Покажемо, що при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin (1 - \varepsilon)K$ зображення $\Gamma(\lambda_1)$ і $\Gamma(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K . Припустимо, що зображення $\Gamma(\lambda_1)$ і $\Gamma(\lambda_2)$ K -еквівалентні. Тоді існує така оборотна матриця C над кільцем K , що

$$AC = CA, \tag{2}$$

$$B(\lambda_1)C = CB(\lambda_2). \tag{3}$$

Запишемо матрицю C у вигляді $C = \|C_{ij}\|$, де C_{ij} — матриця порядку n ($i, j = 1, \dots, 4$). Тоді із (1) і (2) одержимо:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & \varepsilon E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & \varepsilon E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} C_{11} + C_{31} & C_{12} + C_{32} & C_{13} + C_{33} & C_{14} + C_{34} \\ \varepsilon C_{21} + C_{41} & \varepsilon C_{22} + C_{42} & \varepsilon C_{23} + C_{43} & \varepsilon C_{24} + C_{44} \\ \varepsilon C_{31} & \varepsilon C_{32} & \varepsilon C_{33} & \varepsilon C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}\varepsilon & C_{11} + C_{13}\varepsilon & C_{12} + C_{14} \\ C_{21} & C_{22}\varepsilon & C_{21} + C_{23}\varepsilon & C_{22} + C_{24} \\ C_{31} & C_{32}\varepsilon & C_{31} + C_{33}\varepsilon & C_{32} + C_{34} \\ C_{41} & C_{42}\varepsilon & C_{41} + C_{43}\varepsilon & C_{42} + C_{44} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Звідси маємо:

$$C_{31} = 0, \quad C_{42} = 0, \tag{4}$$

$$C_{11} \equiv C_{33} \pmod{(1 - \varepsilon)K}, \quad C_{44} \equiv C_{22} \pmod{(1 - \varepsilon)K}. \tag{5}$$

Далі із (1) і (3) дістаємо:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda_1) \\ 0 & E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & C_{32} & C_{11} & C_{34} \\ C_{41} & 0 & C_{43} & C_{22} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & C_{32} & C_{11} & C_{34} \\ C_{41} & 0 & C_{43} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda_2) \\ 0 & E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon C_{11} + I_n(\lambda_1)C_{41} & \varepsilon C_{12} & \varepsilon C_{13} + I_n(\lambda_1)C_{43} & \varepsilon C_{14} + I_n(\lambda_1)C_{22} \\ C_{21} & C_{22} + C_{32} & C_{23} + C_{11} & C_{24} + C_{34} \\ 0 & \varepsilon C_{32} & \varepsilon C_{11} & \varepsilon C_{34} \\ C_{41} & 0 & C_{43} & C_{22} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} C_{11}\varepsilon & C_{12} & C_{12} + \varepsilon C_{13} & C_{11}I_n(\lambda_2) + C_{14} \\ C_{21}\varepsilon & C_{22} & C_{22} + \varepsilon C_{23} & C_{21}I_n(\lambda_2) + C_{24} \\ 0 & C_{32} & C_{32} + C_{11}\varepsilon & C_{34} \\ C_{41}\varepsilon & 0 & C_{43}\varepsilon & C_{41}I_n(\lambda_2) + C_{22} \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності маємо:

$$C_{41} = C_{21} = C_{32} = C_{12} = C_{43} = C_{34} = 0, \quad (6)$$

$$C_{22} \equiv C_{11} \pmod{(1 - \varepsilon)K}, \quad (7)$$

$$I_n(\lambda_1)C_{22} \equiv C_{11}I_n(\lambda_2) \pmod{(1 - \varepsilon)K}. \quad (8)$$

З (5) і (7) випливає:

$$C_{11} \equiv C_{22} \equiv C_{33} \equiv C_{44} \pmod{(1 - \varepsilon)K}. \quad (9)$$

Тоді із (8) і (9) одержуємо, що

$$I_n(\lambda_1)C_{11} \equiv C_{11}I_n(\lambda_2) \pmod{(1 - \varepsilon)K}. \quad (10)$$

Оскільки $\lambda_1 - \lambda_2 \notin (1 - \varepsilon)K$, то C_{11} — необоротна матриця над кільцем K . Згідно (4), (6) і (9)

$$C \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & C_{14} \\ 0 & C_{11} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K}, \quad (11)$$

де $\text{Rad}K$ — радикал Джекобсона кільця K .

Використовуючи (10) і (11), одержимо, що C — необоротна матриця над кільцем K . Із отриманого протиріччя випливає, що зображення $\Gamma(\lambda_1)$ і $\Gamma(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin (1 - \varepsilon)K$.

Далі покажемо, що $\Gamma(\lambda)$ є нерозкладним K -зображенням групи G . Якщо в (2) покласти $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і вважати, що C — довільна матриця порядку $4n$ над кільцем K , то, використовуючи (2)-(11), одержимо:

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K},$$

де $\alpha \in K$. Тоді матриця C або $E_{4n} - C$ є оборотною над кільцем K . З леми 1 отримаємо, що $\Gamma(\lambda)$ є нерозкладним зображенням групи G над кільцем K . Отже, існує нескінченна кількість нееквівалентних нерозкладних матричних K -зображень степеня $4n$ групи G . Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай $G = \langle a \rangle$ — скінченна p -група порядку $|G| > 1$ ($p > 3$), K — локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики p , $\varepsilon \in K$ ($\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$) і $K/(1 - \varepsilon)K$ — нескінченне кільце. Тоді число нееквівалентних нерозкладних матричних K -зображень степеня $4n$ групи G нескінченне (n — довільне натуральне число).*

Доведення. Очевидно, теорему досить довести для групи $G = \langle a \rangle$ ($a^p = e$). Розглянемо відображення $\Delta(\lambda)$ вигляду:

$$a \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & E_n & I_n(\lambda) \\ 0 & \varepsilon^2 E_n & E_n & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon^3 E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} = A(\lambda), \quad (12)$$

де E_n — одинична матриця порядку n і $I_n(\lambda)$ ($\lambda \in K$) — клітка Жордана порядку n над кільцем K з елементом λ по головній діагоналі.

Неважко перевірити, що відображення $\Delta(\lambda)$ є матричним K -зображенням групи G . Покажемо, що при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin (1 - \varepsilon)K$ зображення $\Delta(\lambda_1)$ і $\Delta(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K . Припустимо протилежне. Тоді існує така оборотна матриця C над кільцем K , що

$$A(\lambda_1)C = CA(\lambda_2). \quad (13)$$

Запишемо матрицю C у вигляді $C = \|C_{ij}\|$, де C_{ij} — матриця порядку n ($i, j = 1, \dots, 4$).

Тоді, використовуючи (12) і (13), маємо:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & E_n & I_n(\lambda_1) \\ 0 & \varepsilon^2 E_n & E_n & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon^3 E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & 0 & E_n & I_n(\lambda_2) \\ 0 & \varepsilon^2 E_n & E_n & E_n \\ 0 & 0 & \varepsilon^3 E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \varepsilon C_{11} + C_{31} + I_n(\lambda_1)C_{41} & C_{12} + C_{32} + I_n(\lambda_1)C_{42} & C_{13} + C_{33} + I_n(\lambda_1)C_{43} & C_{14} + C_{34} + I_n(\lambda_1)C_{44} \\ \varepsilon^2 C_{21} + C_{31} + C_{41} & \varepsilon^2 C_{22} + C_{32} + C_{42} & \varepsilon^2 C_{23} + C_{33} + C_{43} & \varepsilon^2 C_{24} + C_{34} + C_{44} \\ \varepsilon^3 C_{31} & \varepsilon^3 C_{32} & \varepsilon^3 C_{33} & \varepsilon^3 C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} C_{11}\varepsilon & C_{12}\varepsilon^2 & C_{11} + C_{12} + C_{13}\varepsilon^3 & C_{11}I_n(\lambda_2) + C_{12} + C_{14} \\ C_{21}\varepsilon & C_{22}\varepsilon^2 & C_{21} + C_{22} + C_{23}\varepsilon^3 & C_{21}I_n(\lambda_2) + C_{22} + C_{24} \\ C_{31}\varepsilon & C_{32}\varepsilon^2 & C_{31} + C_{32} + C_{33}\varepsilon^3 & C_{31}I_n(\lambda_2) + C_{32} + C_{34} \\ C_{41}\varepsilon & C_{42}\varepsilon^2 & C_{41} + C_{42} + C_{43}\varepsilon^3 & C_{41}I_n(\lambda_2) + C_{42} + C_{44} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Звідси дістаємо:

$$C_{41} = C_{42} = C_{31} = C_{32} = C_{21} = C_{12} = C_{43} = C_{34} = 0, \quad (14)$$

Враховуючи (14), одержимо:

$$C_{22} \equiv C_{33} \pmod{(1 - \varepsilon)K}, \quad (15)$$

$$C_{11} \equiv C_{33} \pmod{(1 - \varepsilon)K}, \quad (16)$$

$$C_{44} \equiv C_{22} \pmod{(1 - \varepsilon)K}, \quad (17)$$

$$I_n(\lambda_1)C_{44} \equiv C_{11}I_n(\lambda_2) \pmod{(1 - \varepsilon)K}. \quad (18)$$

Із (15)-(18) випливає, що

$$C_{11} \equiv C_{22} \equiv C_{33} \equiv C_{44} \pmod{(1 - \varepsilon)K}. \quad (19)$$

Тоді

$$I_n(\lambda_1)C_{11} \equiv C_{11}I_n(\lambda_2) \pmod{(1 - \varepsilon)K}. \quad (20)$$

Так як $\lambda_1 - \lambda_2 \notin (1 - \varepsilon)K$, то C_{11} — необоротна матриця над кільцем K . Із (14) і (19) дістаємо, що

$$C \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & C_{14} \\ 0 & C_{11} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K}. \quad (21)$$

Отже, C — необоротна матриця над кільцем K . Із одержаного протиріччя випливає, що K -зображення $\Delta(\lambda_1)$ і $\Delta(\lambda_2)$ не є еквівалентними над кільцем K при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin (1 - \varepsilon)K$.

Далі покажемо, що $\Delta(\lambda)$ є нерозкладним K -зображенням групи G . В (13) покладемо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і будемо вважати, що C — довільна матриця порядку $4n$ над кільцем K . Тоді, використовуючи (13)-(21), маємо:

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K},$$

де $\alpha \in K$. Очевидно, матриця C або $E_{4n} - C$ є оборотною над кільцем K . З леми 1 отримаємо, що $\Delta(\lambda)$ є нерозкладним зображенням групи G над кільцем K . Отже, існує нескінченна кількість нееквівалентних нерозкладних матричних K -зображень степеня $4n$ групи $G = \langle a \rangle$. Теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай G — скінченна група порядку 3^r ($r \geq 1$), K — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики три ($\varepsilon \in K$, $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon \neq 1$). Якщо $(1 - \varepsilon)K \neq \text{Rad}K$ і $K/\text{Rad}K$ — нескінченне поле, тоді число нееквівалентних нерозкладних матричних K -зображень групи G степеня $3n$ нескінченне (n — довільне натуральне число).*

Доведення. Очевидно, теорему досить довести для випадку, коли $G = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 3.

Оскільки $(1 - \varepsilon)K$ не є максимальним ідеалом кільця K , то існує такий необоротний елемент t кільця K , що $t \notin (1 - \varepsilon)K$. Неважко показати, що відображення

$$\Delta_1(\lambda) : a \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon^2 E_n & t E_n & I_n(\lambda) \\ 0 & \varepsilon E_n & t E_n \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} = D(\lambda) \quad (22)$$

є матричним K -зображенням групи $G = \langle a \rangle$.

Покажемо, що при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \text{Rad}K$ зображення $\Delta_1(\lambda_1)$ і $\Delta_1(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K . Припустимо, що при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \text{Rad}K$ зображення $\Delta_1(\lambda_1)$ і $\Delta_1(\lambda_2)$ K -еквівалентні. Тоді існує така оборотна матриця C над кільцем K , що

$$D(\lambda_1)C = CD(\lambda_2). \quad (23)$$

Представимо матрицю C у вигляді:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

де C_{ij} — матриця порядку n ($i, j = 1, 2, 3$).

Використовуючи (22)-(24), одержимо:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \varepsilon^2 E_n & tE_n & I_n(\lambda_1) \\ 0 & \varepsilon E_n & tE_n \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^2 E_n & tE_n & I_n(\lambda_2) \\ 0 & \varepsilon E_n & tE_n \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \varepsilon^2 C_{11} + tC_{21} + I_n(\lambda_1)C_{31} & \varepsilon^2 C_{12} + tC_{22} + I_n(\lambda_1)C_{32} & \varepsilon^2 C_{13} + tC_{23} + I_n(\lambda_1)C_{33} \\ \varepsilon C_{21} + tC_{31} & \varepsilon C_{22} + tC_{32} & \varepsilon C_{23} + tC_{33} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 C_{11} & tC_{11} + \varepsilon C_{12} & C_{11}I_n(\lambda_2) + tC_{12} + C_{13} \\ \varepsilon^2 C_{21} & tC_{21} + \varepsilon C_{22} & C_{21}I_n(\lambda_2) + tC_{22} + C_{23} \\ \varepsilon^2 C_{31} & tC_{31} + \varepsilon C_{32} & C_{31}I_n(\lambda_2) + tC_{32} + C_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$C_{21} = C_{31} = C_{32} = 0, \quad (25)$$

$$C_{11} \equiv C_{22} \equiv C_{33} \pmod{\text{Rad}K}, \quad (26)$$

$$I_n(\lambda_1)C_{33} \equiv C_{11}I_n(\lambda_2) \pmod{\text{Rad}K}. \quad (27)$$

Із (26) і (27) одержимо, що

$$I_n(\lambda_1)C_{11} \equiv C_{11}I_n(\lambda_2) \pmod{\text{Rad}K}. \quad (28)$$

Так як $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \text{Rad}K$, то C_{11} — необоротна матриця над кільцем K .

Із (25) і (26) дістаємо, що

$$C \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{11} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{11} \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K}. \quad (29)$$

Отже, C — необоротна матриця над кільцем K . Із одержаного протиріччя випливає, що K -зображення $\Delta_1(\lambda_1)$ і $\Delta_1(\lambda_2)$ не є еквівалентними над кільцем K при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \text{Rad}K$.

Далі покажемо, що $\Delta_1(\lambda)$ є нерозкладним K -зображенням групи $G = \langle a \rangle$. Якщо в (23) покласти $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і вважати, що C — довільна матриця порядку $3n$ над кільцем K , то, використовуючи (23)-(29), одержимо:

$$C \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K},$$

де $\alpha \in K$. Тоді матриця C або $E_{3n} - C$ є оборотною над кільцем K . З леми 1 дістанемо, що $\Delta_1(\lambda)$ є нерозкладним зображенням групи $G = \langle a \rangle$ над кільцем K . Отже, існує нескінченна кількість нееквівалентних нерозкладних матричних K -зображень степеня $3n$ групи $G = \langle a \rangle$. Теорема доведена.

Теорема 4. *Нехай $G = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 2^s ($s > 1$) і K — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики два. Якщо $2K \neq \text{Rad}K$ і $K/\text{Rad}K$ — нескінченне поле, то число нееквівалентних нерозкладних матричних K -зображень степеня $4n$ групи G нескінченне (n — довільне натуральне число).*

Доведення. Очевидно, теорему досить довести для випадку, коли $G = \langle a \rangle$ — циклічна група порядку 4.

Оскільки $2K$ не є максимальним ідеалом кільця K , то існує такий необоротний елемент t кільця K , що $t \notin 2K$. Неважко показати, що відображення

$$\Delta_2(\lambda) : a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_n & tE_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda) \\ 0 & 0 & -E_n & tE_n \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} = R(\lambda) \quad (30)$$

є матричним K -зображенням групи $G = \langle a \rangle$.

Покажемо, що при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \text{Rad}K$ зображення $\Delta_2(\lambda_1)$ і $\Delta_2(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K . Припустимо, що при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \text{Rad}K$ зображення $\Delta_2(\lambda_1)$ і $\Delta_2(\lambda_2)$ K -еквівалентні. Тоді існує така оборотна матриця C над кільцем K , що

$$R(\lambda_1)C = CR(\lambda_2). \quad (31)$$

Представимо матрицю C у вигляді:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

де C_{ij} — матриця порядку n ($i, j = 1, 2, 3, 4$).

Використовуючи (30)-(32), одержимо:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_n & tE_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda) \\ 0 & 0 & -E_n & tE_n \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_n & tE_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 & I_n(\lambda) \\ 0 & 0 & -E_n & tE_n \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} -C_{21} + tC_{31} & -C_{22} + tC_{32} & -C_{23} + tC_{33} & -C_{24} + tC_{34} \\ C_{11} + I_n(\lambda_1)C_{41} & C_{12} + I_n(\lambda_1)C_{42} & C_{13} + I_n(\lambda_1)C_{43} & C_{14} + I_n(\lambda_1)C_{44} \\ -C_{31} + tC_{41} & -C_{32} + tC_{42} & -C_{33} + tC_{43} & -C_{34} + tC_{44} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{12} & -C_{11} & tC_{11} - C_{13} & C_{12}I_n(\lambda_2) + tC_{13} + C_{14} \\ C_{22} & -C_{21} & tC_{21} - C_{23} & C_{22}I_n(\lambda_2) + tC_{23} + C_{24} \\ C_{32} & -C_{31} & tC_{31} - C_{33} & C_{32}I_n(\lambda_2) + tC_{33} + C_{34} \\ C_{42} & -C_{41} & tC_{41} - C_{43} & C_{42}I_n(\lambda_2) + tC_{43} + C_{44} \end{pmatrix}.$$

Звідси одержуємо:

$$C_{41} = C_{42} = C_{43} = C_{31} = C_{32} = 0, \tag{33}$$

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = -C_{21}, \tag{34}$$

$$C_{33} \equiv C_{44} \pmod{\text{Rad}K}, \tag{35}$$

$$C_{11} - C_{21} \equiv C_{33} \pmod{\text{Rad}K}, \tag{36}$$

$$-C_{24} + tC_{34} = C_{12}I_n(\lambda_2) + tC_{13} + C_{14}, \tag{37}$$

$$C_{22}I_n(\lambda_2) + tC_{23} + C_{24} = C_{14} + I_n(\lambda_1)C_{44}. \tag{38}$$

Додамо (37) і (38):

$$C_{22}I_n(\lambda_2) + tC_{23} + tC_{34} = C_{12}I_n(\lambda_2) + tC_{13} + I_n(\lambda_1)C_{44} + 2C_{14},$$

$$(C_{22} - C_{12})I_n(\lambda_2) + tC_{23} + tC_{34} = I_n(\lambda_1)C_{44} + tC_{13} + 2C_{14},$$

$$(C_{22} - C_{12})I_n(\lambda_2) \equiv I_n(\lambda_1)C_{44} \pmod{\text{Rad}K}. \tag{39}$$

Із (34), (35) і (36) маємо:

$$C_{44} \equiv C_{33} \equiv C_{11} + C_{12} \equiv (C_{22} - C_{12}) \pmod{\text{Rad}K}. \tag{40}$$

Тоді із (39) і (40) випливає, що

$$C_{44}I_n(\lambda_2) \equiv I_n(\lambda_1)C_{44} \pmod{\text{Rad}K}. \tag{41}$$

Так як $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \text{Rad}K$, то C_{44} — необоротна матриця над кільцем K .

Із (33), (34) і (40) дістаємо, що

$$C \equiv \begin{pmatrix} C_{44} + C_{12} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{44} + C_{12} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{44} & C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K}. \tag{42}$$

Отже, C — необоротна матриця над кільцем K . Із одержаного протиріччя випливає, що K -зображення $\Delta_2(\lambda_1)$ і $\Delta_2(\lambda_2)$ не еквівалентні над кільцем K при $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \text{Rad}K$.

Далі покажемо, що $\Delta_2(\lambda)$ є нерозкладним K -зображенням групи G . Якщо в (31) покласти $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і вважати, що C — довільна матриця порядку $4n$ над кільцем K , то, використовуючи (41), одержимо:

$$C_{44} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K}, \quad (43)$$

де $\alpha \in K$. Нехай

$$D \equiv \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K},$$

тоді

$$\begin{aligned} D^{-1} &\equiv \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K}. \\ &\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} + C_{11} & C_{12} + C_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} C_{11} + C_{12} & C_{12} \\ 0 & C_{11} + C_{12} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} C_{44} & C_{12} \\ 0 & C_{44} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K}. \end{aligned} \quad (44)$$

Із (42)-(44) дістаємо, що матриця C або $E_{4n} - C$ є оборотною над кільцем K , оскільки існує така оборотна матриця D над кільцем K , що

$$D^{-1}CD \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} \pmod{\text{Rad}K}.$$

Звідси та з леми 1 отримаємо, що $\Delta_2(\lambda)$ є нерозкладним зображенням групи G над кільцем K . Отже, група G має нескінченну кількість нееквівалентних нерозкладних матричних K -зображень степеня $4n$. Теорема доведена.

Теорема 5. *Нехай G — скінченна p -група порядку $|G| > 1$ ($p \neq 2$), K — локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики p , $\varepsilon \in K$ ($\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$). Якщо K не є дискретно нормованим кільцем, то число нееквівалентних нерозкладних матричних K -зображень степеня $3n$ групи G нескінченне (n — довільне натуральне число).*

Доведення. Очевидно, теорему досить довести для випадку, коли $G = \langle a \rangle$ — циклічна p -група порядку $p > 2$.

Легко бачити, що в кільці K існує такий елемент $u \neq 0$, що $u \in \text{Rad}K$ і $(u, p) = 1$. Розглянемо матричні K -зображення Γ_i ($i \in \mathbb{N}$) групи $G = \langle a \rangle$ такого

вигляду:

$$\Gamma_i : a \rightarrow \Gamma_i(a) = \begin{pmatrix} \varepsilon E_n & u^i E_n & I_n(1) \\ 0 & \varepsilon^2 E_n & u^i E_n \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Покажемо, що при $i < j$ зображення Γ_i і Γ_j не еквівалентні над кільцем K . Припустимо, що зображення Γ_i і Γ_j K -еквівалентні. Тоді існує така оборотна матриця C над кільцем K , що

$$\Gamma_i(a)C = C\Gamma_j(a). \quad (46)$$

Очевидно,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}, \quad (47)$$

де C_{ij} — матриця порядку n ($1 \leq i, j \leq 3$).

Із (46) і (47) дістаємо:

$$\begin{aligned} u^j C_{11} + \varepsilon^2 C_{12} &= \varepsilon C_{12} + u^i C_{22}, \\ u^j C_{22} + C_{23} &= \varepsilon^2 C_{23} + u^i C_{33}, \\ C_{11} I_n(1) + u^j C_{12} + C_{13} &= \varepsilon C_{13} + u^i C_{23} + I_n(1) C_{33}. \end{aligned} \quad (48)$$

Отже,

$$C_{22} = u^{j-i} C_{11} + (\varepsilon^2 - \varepsilon) C'_{12},$$

де $C_{12} = u^i C'_{12}$. Звідси випливає, що $C_{22} \equiv 0 \pmod{\text{Rad}K}$, тобто C — необоротна матриця над кільцем K . Із отриманого протиріччя дістаємо, що зображення Γ_i і Γ_j при $i \neq j$ не еквівалентні над кільцем K .

Покажемо далі, що Γ_i — нерозкладне K -зображення групи $G = \langle a \rangle$. Покладемо в (46) $i = j$ і будемо вважати, що C — довільна матриця порядку $3n$ над кільцем K . Тоді із (48) одержуємо:

$$\begin{aligned} C_{33} &\equiv C_{22} \equiv C_{11} \pmod{\text{Rad}K}, \\ C_{11} I_n(1) &\equiv I_n(1) C_{11} \pmod{\text{Rad}K}. \end{aligned} \quad (49)$$

Із (47), (49) і леми 1 випливає, що Γ_i — нерозкладне матричне K -зображення групи $G = \langle a \rangle$. Теорема доведена.

Теорема 6. *Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G| > 2$, K — локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Якщо K не є дискретно нормованим кільцем, то число нееквівалентних нерозкладних матричних K -зображень степеня $4n$ групи G нескінченне (n — довільне натуральне число).*

Доведення. Так як $K/2K$ — нескінченне кільце, то із теореми 1 випливає доведення теореми 6 у випадку, коли G — нециклічна 2-група.

Нехай далі $G = \langle a \rangle$ — циклічна 2-група порядку $2^s (s > 1)$. Розглянемо наступні матричні K -зображення Γ_i ($i \in \mathbb{N}$) групи $G = \langle a \rangle$:

$$\Gamma_i : a \rightarrow \Gamma_i(a) = \begin{pmatrix} 0 & -E_n & u^i E_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 & I_n(1) \\ 0 & 0 & -E_n & u^i E_n \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad (50)$$

де $u \in \text{Rad}K$, $u \neq 0$, $(u, 2) = 1$.

Очевидно,

$$\Delta_i : a \rightarrow \begin{pmatrix} -E_n & u^i E_n \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

є матричним K -зображенням групи $G = \langle a \rangle$ і при $i \neq j$ зображення Δ_i та Δ_j не будуть K -еквівалентними. Звідси випливає, що при $i \neq j$ зображення Γ_i і Γ_j не будуть K -еквівалентними.

Залишилось показати, що Γ_i — нерозкладне матричне K -зображення групи $G = \langle a \rangle$. Нехай C — така матриця порядку $4n$ над кільцем K , що

$$\Gamma_i(a)C = C\Gamma_i(a). \quad (51)$$

Очевидно,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Тоді із (51) і (52) одержимо:

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22}, & C_{12} &= -C_{21}, \\ C_{33}u^i + 2C_{34} &= u^i C_{44}, \\ C_{11}u^i - C_{13} &= u^i C_{33} - C_{23}, \\ C_{21}u^i - C_{23} &= C_{13}, \\ C_{12}I_n(1) + C_{13}u^i + C_{14} &= -C_{24} + u^i C_{34}, \\ C_{22}I_n(1) + u^i C_{23} + C_{24} &= C_{14} + I_n(1)C_{44}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} C_{44} &\equiv C_{33} \pmod{\text{Rad}K}, \\ C_{33} &\equiv (C_{11} + C_{21}) \pmod{\text{Rad}K}, \\ (C_{21} + C_{11})I_n(1) &\equiv I_n(1)C_{44} \pmod{\text{Rad}K}. \end{aligned}$$

Отже,

$$C_{44}I_n(1) \equiv I_n(1)C_{44} \pmod{\text{Rad}K}.$$

Звідси та з доведення теореми 4 дістаємо, що Γ_i — нерозкладне матричне K -зображення групи $G = \langle a \rangle$. Теорема доведена.

1. Roggenkamp K. W. Gruppenringe von unendlichem Darstellungstyp // Math. Z. — 1967. — **96**, №5. — Р. 393–398.
2. Каиш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981. — 368 с.

Одержано 21.09.2007