УДК 519.21

О. Є. Каменщикова (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

ЛІНІЙНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ $SSub_\varphi(\Omega)$ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

The problem of approximation of some classes of stationary strictly $\varphi-$sub-Gaussian random processes by broken lines is considered. Estimations of accuracy and reliability of approximation in metrics of space $C([0,T])$ are obtained. Some examples of approximation are studied.

Розглядається наближення деяких класів стаціонарних строго φ-субгауссівських процесів за допомогою ламаних ліній. Отримано оцінки точності та надійності наближення в метриці простору $C([0,T])$. Розглянуто декілька випадків наближення.

1. Вступ. Нехай $\{X(t), t \in T\}$,$T = [0,1]$ — стаціонарний строго φ-субгауссівський процес, визначальна стала якого $C_\Delta = 1$. Позначимо $S := \{t_n\} = \{\frac{n}{N}, n = \overline{0,N}\}$ — розбиття відрізка $[0,1]$ на N однакових частин.

За точками розбиття побудуємо інтерполяційну ламану $X_N(t)$:

$$X_N(t) = \alpha_{1n}(t)X(t_n) + \alpha_{2n}(t)X(t_{n+1}), t \in [t_n, t_{n+1}], n = \overline{0, N-1},$$

де $\alpha_{1n}(t) = 1 - (t - t_n)N$, $\alpha_{2n}(t) = (t - t_n)N$.

Таким чином, $\{X_N(t), t \in T\}$ — це апроксимаційна ламана даного процесу у випадку рівномірного розбиття відрізка $T = [0,1]$. Задача полягає в побудові такої ламаної $X_N(t)$, яка б наближала даний процес $X(t)$ із заданою надійністю і точністю в нормі банахового простору $C([0,1])$. Отже, необхідно знайти найменший порядок ламаної (тобто число N), щоб, розбивши інтервал $[0,1]$ на N рівних частин і знаючи значення даного процесу у відповідних точках $\{\frac{n}{N}, n = \overline{0,N}\}$, можна було б відновити процес $\{X(t), t \in T\}$ із заданою надійністю і точністю.

Зауважимо, що подібна тематика — наближення процесу ламаними лініями, які побудовані на основі рівномірного розбиття відрізка $[0,1]$ — вже розглядалась у роботах О. Селезньова, але для випадку гауссівських процесів, тобто частинного випадку строго φ-субгауссівських процесів (див. [6], [7]).

Позначимо $Y_N(t) := X(t) - X_N(t), t \in T,$ — процес відхилення.

Нехай для процесу $\{X(t), t \in T\}$ виконується нерівність

$$\sup_{t \in T} E|X(t+h) - X(t)|^2 \le b^2(h), \tag{1}$$

де $b(h), h > 0$ — монотонно зростаюча функція і $b(h) \downarrow 0, h \downarrow 0$. Вважаємо, що функція $b(h)$ для заданого процесу $\{X(t), t \in T\}$ відома.

2. Основні поняття. Нагадаємо деякі означення та твердження, що будуть використані у статті.

Означення 1. *Процес $\tilde{Z}$ наближає процес Z з надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, і точністю $\varepsilon > 0$ в $C([0,1])$, якщо*

$$P\left(\sup_{t \in [0,1]} |Z_t - \tilde{Z}_t| > \varepsilon\right) \le \delta.$$

Означення 2 (див. [1]). *Неперервна парна опукла функція* $u = (u(x), x \in R)$ *називається N-функцією Орліча, якщо вона монотонно зростає при* $x > 0$, $u(0) = 0$ *і*

$$\frac{u(x)}{x} \to 0 \quad \textit{при} \quad x \to 0 \qquad \textit{та} \qquad \frac{u(x)}{x} \to \infty \quad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

Якщо має місце зображення

$$u(x) = \int\limits_0^{|x|} p(t)dt, x \in R, \tag{2}$$

то функція $p(x), x \geq 0$, *називається щільністю* N*-функції* u.

Приклад 1 (див. [1]). *Наступні функції є* N*-функціями:*
1) $U(x) = a|x|^{\alpha}, x \in R; a > 0, \alpha > 1$;
2) $U(x) = c(\exp\{|x|^{\alpha}\} - 1), x \in R; c > 0, \alpha > 1$;
3) $U(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1, x \in R$.

Умова Q: (див. [2]) Функція N задовольняє умову Q, якщо

$$\underline{\lim}_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0.$$

Зауваження 1. *Може бути, що* $c = \infty$.

Означення 3 (див. [3], [2]). *Нехай* φ *— N-функція Орліча, що задовольняє умову* Q. *Центрована випадкова величина* ξ *належить* $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *(простору* φ*-субгаусівських випадкових величин), якщо існує константа* $r_{\xi} \geq 0$ *така, що* $\forall \lambda \in R$ *виконується нерівність*

$$E \exp\left(\lambda \xi\right) \leq \exp\left(\varphi(r_{\xi} \lambda)\right).$$

Твердження 1 (див. [1, 2]). *Простір* $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *є банаховим відносно норми*

$$\tau_{\varphi}(\xi) = \inf\{a \geq 0 : E \exp\left(\lambda \xi\right) \leq \exp(\varphi(a\lambda)), \lambda \in R\}.$$

Означення 4 (див. [1]). *Нехай* T *— деякий параметричний простір. Випадковий процес належить простору* $Sub_{\varphi}(\Omega)$, *якщо для всіх* $t \in T$ *виконується* $X(t) \in Sub_{\varphi}(\Omega)$ *та* $\sup_{t \in T} \tau_{\varphi}(X(t)) < \infty$.

Означення 5 (див. [4]). *Сім'я* Δ *випадкових величин* ξ *із простору* $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *називається строго* $Sub_{\varphi}(\Omega)$, *якщо існує константа* $C_{\Delta} > 0$ *така, що для будь-якої скінченної множини* I, $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, *і для будь-яких* $\lambda_i \in R^1$ *виконується нерівність*

$$\tau_{\varphi}\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right) \leq C_{\Delta}\left(E\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

Сталу C_{Δ} *будемо називати визначальною сталою.*

Означення 6 (див. [4]). *Випадковий процес* $\{X(t),\ t \in T\}$ *з простору* $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *називається строго* $Sub_{\varphi}(\Omega)$, *якщо сім'я випадкових величин* $\{X(t),\ t \in T\}$ *є строго* $Sub_{\varphi}(\Omega)$.

Означення 7 (див. [1]). *Нехай (T,ρ) - псевдометричний (метричний) простір. Метричною ентропією відносно псевдометрики (метрики) ρ називається функція*

$$H_{(T,\rho)}(u) = \begin{cases} \ln N_{(T,\rho)}(u), & \text{якщо} \quad N_{(T,\rho)}(\varepsilon) < +\infty, \\ +\infty, & \text{якщо} \quad N_{(T,\rho)}(\varepsilon) = +\infty, \end{cases}$$

де $N_{(T,\rho)}(u)$ — метрична масивність множини T (найменша кількість замкнених куль радіуса u, що покривають T).

Означення 8 (див. [1]). *Нехай $f = (f(x), x \in R)$ — дійсна функція. Перетворенням Юнга-Фенхеля функції f, або функцією, спряженою до f, називається функція $f^* = (f^*(x), x \in R)$, визначена рівністю*

$$f^*(x) = \sup_{y \in R}(xy - f(y)).$$

Зауваження 2 (див. [1]). *З означення спряженої функції випливає, що для всіх $x, y \in R$ справедливою є нерівність, що має назву нерівність Юнга-Фенхеля:*

$$f(x) + f^*(x) \geq xy,$$

причому рівність має місце при $x = p^{(-1)}(y)$.

Означення 9 (див. [1]). *Для щільності $p(t), t \geq 0$, розглянемо узагальнену обернену функцію $p^{(-1)}(t), t \geq 0$, визначену співвідношенням*

$$p^{(-1)}(t) = \sup\{u \geq 0 : p(u) \leq t\}.$$

Твердження 2 (див. [1]). *Нехай u — деяка довільна N-функція, $p(t), t \geq 0$, — її щільність, що фігурує в рівності (2). Тоді функція u^*, спряжена до u, також є N-функцією і u^* допускає представлення*

$$u^*(x) = \int_0^{|x|} p^{(-1)}(t)dt, x \in R,$$

де $p^{(-1)}(\cdot)$ – узагальнена обернена до $p(\cdot)$ функція.

3. Наближення строго φ-субгауссівських випадкових процесів. Легко довести, що оскільки процес $X = \{X(t), t \in T\}$ є строго φ-субгауссівським процесом, то процес $\{Y_N(t), t \in T\}$ теж є строго φ-субгауссівським.

Справді, процес $X(t) \in SSub_\varphi(\Omega)$, тому сім'я $\{X(t), t \in T\} \in SSub_\varphi(\Omega)$. Тоді для будь-якої скінченної множини I, $i \in I$, $\forall t_i \in [t_n^i, t_{n+1}^i]$ (де $[t_n^i, t_{n+1}^i]$ — це відрізок розбиття S, в який потрапила точка t_i) і для будь-яких $\lambda_i \in R^1$ буде істинною рівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i Y_N(t_i)\right) = \tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \left(X(t_i) - \alpha_{1n}(t_i)X(t_n^i) - \alpha_{2n}(t_i)X(t_{n+1}^i)\right)\right),$$

а оскільки під знаком суми в останній рівності записана лінійна комбінація значень процесу $X(t)$ в точках $\{t_i, i \in I\}$ та $\{t_n^i, t_{n+1}^i, i \in I\}$, то за означенням $SSub_\varphi(\Omega)$-процесу отримаємо, що $Y_N(t) \in SSub_\varphi(\Omega), t \in T$.

Для наближення строго φ-субгауссівського процесу будемо використовувати таку теорему, яка є переформулюванням теореми, доведеної в [5].

Теорема 1. *Нехай* (T,ρ) — *це псевдометричний (або метричний) сепарабельний компактний простір,* $\{X(t), t\in T\}$ — *сепарабельний* $Sub_\varphi(\Omega)$ *процес,* $\varepsilon_0=\tau_\varphi(X(t))$. *Нехай існує монотонно зростаюча неперервна функція* $\sigma(h), h>0$, *така, що* $\sigma(h)\to 0, h\to 0$, *і має місце нерівність*

$$\sup_{\rho(t,s)\le h}\tau_\varphi(X(t)-X(s))\le\sigma(h).$$

Нехай β — *таке число, що* $\beta\le\sigma(\inf_{s\in T}\sup_{t\in T}\rho(t,s))$, *а* $r(u)\ge 0, u\ge 1, r(1)=0$ — *неспадна функція, така, що функція* $s(t)=r(e^t)$ *опукла вниз. Якщо виконується умова* $\int\limits_0^\beta\theta_\varphi(u)du<\infty$, *де* $\theta_\varphi(u)=\frac{r(N(\sigma^{(-1)}(u)))}{\varphi^{(-1)}(\ln N(\sigma^{(-1)}(u)))}$, $N(\cdot)$ — *метрична масивність множини* T, *то* $\forall\lambda\in R, 0<\nu<1$ *має місце така нерівність:*

$$E\exp\{\lambda\sup_{t\in T}X(t)\}\le\Gamma_r(\lambda,\nu),$$

де

$$\Gamma_r(\lambda,\nu)=\exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda\varepsilon_0}{1-\nu}\right)(1-\nu)+\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-\nu}\right)\nu\right\}\times$$
$$\times\left(r^{(-1)}\left(\lambda\varepsilon_0\theta_\varphi(\nu\beta)+\frac{\lambda}{\nu(1-\nu)}\int\limits_0^{\beta\nu^2}\theta_\varphi(u)du\right)\right)^2,$$

і для $\forall\varepsilon>0$ *виконується:* $P\{\sup_{t\in T}|X(t)|\ge\varepsilon\}\le 2\inf_{\lambda\ge 0}\Gamma_r(\lambda,\nu)\exp\{-\lambda\varepsilon\}$.

Розглянемо функцію

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{|x|^p}{p} & \text{при}\quad |x|>1,\\ \frac{x^2}{p} & \text{при}\quad |x|\le 1,\end{cases}$$

для $p>2$, а також функцію $\varphi(x)=\frac{|x|^p}{p}$ для $1<p\le 2$ ($p=2$ — випадок строго субгауссівського процесу). Для кожної дослідимо випадки степеневої та логарифмічної функцій відхилення $b(h)$ заданого процесу $X(t)$.

4. Степенева функція $b(h)$, **параметр** $p>2$. Нехай $b(h)=ch^\alpha$, $0\le\alpha\le 1$, c — додатня константа.

Якщо врахувати умову (1), те, що $\{X(t), t\in T\}$ — стаціонарний $SSub_\varphi(\Omega)$ випадковий процес, а також очевидні нерівності:

$$E|X(t+h)-X(t)|^2=2(B(0)-B(h))\le b^2(h), h>0,$$

$$0\le 1-(t-t_n)N\le 1, 0\le(t-t_n)N\le 1, \text{де}\quad t\in[t_n,t_{n+1}], t_n=\frac{n}{N}, n=\overline{0,N},$$

то легко довести такі дві леми.

Лема 1. *Нехай* $X(t)$ — *строго* φ*-субгауссівський випадковий процес, означений вище,* $S, b(h)$ — *відповідні розбиття та функція. Позначимо*

$$\varepsilon_0^2:=\sup_{t\in T}\tau_\varphi^2(Y_N(t)).$$

Тоді має місце оцінка:

$$\varepsilon_0\le b\left(\frac{1}{N}\right).$$

Лема 2. *Нехай $X(t), S, b(h)$ — означені вище. Позначимо через $\sigma^2(h) = \sup_{t\in T}\tau_{\varphi}^2|Y_N(t+h)-Y_N(t)|, h>0$. Тоді має місце оцінка:*

$$\sigma^2(h)\le 4b^2(h)+b^2(2h)+b^2(3h).$$

За цими лемами для степеневої функції відхилення отримаємо такі оцінки:

$$\varepsilon_0\le\frac{c}{N^\alpha}=:\widetilde{\varepsilon_0}, \sigma^2(h)\le 17c^2h^{2\alpha}=:\widetilde{\sigma}^2(h).$$

Застосуємо наведену теорему до процеса $Y_N(t)$. Очевидно, якщо у нерівностях теореми замінити ε_0 на $\widetilde{\varepsilon_0}$ і $\sigma(h)$ на $\widetilde{\sigma}(h)$, то вони залишаться істинними.

Маємо: $\widetilde{\sigma}^{(-1)}(h)=\left(\frac{h}{\sqrt{17c}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ та

$$\beta\le\frac{\sqrt{17}c}{2^\alpha}. \tag{3}$$

Оскільки β — довільне додатне число, що має задовольняти умову (3), то можемо покласти $\beta=\widetilde{\varepsilon_0}$. Тоді $\varphi\left(\frac{\lambda\varepsilon_0}{1-\nu}\right)(1-\nu)+\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-\nu}\right)\nu=\varphi\left(\frac{\lambda\varepsilon_0}{1-\nu}\right)$.

Враховуючи, що функція $t\mapsto r\left(e^{\varphi(t)}\right)$ є N-функцією Орліча, то $\frac{r\left(e^{\varphi(t)}\right)}{t}$ зростає при $t\ge 0$ (за властивістю N-функцій), тому $\kappa(\varphi^{(-1)}(x))=\frac{r(e^x)}{\varphi^{(-1)}(x)}$ зростає при $x\ge 0$, звідки θ_φ є спадною функцією. Отже,

$$\theta_\varphi(\nu\beta)\le\frac{1}{\beta\nu(1-\nu)}\int\limits_{\beta\nu^2}^{\beta\nu}\theta_\varphi(u)du,$$

$$\lambda\varepsilon_0\theta_\varphi(\nu\beta)\le\frac{\lambda\varepsilon_0}{\beta\nu(1-\nu)}\int\limits_{\beta\nu^2}^{\beta\nu}\theta_\varphi(u)du=\frac{\lambda}{\nu(1-\nu)}\int\limits_{\beta\nu^2}^{\beta\nu}\theta_\varphi(u)du.$$

Маємо

$$\lambda\varepsilon_0\theta_\varphi(\nu\beta)+\frac{\lambda}{\nu(1-\nu)}\int\limits_0^{\beta\nu^2}\theta_\varphi(u)du\le\frac{\lambda}{\nu(1-\nu)}\int\limits_0^{\beta\nu}\theta_\varphi(u)du.$$

Розглянемо інтеграл від $\theta_\varphi(u)$. З нерівності (див. [1]) $N(u)\le\frac{1}{2u}+1, u>0$ одержимо:

$$\int\limits_0^{\beta\nu}\theta_\varphi(u)du=\int\limits_0^{\beta\nu}\frac{r(N(\widetilde{\sigma}^{(-1)}(u)))}{\varphi^{(-1)}(\ln N(\widetilde{\sigma}^{(-1)}(u)))}du\le\int\limits_0^{\beta\nu}\frac{r\left(\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^{(-1)}(u)}+1\right)}{\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^{(-1)}(u)}+1\right)\right)}du.$$

Доведемо, що для $u\le\beta\nu$ виконується нерівність

$$\varphi^{(-1)}\left(\ln\left(\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^{(-1)}(u)}+1\right)\right)\ge 1. \tag{4}$$

Оскільки

$$\varphi^{(-1)}(x)=\begin{cases}(px)^{\frac{1}{p}} & \text{при} \quad |x|>\frac{1}{p},\\ (px)^{\frac{1}{2}} & \text{при} \quad |x|\le\frac{1}{p},\end{cases}$$

то треба довести, що для $u \le \beta\nu$ виконується нерівність

$$\ln\left(\frac{17^{\frac{1}{2\alpha}} \cdot c^{1/\alpha}}{2u^{1/\alpha}} + 1\right) > \frac{1}{p},$$

або, що те ж саме,

$$u \le \frac{\sqrt{17} \cdot c}{(2(e^{\frac{1}{p}} - 1))^{\alpha}}.$$

Але

$$u \le \beta\nu = \widetilde{\varepsilon_0}\nu = \frac{c}{N^{\alpha}}\nu \le \frac{\sqrt{17}c}{\left(2(e^{1/p} - 1)\right)^{\alpha}},$$

тобто умова (4) виконується. Таким чином, маємо наступну нерівність:

$$\int\limits_0^{\beta\nu} \theta_{\varphi}(u)du \le \int\limits_0^{\beta\nu} r\left(\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^{(-1)}(u)} + 1\right)du.$$

Нехай $r(x) = x^b - 1$, де $0 < b < \alpha$ (очевидно, вона задовольняє необхідним умовам).

Оскільки $(x+1)^b - 1 \le x^b$, то

$$\int\limits_0^{\beta\nu} \theta_{\varphi}(u)du \le \int\limits_0^{\beta\nu} \frac{1}{(2\widetilde{\sigma}^{(-1)}(u))^b}du = \frac{17^{\frac{b}{2\alpha}} \cdot c^{b/\alpha}}{2^b} \cdot \frac{(\widetilde{\varepsilon_0}\nu)^{1-b/\alpha}}{1 - b/\alpha}.$$

Покладемо $b = \frac{\alpha}{2}$, тоді $\int\limits_0^{\beta\nu} \theta_{\varphi}(u)du \le \sqrt[4]{17} \cdot \sqrt{c\nu\widetilde{\varepsilon_0}} \cdot 2^{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Отже, згідно теореми 1,

$$P(N, \varepsilon) := P\{\sup_{t \in T} |Y_N(t)| \ge \varepsilon\} \le 2 \inf_{\lambda \ge 0} f_1(\lambda) g_1(\lambda),$$

де $f_1(\lambda) := \exp\left\{\varphi(\frac{\lambda\widetilde{\varepsilon_0}}{1-\nu}) - \lambda\varepsilon\right\}$, а $g_1(\lambda) := \left(\frac{\lambda \cdot 2^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\nu}(1-\nu)} \cdot \sqrt[4]{17} \cdot \sqrt{c\widetilde{\varepsilon_0}} + 1\right)^{\frac{4}{\alpha}}$.

Знайдемо $\inf_{\lambda \ge 0} f_1(\lambda)$:

$$\inf_{\lambda \ge 0} f_1(\lambda) = \exp\left\{-\sup_{\lambda \ge 0}\left(\lambda\varepsilon - \varphi(\frac{\lambda\widetilde{\varepsilon_0}}{1-\nu})\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\sup_{\frac{\lambda\widetilde{\varepsilon_0}}{1-\nu} \ge 0}\left(\frac{\lambda\widetilde{\varepsilon_0}}{1-\nu} \cdot \frac{\varepsilon(1-\nu)}{\widetilde{\varepsilon_0}} - \varphi(\frac{\lambda\widetilde{\varepsilon_0}}{1-\nu})\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon(1-\nu)}{\widetilde{\varepsilon_0}}\right)\right\},$$

де φ^* — перетворення Юнга-Фенхеля функції φ, або спряжена до неї функція.

Обчисливши φ^*, отримаємо:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \frac{px^2}{4} & \text{при} \quad 0 \le x \le \frac{2}{p}, \\ x - \frac{1}{p} & \text{при} \quad \frac{2}{p} < x \le 1, \\ \frac{x^{\frac{p}{p-1}}(p-1)}{p} & \text{при} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що з нерівності $2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon(1-\nu)}{\widetilde{\varepsilon}_0}\right)\right\} \le \delta$ випливає наступне:

$$1 < \ln\frac{2}{\delta} \le \varphi^*\left(\frac{\varepsilon(1-\nu)}{\widetilde{\varepsilon}_0}\right),$$

тому остаточно

$$\inf_{\lambda\ge 0} f_1(\lambda) = \exp\left\{-\left(\frac{\varepsilon(1-\nu)}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{p}{p-1}}\cdot\frac{p-1}{p}\right\}.$$

Знайдемо λ_*, при якому виконується вище наведена рівність. Оскільки нерівність Юнга-Фенхеля перетворюється на рівність при $y = p^{(-1)}(x)$, де $x = \frac{\varepsilon(1-\nu)}{\widetilde{\varepsilon}_0}$, $y = \frac{\lambda\widetilde{\varepsilon}_0}{1-\nu}$, то

$$\lambda_* = \left(\varepsilon\cdot\left(\frac{1-\nu}{\widetilde{\varepsilon}_0}\right)^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Враховуючи те, що $(1-\nu)^{\frac{p}{p-1}} \ge 1-\nu\cdot\frac{p}{p-1}$, покладемо $\nu_* := (\frac{\widetilde{\varepsilon}_0}{\varepsilon})^{\frac{p}{p-1}}$, тоді одержимо:

$$P(N,\varepsilon) \le 2e\cdot\exp\left\{-\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\widetilde{\varepsilon}_0}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right\}\left(\frac{2^{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt[4]{17}\cdot\sqrt{c}\cdot\varepsilon^{\frac{p+2}{2(p-1)}}}{\widetilde{\varepsilon}_0^{\,\frac{2p+1}{2(p-1)}}}+1\right)^{\frac{4}{\alpha}}.$$

Таким чином, шукане число N має задовольняти нерівність

$$2e\cdot\exp\left\{-\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\widetilde{\varepsilon}_0}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right\}\left(\frac{2^{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt[4]{17}\cdot\sqrt{c}\cdot\varepsilon^{\frac{p+2}{2(p-1)}}}{\widetilde{\varepsilon}_0^{\,\frac{2p+1}{2(p-1)}}}+1\right)^{\frac{4}{\alpha}} \le \delta, \tag{5}$$

де $\widetilde{\varepsilon}_0 = \frac{c}{N^\alpha}$.

Приклад 2. *Покладемо* $c = 1$, $\alpha = 1$, *тоді* $b(h) = h$, $\widetilde{\varepsilon}_0 = \frac{1}{N}$.
A) Нехай $p = 3$.
1. *Нехай* $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.1$. *Тоді умова* (5) *виконується при* $N \ge 129$.
2. *Нехай* $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$. *Тоді умова* (5) *виконується при* $N \ge 1499$.
B) Нехай $p = 8$.
3. *Нехай* $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.1$. *Тоді умова* (5) *виконується при* $N \ge 205$.
4. *Нехай* $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$. *Тоді умова* (5) *виконується при* $N \ge 2552$.

5. Степенева функція $b(h)$, **параметр** $1 \le p \le 2$. Із попереднього пункту випливає, що для випадку, коли параметр $1 \le p \le 2$ (тобто коли функція $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$), шукані нерівності будуть такими ж самими.

Зауваження 3. *При* $p = 2$ *наведені вище оцінки істинні для гауссівських процесів.*

Приклад 3. *Покладемо знову* $c = 1$, $\alpha = 1$.
C) Нехай $p = 1.5$.
5. *Нехай* $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.1$. *Тоді умова* (5) *виконується при* $N \ge 36$.
6. *Нехай* $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$. *Тоді умова* (5) *виконується при* $N \ge 275$.

6. Логарифмічна функція $b(h)$, параметр $p > 2$. Нехай тепер $b(h)$ має вигляд: $b(h) = \frac{c}{(\ln(1+\frac{1}{h}))^{\mu}}$, $\mu > 1 - \frac{1}{p}$, c — додатна константа.

Для апроксимації даного процесу у цьому випадку доцільним є використання теореми, що була доведена в [1]. Сформулюємо її для нашого випадку.

Теорема 2. *Нехай $X = (X(t), t \in T)$ — деякий $Sub_{\varphi}(\Omega)$-процес ($\varphi(x)$ — N-функція), τ_{φ} — норма у просторі $Sub_{\varphi}(\Omega)$. Псевдометрика ρ_X, породжена процесом X на T, має вигляд*

$$\rho_X(t,s) = \tau_{\varphi}(X(t) - X(s)), t, s \in T.$$

Припустимо, що простір (T, ρ_X) є сепарабельним і процес X є сепарабельним на (T, ρ_X). Нехай $N(\varepsilon)$, $H(\varepsilon) = \ln N(\varepsilon)$ — відповідно метрична масивність та метрична ентропія параметричної множини T відносно псевдометрики ρ_X. Якщо

$$\int\limits_0^{\widetilde{\varepsilon_0}} \frac{H(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H(\varepsilon))} d\varepsilon < \infty, \tag{6}$$

то для всіх $\lambda > 0$ має місце нерівність

$$E \exp\{\lambda \sup_{t \in T} |X(t)|\} \le 2Q(\lambda),$$

де

$$Q(\lambda) = \inf_{0<\nu<1} \exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda \widetilde{\varepsilon_0}}{1-\nu}\right) + \frac{2\lambda}{\nu(1-\nu)} \int\limits_0^{\nu\widetilde{\varepsilon_0}} \frac{H(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H(\varepsilon))} d\varepsilon\right\}.$$

Застосуємо наведену теорему до процесу $Y_N(t)$. За лемами 1 та 2 отримаємо:

$$\varepsilon_0 \le b(\frac{1}{N}) = \frac{c}{\ln^{\mu}(1+N)} =: \widetilde{\varepsilon_0},$$

$$\sigma^2(h) = 4b^2(h) + b^2(2h) + b^2(3h) \le 6b^2(3h) = 6c^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{3h}\right)\right)^{-2\mu} =: \widetilde{\sigma}^2(h).$$

Тоді $\widetilde{\sigma}^{(-1)}(h) = \frac{1}{3 \cdot \left(\exp\left\{\left(\frac{\sqrt{6}c}{h}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right\} - 1\right)}$.

Оскільки в даному випадку для $N(\varepsilon)$ множини T має місце нерівність (див. [1]) $N(\varepsilon) \le \frac{1}{2\widetilde{\sigma}^{(-1)}(\varepsilon)} + 1$, то

$$H(\varepsilon) \;=\; \ln N(\varepsilon) \le \ln\left(\frac{3\left(\exp\left\{\left(\frac{\sqrt{6}c}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right\} - 1\right)}{2} + 1\right) < \left(\frac{\sqrt{6}c}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mu}} + \ln\frac{3}{2}.$$

Розглянемо умову (6) теореми. Позначимо $I(\widetilde{\varepsilon_0}) = \int\limits_0^{\widetilde{\varepsilon_0}} \frac{H(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H(\varepsilon))} d\varepsilon$.

З нерівності $H(\varepsilon) \geq \ln N\left(\frac{c}{\ln^\mu(1+N)}\right) \geq \frac{1}{p}$ отримуємо $\varphi^{(-1)}(H(\varepsilon)) = (pH(\varepsilon))^{\frac{1}{p}}$ і

$$I(\widetilde{\varepsilon_0}) = \int\limits_0^{\widetilde{\varepsilon_0}} \frac{(H(\varepsilon))^{1-\frac{1}{p}}}{p^{\frac{1}{p}}} d\varepsilon < \int\limits_0^{\widetilde{\varepsilon_0}} \frac{\left(\ln\frac{3}{2} + \left(\frac{\sqrt{6}c}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)^{1-\frac{1}{p}}}{p^{\frac{1}{p}}} d\varepsilon.$$

Але $\varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon_0} = \frac{c}{\ln^\mu(1+N)}$, звідки $\ln\frac{3}{2} < 6^{\frac{1}{2\mu}} \ln(1+N) \leq \left(\frac{\sqrt{6}c}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mu}}$, тому

$$I(\widetilde{\varepsilon_0}) < \int\limits_0^{\widetilde{\varepsilon_0}} \frac{\left(2\left(\frac{\sqrt{6}c}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right)^{1-\frac{1}{p}}}{p^{\frac{1}{p}}} d\varepsilon =$$

$$= \frac{2^{1-\frac{1}{p}} \cdot 6^{\frac{1}{2\mu}(1-\frac{1}{p})} \cdot c}{\left(1 - \frac{1}{\mu}(1-\frac{1}{p})\right) \cdot \ln^{\mu-(1-\frac{1}{p})}(1+N) p^{1/p}} =: \widetilde{I}(\widetilde{\varepsilon_0}) < \infty.$$

Тоді згідно теореми 2 розглянемо

$$\widetilde{Q}(\lambda) = \inf_{0<\nu<1} \exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda\widetilde{\varepsilon_0}}{1-\nu}\right) + \frac{2\lambda}{\nu(1-\nu)} \int\limits_0^{\nu\widetilde{\varepsilon_0}} \frac{H(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H(\varepsilon))} d\varepsilon\right\}.$$

Позначимо

$$I(\widetilde{\varepsilon_0}\nu) = \int\limits_0^{\nu\widetilde{\varepsilon_0}} \frac{H(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H(\varepsilon))} d\varepsilon$$

і замінимо ν на 1 в $I(\widetilde{\varepsilon_0}\nu)$. Застосовуючи нерівність Чебишова-Маркова, перейдемо до оцінки "хвоста" супремума процесу $Y_N(t)$. А саме, для будь-яких $\varepsilon > 0$ $\lambda \geq 0, \nu \in (0,1)$

$$\begin{aligned} P(N,\varepsilon) :&= P\left\{\sup_{t\in T}|Y_N(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq \inf_{\lambda\geq 0} \exp\{-\lambda\varepsilon\} E\exp\{\lambda \sup_{t\in T}|Y_N(t)|\} \leq \\ &\leq 2\exp\left\{-\sup_{\frac{\lambda\widetilde{\varepsilon_0}}{1-\nu}}\left(\frac{\lambda\widetilde{\varepsilon_0}}{1-\nu} \cdot \left(\varepsilon - \frac{2\tilde{I}(\widetilde{\varepsilon_0})}{\nu(1-\nu)}\right) \cdot \frac{1-\nu}{\widetilde{\varepsilon_0}} - \varphi\left(\frac{\lambda\widetilde{\varepsilon_0}}{1-\nu}\right)\right)\right\} = \\ &= 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\left(\varepsilon - \frac{2\tilde{I}(\widetilde{\varepsilon_0})}{\nu(1-\nu)}\right) \cdot \frac{1-\nu}{\widetilde{\varepsilon_0}}\right)\right\} =: f_2. \end{aligned}$$

Аналогічно до випадку степеневої функції одержимо

$$f_2 = 2\exp\left\{-\frac{x^{\frac{p}{p-1}}(p-1)}{p}\right\},$$

де

$$x = \left(\varepsilon - \frac{2\tilde{I}(\widetilde{\varepsilon_0})}{\nu(1-\nu)}\right) \cdot \frac{1-\nu}{\widetilde{\varepsilon_0}},$$

тобто

$$f_2 = \exp\left\{-\frac{p-1}{p}\cdot\frac{\left(\varepsilon(1-\nu)-\frac{2\tilde{I}(\widetilde{\varepsilon_0})}{\nu}\right)^{\frac{p}{p-1}}}{\widetilde{\varepsilon_0}^{\frac{p}{p-1}}}\right\},$$

причому значення λ_{**}, при якому отримуємо вище наведене f_2, буде таким:

$$\lambda_{**} = \left(\frac{1-\nu}{\widetilde{\varepsilon_0}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\varepsilon-\frac{2\tilde{I}(\widetilde{\varepsilon_0})}{\nu(1-\nu)}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Мінімізуючи функцію $f_2(\lambda_{**})$ по $\nu\in(0,1)$, отримаємо: $\nu_* = \sqrt{\frac{2\tilde{I}(\varepsilon_0)}{\varepsilon}}$ і

$$P\{\sup_{t\in T}|Y_N(t)|\geq\varepsilon\}\leq 2\exp\left\{-\frac{1-\frac{1}{p}}{\varepsilon_0^{\frac{p}{p-1}}}\left(\varepsilon-\sqrt{8\tilde{I}(\widetilde{\varepsilon_0})\varepsilon}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right\}$$

при $\varepsilon > 8\tilde{I}(\widetilde{\varepsilon_0})$, де остання нерівність виконується при

$$N > \exp\left\{\left(\frac{2^{4-\frac{1}{p}}\cdot 6^{\frac{1}{2\mu}(1-\frac{1}{p})}\cdot c}{\left(1-\frac{1}{\mu}(1-\frac{1}{p})\right)\varepsilon p^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{\mu-(1-\frac{1}{p})}}\right\}-1. \tag{7}$$

Отже, шукане число N можна шукати з нерівності

$$2\exp\left\{-\frac{1-\frac{1}{p}}{\varepsilon_0^{\frac{p}{p-1}}}\left(\varepsilon-\sqrt{8\tilde{I}(\widetilde{\varepsilon_0})\varepsilon}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right\}\leq\delta, \tag{8}$$

де

$$\tilde{I}(\widetilde{\varepsilon_0}) = \frac{2^{1-\frac{1}{p}}\cdot 6^{\frac{1}{2\mu}(1-\frac{1}{p})}\cdot c}{\left(1-\frac{1}{\mu}(1-\frac{1}{p})\right)\cdot\ln^{\mu-(1-\frac{1}{p})}(1+N)p^{\frac{1}{p}}},$$

при виконанні умови (7).

Приклад 4. *A) Нехай* $p=3, c=1, \mu=4$, *тоді* $b(h)=\frac{1}{\ln^4(1+\frac{1}{h})}$.

1. *Нехай* $\varepsilon=0.1, \delta=0.1$. *Тоді умова* (7) *виконується при* $N\geq 68$, *а умова* (8) *— при* $N\geq 83$.

2. *Нехай* $\varepsilon=0.01, \delta=0.01$. *Тоді умова* (7) *виконується при* $N>4654$, *а умова* (8) *— при* $N\geq 6640$.

7. Логарифмічна функція $b(h)$**, параметр** $1\leq p\leq 2$. Із пункту 6 випливає, що для випадку $1\leq p\leq 2$ шукані нерівності для порядку розбиття N будуть в точності такими ж, як і для випадку $p>2$, тобто знову отримаємо нерівність (8) при виконанні умови (7).

Зауваження 4. *Як і для степеневої функції, при* $p=2$ *отримані оцінки мають місце для гауссівських процесів.*

Приклад 5. *Покладемо* $c=1$, $\mu=4$, *тоді функція відхилення* $b(h)=\frac{1}{\ln^4(1+\frac{1}{h})}$.

B) Нехай $p=1.5$.

3. Нехай $\varepsilon = 0.1, \delta = 0.1$. *Тоді умова* (7) *виконується при* $N \geq 30$, *а умова* (8) *— при* $N \geq 38$.

4. Нехай $\varepsilon = 0.01, \delta = 0.01$. *Тоді умова* (7) *виконується при* $N > 602$, *а умова* (8) *— при* $N \geq 932$.

Висновки. У даній статті було досліджено наближення стаціонарних строго φ-субгауссівських процесів ламаними лініями, побудованими на основі рівномірного розбиття відрізка $T = [0,1]$, для функції

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{|x|^p}{p} & \text{при} \quad |x| > 1, \\ \frac{x^2}{p} & \text{при} \quad |x| \leq 1, \end{cases}$$

де $p > 2$ та для функції $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$ (коли $1 < p \leq 2$), для випадків степеневої та логарифмічної функції відхилення $b(h)$. Для них отримано відповідні нерівності для знаходження шуканого порядку розбиття N.

Крім того, розглянуто кілька прикладів наближення для конкретних значень точності, надійності, параметра p, в яких знайдено шукане число N.

Надалі планується розглянути наближення інших класів випадкових процесів, а також наближення іншими класами функцій — наприклад, сплайнами, вейвлетами тощо.

1. *Булдигін В. В., Козаченко Ю. В.* Метричні характеристики випадкових величин і процесів. – К.: ТВіМС, 1998. – 290 с.
2. *R. Guiliano Antonini, Yu. Kozachenko, T. Nikitina.* Spaces of φ-Subgaussian Random Variables. // Memorie di Matematica e Applicazioni. – 2003. – 121°, Vol. XXVII, fasc. 1. – P. 95–124.
3. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских. // Теория вероятн. и матем. статист. – 1985. – **32**. – С. 42–53.
4. *Козаченко Ю. В., Ковальчук Ю. А.* Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из $Sub_\varphi(\Omega)$. I // Укр. мат. журн. — 1998. – **50**, №4. – С. 504–515.
5. *Kozachenko Yu. V., Vasilik O. I.* On the distribution of suprema of $Sub_\varphi(\Omega)$ random processes. // Theory of Stochastic Processes. – 1998. – **4 (20)**, №1–2. – P. 147–160.
6. *Seleznjev O.* Distribution of extremes and simulation of Gaussian processes. // Teor. Jmovirn. Mat. Stat. – 1998. – **58**. – P. 149–158.
7. *Seleznjev O.* Large deviations in the piecewise linear approximation of Gaussian processes with stationary increments. // Adv. Appl. Prob. – 1996. – **28**. – P. 481–499.

Одержано 01.04.2007