УДК 512.64

С. М. Дяченко (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченко)

ПАРИ АЛГЕБР СКІНЧЕННОГО ТИПУ

In this paper we consider a pair of finite-dimensional algebras and related matrix problem. We study tame type matrix problems.

У цій роботі ми розглядаємо матричну задачу, пов'язану з парою скінченновимірних алгебр. Ми досліджуємо, для яких алгебр задача буде ручного типу.

Нехай k — поле і Λ, Λ' — скінченновимірні алгебри над k. В цій статті ми розглядаємо лише базисні алгебри, тобто алгебри Λ, для яких $\Lambda/Rad\Lambda \cong k\oplus k\oplus\ldots\oplus k$; такі алгебри можна задати графом зі співвідношеннями (дивись [1]).

Нехай ми маємо $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ — орієнтований граф. Γ_0 — множина його вершин, Γ_1 — множина його стрілок.Для кожної стрілки $e \in \Gamma_1$ позначимо через $\alpha(e) \in \Gamma_0$ її початок, і через $\beta(e) \in \Gamma_0$ її кінець.

Шляхом в орієнтованому графі називаємо послідовність стрілок $w = e_1e_2\ldots$ $\ldots e_n$, таку що $\beta(e_i) = \alpha(e_{i+1}),\ i = 1, \ldots, n-1$. Початок та кінець шляху визначаються так: $\alpha(w) = \alpha(e_1)$, $\beta(w) = \beta(e_n)$. Кожну вершину графа ми також вважаємо шляхом і приписуємо такому шляху довжину нуль.

У подальшому граф Γ вважаємо скінченним, тобто $|\Gamma_0| = s < \infty$, $|\Gamma_1| < \infty$. Із таким графом асоціюється k-алгебра шляхів $\Lambda(\Gamma)$. Її базисом є множина шляхів графа скінченної довжини. Множення в алгебрі задається на елементах базису як приписування шляхів, якщо це можливо і нульовим чином в іншому разі.

Алгебра, задана графом зі співвідношеннями — це факторалгебра алгебри $\Lambda(\Gamma)$ за ідеалом I таким, що $I \subset J^2$, де J — ідеал, породжений всіма стрілками графа.

Розглянемо наступну матричну задачу. А саме ми розглянемо задачу про опис класів ізоморфних об'єктів категорії $\mathcal{B}$, такої що $Ob\,\mathcal{B} = \{(f : P' \to P)\}$, де P' — проективний модуль над алгеброю Λ', P — проективний модуль над алгеброю Λ, f — k-лінійне відображення. Морфізмом між двома об'єктами $(f : P' \to P)$ і $(g : Q' \to Q)$ є пара відображень(ϕ, ψ), що складається з Λ'-лінійного відображення $\phi : P' \to Q'$ і Λ-лінійного відображення $\psi : P \to Q$, таких що $\phi g = f\psi$.

У цій статті описані пари скінченновимірних алгебр (Λ', Λ) для яких вказана задача є ручною.

Шляхом вибору базису модулів P' і P над полем k ми можемо поставити у відповідність відображенню f прямокутну матрицю над полем k.

Нехай базис алгебри Λ' складається із шляхів $\{v_i \mid i = 1\ldots l\}$, а базис алгебри Λ складається із шляхів $\{w_i \mid i = 1\ldots n\}$, тоді ми маємо наступну матричну задачу. Маємо прямокутну матрицю над полем k, яка розбита на горизонтальні та вертикальні смуги. Для кожного елемента базису Λ' — горизонтальна смуга, для кожного елемента базису Λ — вертикальна смуга. При цьому, якщо $\alpha(v_i) = \alpha(v_j)$ то розмірність (кількість рядків) смуги v_i рівна розмірності смуги v_j; якщо $\beta(w_i) = \beta(w_j)$ то розмірність (кількість стовпчиків) смуги w_i рівна розмірності смуги w_j. Допустимими перетвореннями є наступні перетворення:

1) можна робити будь-яке елементарне перетворення рядків горизонтальної смуги v_i причому, якщо $\alpha(v_j) = \alpha(v_i)$ то таке ж саме елементарне перетворення треба зробити із рядками горизонтальної смуги v_j;

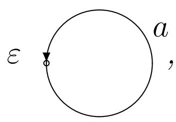
2) можна робити будь-яке елементарне перетворення із стовпцями вертикальної смуги w_i, причому, якщо $\beta(w_j) = \beta(w_i)$ то таке ж саме елементарне перетворення треба зробити із стовпцями вертикальної смуги w_j;

3) можна додавати рядок горизонтальної смуги v_i, помножений на елемент поля, до рядка горизонтальної смуги v_j, якщо $v_m v_i = v_j$ — добуток елементів базису, причому у випадку $v_m v_{i'} = v_{j'}$ таке ж саме додавання треба зробити для відповідних рядків горизонтальних смуг $v_{i'}$ та $v_{j'}$.

4) можна додавати стовпець вертикальної смуги w_i, помножений на елемент поля, до стовпця вертикальної смуги w_j, якщо $w_i w_m = w_j$ — добуток елементів базису, причому у випадку $w_{i'} w_m = w_{j'}$ таке ж саме додавання треба зробити для відповідних стовпців вертикальних смуг $w_{i'}$ та $w_{j'}$.

Позначимо таку задачу $M(\Lambda', \Lambda)$.

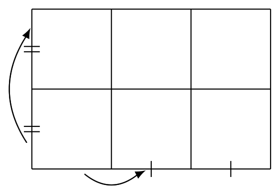
Приклад 1. *Нехай Λ' задана наступним графом:*



$$, \qquad I = \langle a^2 \rangle,$$

а Λ — наступним: $\varepsilon_1 \xrightarrow{a} \varepsilon_2$, $\quad I = \{0\}$.

тоді задача $M(\Lambda', \Lambda)$ матиме вигляд:



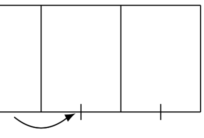
.

Розглянемо на початку випадок $\Lambda' = k$. В цьому випадку матриця матиме одну горизонтальну полосу.

Приклад 2. *Нехай Λ задана наступним графом:*

$\varepsilon_1 \xrightarrow{a} \varepsilon_2$, $\quad I = \{0\}$.

тоді задача $M(k, \Lambda)$ матиме вигляд:



.

В подальшому $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ позначає орієнтований граф, $\Lambda = \Lambda(\Gamma)/I$ — алгебра побудована за графом зі співвідношеннями I.

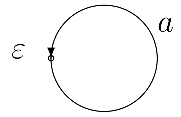
Теорема 1. *Задача $M(k, \Lambda)$ є ручного типу для таких і лише таких алгебр (з точністю до ізоморфізму) $\Lambda = \Lambda(\Gamma)/I$.*

Λ_1 $\quad \circ\,\varepsilon \quad , \quad I = \{0\}.$

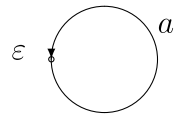
Λ_2 $\quad \circ\,\varepsilon_1 \quad \circ\,\varepsilon_2 \quad , \quad I = \{0\}.$

Λ_3 $\quad \circ\,\varepsilon_1 \quad \circ\,\varepsilon_2 \quad \circ\,\varepsilon_3 \quad , \quad I = \{0\}.$

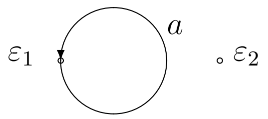
Λ_4 $\quad \circ\,\varepsilon_1 \quad \circ\,\varepsilon_2 \quad \circ\,\varepsilon_3 \quad \circ\,\varepsilon_4 \quad , \quad I = \{0\}.$

Λ_5 

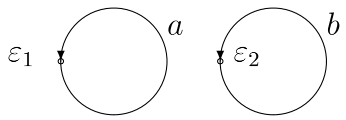
$, \quad I = \langle a^2 \rangle.$

Λ_6 

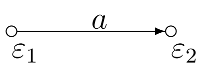
$, \quad I = \langle a^3 \rangle.$

Λ_7 

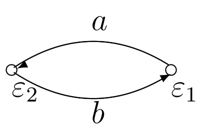
$, \quad I = \langle a^2 \rangle.$

Λ_8 

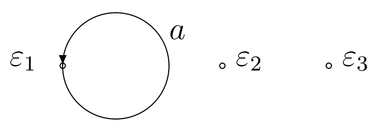
$, \quad I = \langle a^2, b^2 \rangle.$

Λ_9 

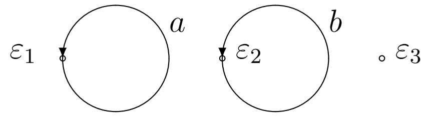
$, \quad I = \{0\}.$

Λ_{10} 

$, \quad I = \langle ab, ba \rangle.$

Λ_{11} 

$, \quad I = \langle a^2 \rangle.$

Λ_{12} 

$, \quad I = \langle a^2, b^2 \rangle.$

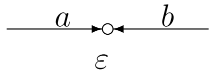
Задача $M(k, \Lambda)$ є скінченого типу для алгебр $\Lambda = \Lambda_i$, $i = 1, 2, 3, 5, 6, 7$.

Допоміжні леми. Розглянемо дві леми, які ми будемо використовувати нижче.

Лема 1. *Якщо задача $M(k, \Lambda)$ ручного типу, то $|\Gamma_0| < 5$.*

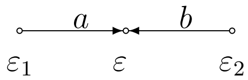
Доведення. Якщо граф Γ має принаймні 5 вершини, то матриці, які відповідають вершинам графа, утворюють зображення частково впорядкованої множини, яка складається з п'яти непорівняльних точок. Добре відомо, що така задача є дикою (дивись [3]).

Лема 2. *Якщо задача $M(k, \Lambda)$ ручного типу, то Γ не містить підграф вигляду*



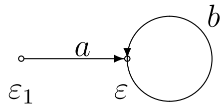
Доведення.
Можливі такі випадки:

a)



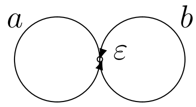
;

b)



;

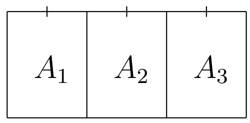
c)



.

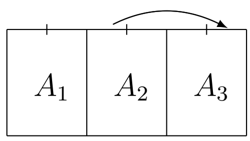
Якщо ми розглянемо підзадачі, що відповідає матрицям a, ε, b, то ми отримаємо відповідно наступні матричні задачі :

a)



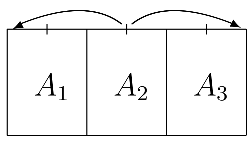
,

b)



,

c)



.

Всі ці задачі є дикими згідно з [4, 5].

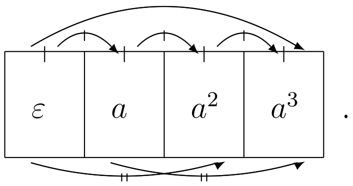
Доведення теореми 1. Нагадаємо, що петлею називається стрілка початкова і кінцева вершини якої збігаються. З формальних причин надалі під стрілкою ми розуміємо будь яку стрілку, що не є петлею.

Розглянемо спочатку графи, які складаються лише з точок і не мають петель або стрілок. Згідно леми 1 кількість точок менша, або рівна чотирьом. Це відповідає першим чотирьом пунктам в теоремі. Перші три задачі будуть скінченного типу [2], а остання ручного [3] (вони співпадають з матричними задачами, які пов'язані з зображенням частково-впорядкованих множин, які складаються відповідно з однієї, двох, трьох та чотирьох непорівняльних точок).

Розглянемо графи, які мають хоча б одну петлю або стрілку.

1) *Випадок однієї вершини.*

В силу леми 2 нам потрібно розглядати лише графи з однією петлею (граф пункту 5 з умови теореми). Доведемо, що задача буде дикою, якщо $I = \langle a^4 \rangle$. Дійсно, в цьому випадку задача отримає наступний вигляд:



Розглянемо четвірки матриць такого вигляду:

$$T(B,C,D) = \left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
 & E & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & E & & & E & & & & & & & \\
 & & & E & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & E & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & E & E & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & B & C & D
\end{array}\right|,$$

в матрицях на порожніх місцях стоять нульові матриці. Легко бачити, що $T(B, C, D)$ і $T(B', C', D')$ переводяться одне в одне за допомогою допустимих перетворень тоді і лише тоді, коли трійки матриць B, C, D і B', C', D' є подібними в наступній матричній задачі:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline B & C & D \\ \hline\end{array}\;,$$

а це дика задача (див. [4, 5]).

Задача буде дикою і у випадку $I = \langle a^l \rangle$, $l > 4$.

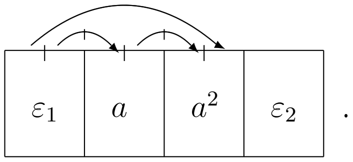
Якщо граф має одну вершину, нам залишилося розглянути випадки, коли $l = 2$ і $l = 3$.

У першому випадку маємо задачу про зображення лінійно впорядкованої множини з двох елементів, для яких одночасними є елементарні перетворення як рядків так і стовпчиків яка має скінченний тип [3]. У другому випадку маємо три матриці A_1, A_2, A_3, для яких одночасними є елементарні перетворення як рядків так і стовпчиків та одночасні зовнішні додавання стовпчиків $A_1 \to A_2$, $A_2 \to A_3$, а також допустимі додавання стовпчиків $A_1 \to A_3$. Відомо, що це задача скінченного типу (див. [3], у цьому легко переконатися за допомогою методу послідовного зведення матриць).

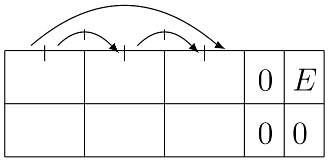
2) *Випадок двох вершин.*

2.1) Граф має одну петлю (алгебра Λ_7 з формулювання теореми).

Якщо $I = \langle a^3 \rangle$, ми отримаємо задачу $M(\Lambda)$ з чотирма матрицями:

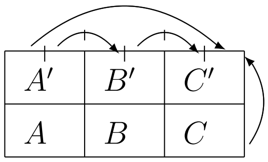


Приведемо спочатку матрицю ε_2:



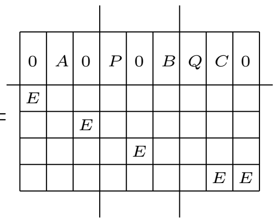
.

Тоді для перших трьох матриць отримаємо задачу:



.

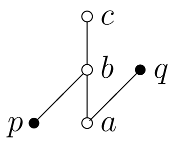
Розглянемо наступне часткове зображення:

$T(A,B,C,P,Q) =$ 

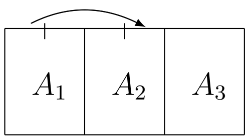
.

в матрицях на порожніх місцях стоять нульові матриці.

Тоді для матриць (A,B,C,P,Q) буде задача про зображення наступної частково впорядкованої множини з відношенням еквівалентності:



$a \sim b \sim c$, $p \sim q$ відомо, що це дика задача (див. [4, 5]). Отже, для алгебри Λ_7 єдиним можливим варіантом залишається $I = \langle a^2 \rangle = J^2$. У цьому випадку отримаємо наступну задачу:

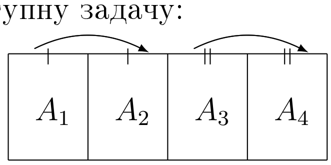


.

Відомо, що це задача скінченного типу (див. [3]).

2.2) Граф має дві петлі (алгебра Λ_8 з формулювання теореми).

Враховуючи розглянуте вище для того, щоб задача мала ручний тип необхідно, щоб $a^2 \in I$, $b^2 \in I$. Розглянемо випадок $I = \langle a^2, b^2 \rangle$, помітимо, що при цьому $I = J^2$. Отримуємо наступну задачу:

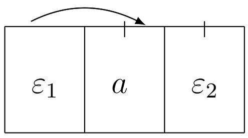


.

Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною (див. [6]).

У випадку трьох петель задача буде дикою за лемою 2, бо дві з них мають спільну вершину.

2.3) Граф має одну стрілку (алгебра Λ_9 з формулювання теореми). У цьому випадку отримаємо наступну задачу:

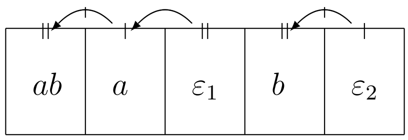


.

Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною (див. [6]).

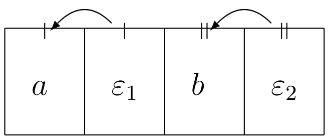
2.4) Граф має дві стрілки. За лемою 2 граф алгебри Λ_{10} — єдиний можливий.

Припустимо, що $ab \notin I$, тоді ми отримаємо наступну задачу:



.

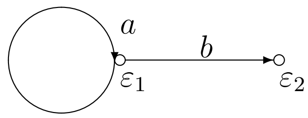
Матриці ab, b, ε_1 утворюють дику підзадачу (лема 2a). Тому необхідно, щоб $ab \in I$. Аналогічно $ba \in I$. Отже, $I \supset \langle ab, ba \rangle = J^2$, тому $I = \langle ab, ba \rangle = J^2$



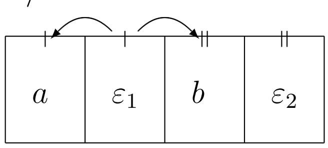
.

Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною (див. [6]).

2.5) Граф має одну стрілку і одну петлю. За лемою 2 єдиний можливий граф має вигляд.

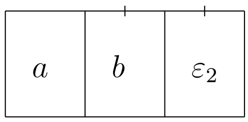


Розглянемо випадок $I = \langle a^2, ab \rangle = J^2$:



.

Ця задача із класу містить підзадачу



,

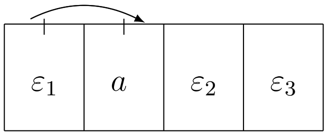
а це дика задача (див. [4, 5]).

Згідно з лемою 2 випадок, коли сума стрілок і петель більша двох розглядати не потрібно, отже випадок графа з двома вершинами повністю розглянуто.

3) *Випадок трьох вершин.*

3.1) Граф має одну петлю (алгебра Λ_{11} з формулювання теореми). За доведеним для алгебри Λ_7 випливає, що $a^2 \in I$, тому $I \supset \langle a^2 \rangle = J^2$ тому $I = \langle a^2 \rangle = J^2$.

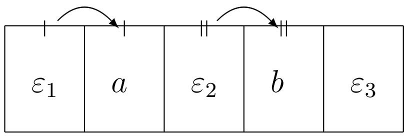
Ось матрична задача, пов'язана з такою алгеброю:



.

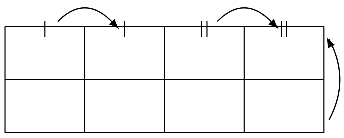
Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною (див. [6]).

3.2) Граф має дві петлі (алгебра Λ_{12} з формулювання теореми). За розглянутим для алгебри Λ_7, необхідно, щоб $\{a^2, b^2\} \subset I$, тому $J^2 \subset I$ тому $J^2 = \langle a^2, b^2 \rangle = I$:



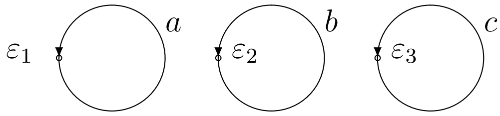
.

Приведемо матрицю ε_3 і отримаємо наступну матричну задачу:


.

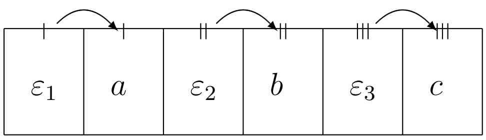
Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною (див. [6]).

3.3) Граф має три петлі , тому (за лемою 2) має вигляд:



.

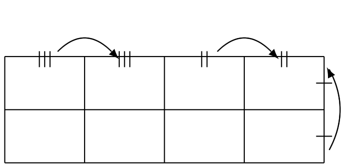
За розглянутим для випадку 6: $I = \langle a^2, b^2, c^2 \rangle$:



.

Якщо розглянути частинний випадок, коли матриці ε_1 та a мають наступний вигляд:

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}$, то для матриць ε_2, b, ε_3, c отримаємо наступну задачу:

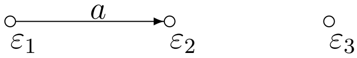

.

Розглянемо часткове зображення:

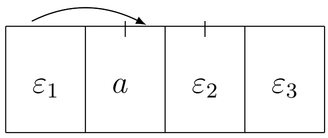
$$H(A, B, C) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & A & B & C \\ \hline E & 0 & E & 0 \\ \hline \end{array} .$$

Для матриць (A, B, C) буде задача з леми 2 пункт а), яка є дикою.

3.4) Випадок однієї стрілки. Граф має вигляд



Задача має наступний вигляд:

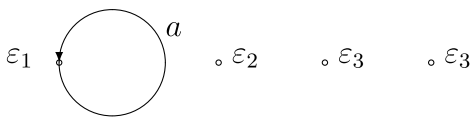
 .

Матриці a, ε_2, ε_3 утворюють дику задачу (див. [4, 5]).

Отже, у випадку трьох точок граф не може мати стрілок, а петель може бути не більше двох.

4) *Випадок чотирьох точок.* Граф не може мати стрілок, а петель може бути не більше двох, згідно з розглянутим вище.

У випадку, коли немає петель, задача буде ручною (це вже розглядалося). Розглянемо випадок однієї петлі. Граф має вигляд:



Задача буде задачею про зображення частково-впорядкованої множини з інволюцією:

Це дика задача (див. [4, 5]).

Отже, у випадку чотирьох точок єдиним можливим графом є граф, у якого немає ні петель ні стрілок.

Твердження стосовно ручних випадків доведено в [7]

Теорема 1 доведена.

Нехай Λ — алгебра, а Λ^o — протилежна алгебра, тобто, як множини ці алгебри співпадають, але в протилежній задано множення $*$ за правилом $a * b = b \cdot a$, де $\cdot$ множення в алгебрі Λ. Помітимо, що задачі $M(k, \Lambda)$ і $M(\Lambda^o, k)$ є рівносильними — одна з іншої отримується транспонуванням матриці.

Тому задача $M(\Lambda', k)$ буде ручного типу для алгебр $\Lambda' = \Lambda_i^o$, $1 \le i \le 12$. Помітимо, що

$\Lambda_i^o = \Lambda_i$, $1 \le i \le 8$, $i = 11, 12$,

$\Lambda_9 \simeq \Lambda_9^o$,

$\Lambda_{10} \simeq \Lambda_{10}^o$.

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Задача $M(\Lambda', k)$ є ручного типу для алгебр $\Lambda' = \Lambda_i, 1 \le i \le 12$.*

Доведемо, що для розгляду задачі $M(\Lambda', \Lambda)$ достатньо розглядати алгебри $\Lambda' = \Lambda_i^o$, $\Lambda = \Lambda_i$, $1 \le i \le 12$. Дійсно, задача $M(\Lambda', \Lambda)$ це задача про опис лінійних відображень з проективного модуля над алгеброю Λ' в проективний модуль над алгеброю Λ, які розглядаються, як відображення векторних просторів, при цьому допустимими перетвореннями є гомоморфізми відповідних модулів. Якщо ми розглянемо задачу $M(k,\Lambda)$, то це задача про k лінійні відображення з векторного простору в проективний модуль над алгеброю Λ, але оскільки проективний модуль над алгеброю Λ' є векторним простором над полем k, то множина відображень, яку ми вивчаємо не змінюється, а змінюються лише допустимі перетворення — тепер зліва дозволені всі лінійні над полем k ізоморфізми. Тобто класів еквівалентності повинно стати менше. Отже, якщо задача $M(k,\Lambda)$ дика, то дикою буде і задача $M(\Lambda',\Lambda)$. Тому достатньо розглядати алгебри $\Lambda=\Lambda_i$, $1\le i\le 12$. Аналогічно доводиться, що нам достатньо розглядати $\Lambda'=\Lambda_i^o$, $1\le i\le 12$.

Сформулюємо тепер основну теорему цієї статті.

Теорема 3. *Задача $M(\Lambda',\Lambda)$ буде ручного, або скінченого типу для наступних пар алгебр (Λ',Λ):*

1. (k,Λ_i) $1\le i\le 12$.

2. (Λ_i,k) $1\le i\le 12$.

3. $(\Lambda_2,\Lambda_2),(\Lambda_2,\Lambda_5),$ $(\Lambda_5,\Lambda_2),(\Lambda_5,\Lambda_5)$.

Доведення. Пункти 1 і 2 тільки що доведені. Перейдемо до доведення пункту 3.

Будемо по черзі перебирати алгебри Λ, при фіксованій Λ'

1. $\Lambda'=\Lambda_2$

1.1. $\Lambda=\Lambda_2$, задача має вигляд:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad \\ \hline\end{array}\quad .$$

Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

1.2. $\Lambda=\Lambda_3$, задача має вигляд:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \quad & \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad & \quad \\ \hline\end{array}\, .$$

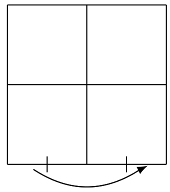
Розглянемо наступне часткове зображення:

$$T(A,B,C)=\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline E & E & E \\ \hline\end{array}\, .$$

Для матриць (A,B,C) буде задача з леми 2а), яка є дикою.

З розглянутого вище зокрема випливає, що розглядати в якості алгебри Λ не потрібно розглядати алгебри, задані графами, в яких три вершини і більше (при цьому випадають з розгляду алгебри $\Lambda=\Lambda_i, i=3,4,11,12$).

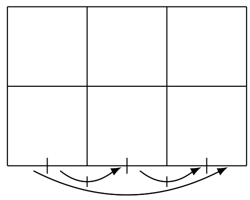
1.3. $\Lambda = \Lambda_5$, задача має вигляд:



.

ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

1.4. $\Lambda = \Lambda_6$, задача має вигляд:



.

Розглянемо наступне часткове зображення:

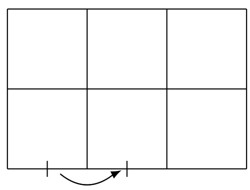
$$T(A, B, C) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline E & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \; ;$$

для матриць (A, B, C) задача має вигляд

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \end{array} \; ,$$

а це дика задача (див. [4, 5]).

1.5. $\Lambda = \Lambda_7$, задача має вигляд:



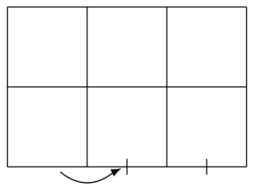
.

Розглянемо наступне часткове зображення:

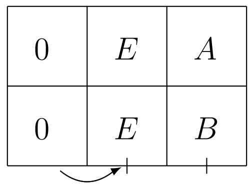
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline E & 0 & E \\ \hline A & B & E \\ \hline \end{array} \; ;$$

для матриць (A, B) буде стандартна дика задача — задача про пару матриць. Тому задача буде дикою також для алгебри $\Lambda = \Lambda_8$.

1.6. $\Lambda = \Lambda_9$, задача має вигляд:


.

Розглянемо наступне часткове зображення:

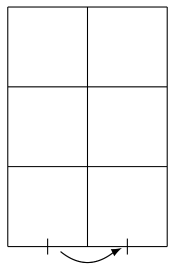


;

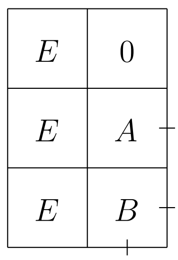
для матриць (A, B) буде стандартна дика задача — задача про пару матриць. Аналогічно задача буде дикою для алгебри $\Lambda = \Lambda_{10}$.

2. $\Lambda' = \Lambda_3^o$. Для $\Lambda = \Lambda_2$ задача буде дикою в силу розглянутого в 1.2. Тому, серед претендентів для Λ нам потрібно розглядати лише алгебри, задані графом з однією вершиною (при цьому випадають з розгляду алгебри $\Lambda = \Lambda_i, i = 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12$).

2.1 $\Lambda = \Lambda_5$, задача має вигляд:


.

Розглянемо наступне часткове зображення:



;

для матриць (A, B) буде стандартна дика задача — задача про пару матриць. Аналогічно буде дикою задача для $\Lambda = \Lambda_6$.

Розглянуте вище дозволяє нам стверджувати, що серед претендентів для Λ' нам потрібно розглядати лише алгебри, задані графом з двома або менше вершинами (при цьому випадають з розгляду алгебри $\Lambda' = \Lambda_i, i = 3, 4, 11, 12$). В силу симетричності серед претендентів для Λ нам потрібно розглядати лише алгебри, задані графом з двома або менше вершинами (при цьому випадають з розгляду алгебри $\Lambda = \Lambda_i, i = 3, 4, 11, 12$).

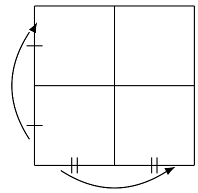
3. $\Lambda' = \Lambda_5^o$.

3.1. $\Lambda = \Lambda_2$, задача має вигляд:

.

Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною.

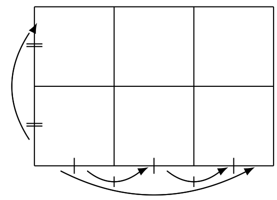
3.2 $\Lambda = \Lambda_5$, задача має вигляд:



.

Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною.

3.3 $\Lambda = \Lambda_6$, задача має вигляд:



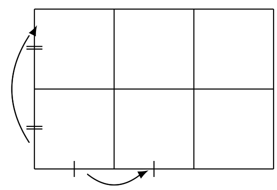
.

Розглянемо наступне часткове зображення:

$$T(A,B,C) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & B & C \\ \hline E & 0 & 0 \\ \hline \end{array} .$$

Для матриць B, C буде задача про пару матриць, яка є дикою.

3.4 $\Lambda = \Lambda_7$, задача має вигляд:

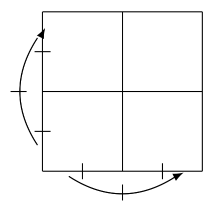


.

Розглянемо наступне часткове зображення:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E & 0 & E & 0 \\ \hline 0 & E & 0 & E \\ \hline 0 & 0 & A & B \\ \hline 0 & 0 & C & D \\ \hline \end{array} .$$

Для матриць A, B, C, D задача матиме наступний вигляд:

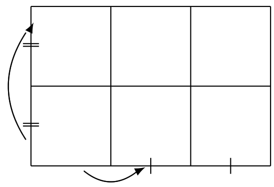


,

ця задача дика.

В силу розглянутого для алгебри $\Lambda = \Lambda_8$ задача також дика.

3.5 $\Lambda = \Lambda_9$, задача має вигляд:



.

Розглянемо наступне часткове зображення:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 0 & A \\ \hline 0 & E & B \\ \hline \end{array};$$

для матриць A, B буде задача про пару матриць, яка є дикою.

В силу розглянутого для алгебри $\Lambda = \Lambda_{10}$ задача також дика.

4. $\Lambda' = \Lambda_6$

Згідно з 1.4 задача буде дикою для $\Lambda = \Lambda_2$ тому задача також буде дикою для алгебр $\Lambda = \Lambda_i, i = 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

Згідно з 3.3 задача буде дикою для $\Lambda = \Lambda_5$ тому задача також буде дикою для алгебри $\Lambda = \Lambda_6$.

5. $\Lambda' = \Lambda_7$

Згідно з 1.5 задача буде дикою для $\Lambda = \Lambda_2$ тому задача також буде дикою для алгебр $\Lambda = \Lambda_i, i = 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

Згідно з 3.4 задача буде дикою для $\Lambda = \Lambda_5$ тому задача також буде дикою для алгебри $\Lambda = \Lambda_6$.

Отже, задача дика і у випадках (Λ_8, Λ)

6. $\Lambda' = \Lambda_9$

Згідно з 1.6 задача буде дикою для $\Lambda = \Lambda_2$ тому задача також буде дикою для алгебр $\Lambda = \Lambda_i, i = 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

Згідно з 3.5 задача буде дикою для $\Lambda = \Lambda_5$ тому задача також буде дикою для алгебри $\Lambda = \Lambda_6$.

Отже, задача дика і у випадках (Λ_{10}, Λ)

Таким чином, ми розглянули всі випадки.

1. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры. – К.: Вища школа, 1980. – 200 с.
2. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Записи научных семинаров ЛОМИ. – Т. 28. – С. 32–41.
3. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Категорные матричные задачи и проблема Брауэра-Трелла. – К.: Наукова думка – 1973. – 100 с.
4. *Bondarenko V. M., Zavadskij A. G.* Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth // Canad. Math. Soc. Conf. Proc. – 1991. – **11**. – P. 67–88.
5. *Bondarenko V. M., Zavadskij A. G.* Tame posets with equivalence relation // Contem. Math. – 1992. – **131** (part 2). – P. 237–251.
6. *Бондаренко В. М.* Представления связок полуцепных множеств и их приложения // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, (вып. 5). – С. 38–67.
7. *Дяченко С. М.* Алгебри скінченного типу відносно односторонньої еквівалентності матриць // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2006. – Вип. 12-13. – С. 65–70.

Одержано 04.06.2007